ACTA

SOCIETATIS SCIENTIARUM

FENNICÆ.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY
WOODS HOLE
LIBRARY
MASS.

TOMUS XLVI.

HELSINGFORSIÆ.
Ex officina typographica Societatis litterariæ fennicæ.
MCMXX.

TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE TOME.

N:o

1. Histologische Studien über die Muskelentwickelung von *Vanessa Urticae* L., von Erik Nordenskiöld. Mit einer Tafel.
2. Über die Schwingungszahlen der Metallmoleküle und die Absorption des Lichtes in Metallen, von K. F. Slotte.
3. Note sur le problème isopérimétrique, par J. W. Lindeberg.
4. Sur un principe général de l' analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, par Ernst Lindelöf.
5. Om Kvartsens termiska dilatation, af Karl F. Lindman.
6. Om Turmalinens termiska dilatation, av Karl F. Lindman.
7. Zur Theorie der Lobatscheffskij' schen Geometrie, von Severin Johansson.
8. Über die Tractrix und die Pseudosphäre in der Hyperbolischen Geometrie, von Severin Johansson.

Minnestal öfver professor emeritus arkiater Otto E. A. Hjelt, hållet på Finska Vetenskaps-Societetens års- och högtidsdag den 29 april 1914 af E. A. Homén.

Odo Morannal Reuter som zoologisk forskare. Minnesord upplästa vid Finska Vetenskaps-Societetens års- och högtidsdag den 25 maj 1914 af J. A. Palmén.

Minnestal över friherren docenten fil. dr. August Benjamin af Schultén, hållet vid Finska Vetenskaps-Societetens årshögtid den 29 april 1913 av Wilhelm Ramsay.

Minnestal öfver professoren Karl Fredrik Slotte, hållet vid Finska Vetenskaps-Societetens års- och högtidsdag den 29 april 1915 af Hj. Tallqvist.

Minnestal över lektorn doktor Gustaf Otto Mattsson, hållet å Finska Vetenskaps-Societetens årshögtid den 29 april 1915 av Edv. Hjelt.

Lefnadsteckning öfver professor emeritus, statsrådet Konrad Gabriel Hällstén, föredragen vid Finska Vetenskaps-Societetens års- och högtidsdag den 29 april 1914 af E. E, Sundvik.

29178

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 1.

HISTOLOGISCHE STUDIEN

ÜBER

DIE MUSKELENTWICKLUNG

VON

VANESSA URTICAE L.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY
WOODS HOLE
LIBRARY
MASS.

VON

ERIK NORDENSKIÖLD

MIT EINER TAFEL

HELSINGFORS 1914
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT.

Die Arbeit, deren Ergebnisse in vorliegender Abhandlung wiedergegeben werden, wurde schon vor mehreren Jahren geplant und angefangen, die endliche Ausarbeitung derselben ist aber durch verschiedene Umstände bis jetzt verschoben worden. Zu verschiedenen Zeiten habe ich im Histologischen Institut der Medizinischen Fakultät zu Paris und im Histologischen Laboratorium des Carolinischen Instituts zu Stockholm daran gearbeitet; den Vorstehern dieser Einrichtungen, den Herren Professoren A. Prenant und E. Holmgren, sage ich hiermit meinen herzlichsten und tiefempfundensten Dank für die mehrfachen Anregungen und Ratschläge, mit welchen sie mich zu verschiedenen Zeiten und auf verschiedenen Stufen meiner Arbeit unterstützt haben. Während meines Aufenthalts in Paris hatte ich Gelegenheit mit Herrn Professor C. Pérez zu konferieren und aus seiner reichen Erfahrung manchen wertvollen Rat zu schöpfen, wofür ich ihm hiermit aufs herzlichste danke. Die damaligen Ergebnisse meiner Untersuchungen wurden in einer kurzen vorläufigen Mitteilung in den Comptes rendus de la société biologique de Paris, Tome 70, N:o 20, pag. 906—8 zusammengefasst: in vorliegender Abhandlung sind die dort zu findenden Angaben durch neue Untersuchungen mehrfach und wesentlich verändert worden. Bei der Anfertigung der Figuren habe ich die Hülfe der Fräulein A. Liljeroos und M. Sederholm genossen, was ich hiermit dankbar anerkenne.

Helsingfors, Mai 1914.

Der Verfasser.

Historische Übersicht.

Jedem, der sich mit den Fragen der Histolyse und Histogenese der Muskulatur der Insekten während der Metamorphose beschäftigt hat, muss es auffallen, wie weit die bisherigen Angaben über dieses Thema voneinander abweichen. Die Beobachtungen verschiedener Forscher über denselben Vorgang bei derselben Species sind zuweilen einander ganz widersprechend, und über Mitglieder verschiedener Insektenordnungen bekommt man in wichtigen Hinsichten grundverschiedene Angaben. Und dennoch wäre ja zu erwarten, dass ein Organsystem, dessen Grundbestandteile auch in Einzelheiten so gleichartig gebaut sind wie die quergestreifte Muskulatur der Insekten, auch während der Prozesse des Entstehens und Verschwindens, wie sie sich bei der Metamorphose abspielen, wenigstens die Hauptveränderungen überall gemeinsam hätte. Eine kurze Übersicht auch nur der allerwichtigsten Angaben früherer Forscher auf diesem Gebiete wird jedoch zeigen, wie oft sie in der Tat unvereinbar sind.

Abgesehen von einigen Andeutungen bei Gelehrten aus früherer Zeit, welche fragmentarisch sind und übergangen werden können, findet man die ersten massgebenden Angaben über die inneren Vorgänge bei der Metamorphose der Insekten bei Weismann in seiner Untersuchung über die Entwicklungsgeschichte der *Musca vomitoria* [1]). Diese Untersuchung ist in der Tat epochemachend auf dem Gebiete der topographischen Anatomie und den während der Metamorphose erfolgenden Veränderungen; inbetreff der strukturellen Veränderungen der Gewebsbestandteile konnte aber Weismann mit den damaligen beschränkten technischen Hilfsmitteln nur unvollständige Aufschlüsse gewinnen. Seine Darstellung von der Histogenese des Larvenmuskels ist unklar: die Art der Entstehung und Vermehrung der quergestreiften Substanz wie der ganze zelluläre Bau des Muskelbündels wird ganz summarisch dargestellt (l. c. p. 192). Beim Eintritt des Puppenstadiums werden nach seiner Meinung sämtliche Larvenmuskeln durch „fettige Entartung" aufgelöst. Von den Auflösungsprodukten bilden sich die vom Verf. sogenannten „Körnchen-

[1]) Weismann. Die nachembryonale Entwickelung der Musciden. Zeitschr. f. wiss. Zoologie Bd. 14. 1864.

kugeln", welche am Aufbau der imaginalen Organe lebhaft teilnehmen und aus mit Fetttropfen gefüllten kernführenden Plasmamassen bestehen. Beim Entstehen dieser Bildungen nimmt der Verf. eine „freie Zellbildung" aus strukturlosem Material wenigstens als möglich an (l. c. pag. 264). Aus diesen Körnchenkugeln werden frei in der Leibeshöhle die Muskeln gebildet, indem die Kugeln sich aneinanderlagern, miteinander verschmelzen und die kontraktile Substanz in den dadurch gebildeten Strängen später aussondern. Die übrigen Partien des Kopfes und des Thorax stammen aus den Imaginalscheiben: undifferenzierte embryonale Plasmagebilde in verschiedenen Teilen der ventralen Körperseite, deren Zuwachs und Differenziation unmittelbar nach der Verpuppung anfängt. Die WEISMANNSCHE Darstellung der Puppenentwicklung hat einen grossen Einfluss ausgeübt. Die Auffassung von der völligen Auflösung der Larvengewebe und dem damit zusammenhängenden Neubau des imaginalen Körpers aus Imaginalscheiben und Körnchenkugeln galt lange als Ausgangspunkt der weiteren Forschung auf diesem Gebiete, und erst später wurde sie durch Untersuchungen anderer Gelehrten bedeutend modifiziert. Eingehend wurde sie zuerst von GANIN kritisiert [1]), und zwar auf Grund zahlreicher Untersuchungen weit voneinander entfernter Insektenformen. GANIN lässt das Meiste des Kopfes und des Thorax aus den Imaginalscheiben hervorgehen. Diese Scheiben differenzieren ein ektodermales und ein mesodermales Blatt: aus letzterem werden die Muskeln gebildet. Die larvalen Muskeln zerfallen vollständig, und ihre Bestandteile spielen nur als Nahrungsmittel der imaginalen Gewebe eine Rolle; das Dasein der Körnchenkugeln WEISMANNS und die aufbauende Tätigkeit von Elementen der Larvengewebe überhaupt wird in Abrede gestellt. Dagegen scheint GANIN die Teilnahme der Leukocyten an der Zerstörung der Muskulatur beobachtet zu haben, obwohl er die Bedeutung dieses Vorganges nicht eingeschätzt hat.

Von tief eingreifender Wirkung auf die ganze Auffassung der Vorgänge im metamorphosierten Insektenkörper wurde dagegen diejenige Darstellung der phagocytischen Phänomene, die am Anfang der achtziger Jahre von METSCHNIKOFF [2]) geliefert wurde. Diese Vorgänge und die Rolle, welche wandernde mesodermale Elemente beim Stoffumsatze des tierischen Körpers überhaupt spielen, bildeten von nun an lange den Zentralpunkt, um welchen sich die Untersuchungen der histolytischen und histogenetischen Prozesse im Insektenkörper bewegten. Und besonders die Vorgänge in der Muskulatur hat man umso mehr von diesem Gesichtspunkte aus betrachten müssen, je zahlreicher das

[1]) GANIN. Materialien zur Kenntnis der postembryonalen Entwicklungsgeschichte der Insekten. Das russische Original dieser Abhandlung war mir nicht zugänglich. HOYERS Referat in der Zeitschr. f. wiss. Zoologie Bd. 28, 1877, und dasjenige von VIALLANES im unten zitierten Aufsatze wurden benutzt.

[2]) METSCHNIKOFF. Untersuchungen über die intrazelluläre Verdauung bei wirbellosen Tieren. Arbeiten aus dem zoolog. Institute d. Universität Wien, Bd. V. 1884.

Tatsachenmaterial wurde. Und gerade seit dieser Zeit haben sich die Untersuchungen auf diesem Gebiete riesig vermehrt.

Gleichzeitig mit METSCHNIKOFF, aber von ihm unabhängig, studierte VIALLANES [1]) die histolytischen Vorgänge an den Geweben der *Musca vomitoria* — übrigens diejenige Insektenform, die am liebsten zu Untersuchungen auf diesem Gebiete benutzt worden ist. Seine Beobachtungen über die Histolyse der Larvenmuskeln sind weit eingehender als diejenigen seiner Vorgänger und hätten, richtig gedeutet, zu einer völlig modernen Darstellung des Vorganges Anlass geben können; eine solche Deutung blieb aber aus. Wie WEISMANN behauptet er, dass die larvalen Muskeln gänzlich aufgelöst werden. Diese Auflösung lässt er aber in zweierlei Weise geschehen, entweder durch „regressive Entwicklung" oder durch „Kerndegeneration". Der erstgenannte Vorgang wird durch Veränderungen an den Kernen eingeleitet: sie werden kugelförmig, umgeben sich mit Protoplasma und bilden hierdurch Zellen, die er Muskelzellen nennt, welche in die kontraktile Substanz eindringen und diese auflösen. Nach deren Zerstörung verbreiten sich die Muskelzellen im ganzen Körper, ohne dass ihr weiteres Schicksal angegeben wird. Durch Degeneration lösen sich die Muskeln auf, indem ihre Kerne ihren Inhalt verlieren und zugleich die Muskelsubstanz von aussen nach innen sich auflöst. Es ist ohne weiteres einzusehen, dass der Verf. wie auch GANIN phagocytische Phänomene beobachtet hat.

Dasselbe Objekt wie VIALLANES behandelte etwas später KOWALEVSKY [2]) unter Berücksichtigung der neuen von METSCHNIKOFF geschaffenen Gesichtspunkte. Er identifiziert die Körnchenkugeln WEISMANNS mit Phagocyten und studiert in Einzelheiten die Auflösung der Muskeln durch diese Wanderzellen, er verfolgt das Schicksal der Muskelfragmente, welche in ihrem Plasma aufgenommen werden, bis zu ihrer völligen Verdauung. Seine Behandlung des Gegenstandes kann also als die erste moderne gelten. Gleichzeitig und unabhängig von ihm studierte VAN REES [3]) dieselben Vorgänge mit etwa gleichartigen Ergebnissen. Als bemerkenswert muss seine Angabe, dass die imaginalen Flügelmuskeln nicht neugebildet werden, sondern aus umgebildeten Larvenmuskeln stammen, erwähnt werden. Seitdem ist die Rolle der Phagocyten als Zerstörer der Muskulatur — sowie vieler anderer Gewebe — festgestellt, aber viele Einzelheiten blieben jedenfalls noch unaufgeklärt, und die an einem und demselben Objekte gewonnenen Ergebnisse liessen sich auch nicht ohne weiteres auf andere Insektenformen anwenden. Wenigstens zwei Fragen

---

[1]) VIALLANES. Recherches sur l'histologie des Insectes &c. Annales des sciences naturelles, Zool. (6) T. XIV p. 1. 1882.

[2]) KOWALEVSKY. Beiträge zur Kenntnis der nachembryonalen Entwicklung der Musciden. Zeitschr. für wiss. Zoologie, Bd 45, pag. 592. 1887.

[3]) VAN REES. Beiträge zur Kenntnis der inneren Metamorphose von *Musca vomitoria*. Zoologische Jahrbücher. (Anat.). Bd. 3, pag. 1. 1888.

von massgebender Wichtigkeit blieben noch unberücksichtigt, das heisst: sind die Phagocyten das einzige die Gewebe histolysierende Agens, und zweitens: gehen die larvalen Gewebe tatsächlich vollkommen zugrunde oder bleiben von ihnen Teile zurück, die an dem Aufbau des imaginalen Körpers teilnehmen? Dass sich diese Prozesse bei verschiedenen Insektenformen in verschiedenartiger Weise abspielen, haben die folgenden Untersuchungen gezeigt.

Über die diesbezüglichen Vorgänge bei der Puppe einer Motte aus der Gattung *Tinea* berichtet KOROTNEFF [1]). Die wichtigsten Ergebnisse seiner Untersuchung sind folgende: „die Leukocyten nehmen absolut keinen Anteil an der Degeneration der Gewebe", und „die Entstehung aller Imaginalmuskeln ist als Reformation der Larvenmuskeln anzusehen". Die Histolyse der Muskeln wird eingeleitet durch das Zusammenziehen des fibrillären Teils und die gleichzeitige Vermehrung der Kerne, besonders an der einen Seite; zum Schluss besteht der Muskel aus einem faserigen und einem kernigen Teil, die einander parallel liegen; „anders gesagt, es bildet sich der von vielen Autoren in der Pathologie beschriebene Kernstrang". „Zu derselben Zeit resorbiert sich und schmilzt das Primitivbündel, ohne jeden Anteil der Leukocyten, die bei der Motte nie durch das Sarkolemma des Muskels eindringen. Der Kernstrang trennt sich bald von dem Muskel ab und fängt an, sich von der Oberfläche zu entfernen; er produziert bald, während er noch dem Primitivbündel gehört, neue Fibrillen, die anfänglich kaum zu unterscheiden sind; wenn er sich aber ganz und gar abgetrennt hat, erscheinen die Fibrillen als besondere rhomboidale Bildungen, die im Plasma des Kernstranges zwischen den Kernen eingebettet sind. Bei einem Längsschnitte bilden die beiden Muskeln, der frühere, der atrophiert ist, und der welcher neu sich entwickelt hat zwei parallele Streifen." . . . Später schwindet der absterbende Teil langsam, während der imaginale Teil sich weiter entwickelt und neue sich in Bündeln ordnende Fibrillen erzeugt. — Die grosse Bedeutung der kurzen Mitteilung KOROTNEFFS besteht darin, dass er im Gegensatz zu der damals alleinherrschenden Phagocytentheorie einen anderen, autolytischen Auflösungsprozess der Larvengewebe beobachtete und vorlegte. Sein Erklärungsversuch des Vorkommens zweier so verschiedenen Entwicklungsmodi eines und desselben Prozesses wird aber dadurch beeinträchtigt, dass er die Histolyse der Insektenmetamorphose mit pathologischen Degenerationserscheinungen bei höheren Tieren parallelisiert. Er vermutet, dass das Eingreifen der Phagocyten bei den Musciden von der grösseren Schnelligkeit der Entwicklung abhängt: eine Erklärung, die wohl für so komplizierte Prozesse allzu einfach ist.

[1]) KOROTNEFF. Histolyse und Histogenese des Muskelgewebes bei der Metamorphose der Insekten. Biologisches Zentralblatt Bd. 12, pag. 261—265. 1892.

In einem Aufsatz über Phagocytose bei verschiedenen Evertebraten behandelt De Bruyne [1]) die Muskelhistolyse von *Sarcophaga* und *Bombyx mori*. Von ersterer behauptet er, dass die Muskeln sich selbst in Fragmente auflösen, die später von Phagocyten aufgenommen werden. Aber ausserdem lässt er Muskelkerne, von Plasma umgeben, sich aus dem Gewebe losmachen und, als Phagocyten wirkend, Teile der zerfallenen Muskulatur aufnehmen und verdauen. Bei der Seidenraupe hat er dasselbe gesehen, nur degenerieren die Fibrillen noch gründlicher, ehe sie von den zweierlei Phagocyten aufgenommen werden. Und bei *Bombyx* spielen die Zerfallsprodukte eine Rolle beim Aufbau der imaginalen Gewebe. Bei *Tenebrio* wirken nur Blutkörperchen als Phagocyten, bei *Phryganea* nur Muskelphagocyten.

Eine eingehende Untersuchung der histolytischen und histogenetischen Prozesse einer Hymenoptere — *Lasius flavus* — liefert Karawaiew [2]). Er untersucht die meisten Organe seines Objektes; auch über die Muskulatur berichtet er eingehend. Seine Darstellung geht auf diesem Gebiete von Korotneffs oben referierten Untersuchungen aus, und im grossen ganzen bestätigt er deren Ergebnisse. Besonders genau untersucht er die Auflösung der larvalen Muskeln und die Veränderungen ihrer Kerne und ihres Plasmas. Schon früh im Larvenalter findet er einen Unterschied zwischen larvalen und imaginalen Kernen, das heisst Kernen, die nach erfolgter Larvenentwicklung zugrunde gehen, und solchen, die das Ausgangsmaterial der imaginalen Muskulatur bilden. Diese Kerne mit umgebendem Plasma nennt er „Myoblasten", ein Name, der auf diesem Stadium kaum gerechtfertig ist: er setzt wirkliche, abgegrenzte Zellen voraus, und da bildet ja der Muskel noch ein Syncytium, bei dem man von Kernen mit umgebendem Plasma reden sollte. Die larvalen Kerne findet er gross, schon früh unregelmässig konturiert, mit schwammigem, stark färbbarem Inhalt. Die imaginalen „Myoblasten" sind kleiner, vermehren sich schnell durch Kernteilung und wandern in die kontraktile Substanz ein. Diese wird durch Selbstauflösung degeneriert, und ihre Masse dient den jungen Zellbildungen als Nahrung (Fig. 55 bis 59). Die „larvalen Myoblasten" werden aus der Muskelmasse ausgestossen und sterben ab (Fig. 60—62). Eine Teilnahme der Phagocyten an der Auflösung der Muskeln stellt der Verf. gänzlich in Abrede: auch da, wo er phagocytenähnliche Zellen abbildet (Fig. 49—50), nennt er sie „indifferente Mesodermzellen". Weder der Name noch die Deutung dieser Gebilde erscheint jedoch befriedigend: ihre Lage, so wie sie abgebildet sind, gibt jedem unbefangenen Betrachter den Eindruck

---

[1]) De Bruyne. Recherches au sujet de l'intervention de la phagocytose dans le développement des invertebrés. Archives de biologie Tome XV, pag. 181—300. 1898.

[2]) Karawaiew. Die nachembryonale Entwicklung von *Lasius flavus*. Zeitschr. für wiss. Zoologie Bd. 64, pag 383. 1898.

von wirklichen Phagocyten, und damit bekommt man auch den Eindurck, dass die Phagocytose jedenfalls auch bei den hier dargestellten Prozessen eine Rolle spielen muss. — Über die Histogenese der imaginalen Muskulatur berichtet der Verf. nur wenig: die neue kontraktile Substanz wird von den jungen „Myoblasten" ausgeschieden und vermehrt sich durch Zusammenwirken mehrerer Myoblasten; näheres wird über den Gang des Prozesses nicht mitgeteilt.

KARAWAIEWS grosses Verdienst wares, dass er bei seinem Objekte die Abstammung der imaginalen Muskeln aus Elementen der Larvenmuskulatur und das Dasein der larvalen und imaginalen Kerne feststellte. Dagegen ist seine Darstellung der Rolle der Leukocyten nicht überzeugend gewesen. Auf einem Gebiete, das dem seinigen nahe steht, Bienen und Wespen, hat ANGLAS [1]) weiter gearbeitet. Er hat im Gegensatz zu seinen Vorgängern die verschiedenen Muskeln des Untersuchungsobjektes gesondert gehalten und dadurch auch wesentliche Differenzen in der Entwicklung verschiedener Muskeln eines und desselben Tieres konstatiert. Er unterscheidet folgende Muskelkategorien:

1) Dorsale und longitudinale des Hautmuskelschlauches.

2) Ventrale ebensolche.

3) Transversale Seitenmuskeln.

4) Peri-intestinale, ösophagale, rektale Muskeln. Kein Muskel wird nach ihm unversehrt vom Larven- bis zum Imaginalstadium beibehalten. Der Bau wird vielmehr durchgreifend verändert, und die Elemente der larvalen Muskulatur unterscheiden sich immer durch beträchtlichere Grösse von denjenigen der imaginalen. Die Veränderungen der Muskeln sind verschiedenartig; entweder A) schwinden die Muskeln völlig, wie diejenigen des Pharynx, des hinteren Abdomens, des Rectums — oder B) sie werden aufgelöst und durch andere nach Bau und Lage verschiedenartige ersetzt, z. B. diejenigen des Thorax und des Darmes — oder C) sie persistieren und werden nur modifiziert, wie die Muskeln des Abdomens.

Von den sub A angegebenen Muskeln wurden diejenigen des Sphincter ani untersucht. Beim Eintreten der Histolyse ziehen sich die Kerne zusammen, wogegen das Sarkoplasma schwillt und sich von den Fibrillen abhebt. Einige Kerne zerfallen von selbst. Leukocyten dringen schon im Larvenstadium vereinzelt ein, ohne die Gewebe zu schädigen. Die Leukocyten sind verschiedenartig, indem sowohl runde wie spindelförmige vorkommen. Ihre Angriffsstelle ist konstant, an der Basis des hügelförmig angeschwollenen Sarkoplasmas (siehe Fig. 49, auf Tafel 22). Sie dringen immer zahlreicher ein und vermehren sich gleichzeitig durch Teilung. Ihr Eindringen kann der Auflösung

[1]) ANGLAS. Observations sur les metamorphoses internes da la guêpe et de l'abeille. Bulletin scientifique de la France et de la Belgique. Tome 34. sér. 5, vol. 3. Paris 1901.

der quergestreiften Substanz vorausgehen, aber auch nachfolgen. Jedenfalls lösen sie die Gewebe auf, doch ob sie feste Bestandteile desselben auflösen können, bleibt fraglich: Verf. schlägt den Namen Lyocyten statt Phagocyten vor. — Sub B wurden die Thoraxmuskeln untersucht. Am Anfang des Puppenstadiums sind sie durch einen Prozess, ähnlich dem vorigen, aufgelöst: besonders umgeben die Leucocyten die Fragmente der kontraktilen Substanz; die Larvenkerne sind ab und zu sichtbar. Später wird die histolysierte Masse in eliptische Felder verteilt, welche den zu bildenden Muskelbündeln entsprechen und von massenhaften Leukocyten umgeben sind. Diese Felder enthalten je einen larvalen Kern; andere larvale Kerne erscheinen von Leukocyten fragmentiert. Aus den persistierenden Kernen bilden sich durch Umordnung des Chromatins und Auflösung der Membran eine Menge „bakterienförmiger Stäbchen", welche die Anlagen der imaginalen Kerne darstellen (Fig. 51—53). Sie ordnen sich in Reihen, indem das Plasma in die Länge wächst und Querstreifung bekommt. — Sub C werden Abdominalmuskeln betrachtet. Die kontraktile Substanz wird konzentriert und verliert die Querstreifung, löst sich aber nicht auf; die Kerne lösen sich wie die vorigen in Stäbchen auf, und diese entwickeln sich zu Imaginalkernen. — Ausserdem werden die Extremitätenmuskeln berücksichtigt, welche sich aus indifferenten Mesodermanlagen entwickeln. Der Verf. polemisiert gegen Karawaiew, dessen „Myoblasten" er als Leukocyten deutet. Der Haupteinwand gegen Anglas muss wohl seiner eigenartigen und nicht einmal durch lückenlose Beobachtungen begründeten Theorie von der Bildung der Imaginalkerne durch Zerfall der Larvenkerne gelten. Auch seine verschiedenartig geformten Leukocyten bedürfen einer Bestätigung: die spindelförmigen sind von Anderen (s. unten.) als Myoblasten gedeutet worden.

Berlese [1]) hat gleichzeitig mit Anglas eine umfangreiche Arbeit über Gewebsveränderungen während der Metamorphose mehrerer verschiedenartiger Insektenformen veröffentlicht. Er stellt eine neue Erklärung der Muskelentwicklung auf, die er im grossen ganzen für alle von ihm untersuchten Insekten- und Muskelformen gelten lässt. Inbetreff der *Sarcophaga* behauptet er, dass die Muskeln durch Selbstauflösung zerfallen, eine Auflösung, die er auf Verdauungsfermente, die während der Histolyse in die Körperhöhle diffundieren, zurückführt. Die Leukocyten nehmen zwar Muskelfragmente auf, verdauen sie aber nicht, sondern liefern sie wieder in die Körperflüssigkeit aus. Die Kerne der Muskeln zerfallen in mehrere Tochterkerne, die sich zu spindelförmigen freibeweglichen „Myocyten" umwandeln, welche die imaginalen Muskeln aufbauen. Bei der Seidenraupe fand er Myocytenbildung schon im Larvenstadium, indem sich Kerne mit

[1]) Berlese, Antonio. Osservazioni su fenomeni che avvengono durante la ninfosi degli insetti metabolici. Rivista di patologia vegetale, vol. 8—10. 1902.

umgebendem Plasma von den Muskelbündeln lostrennen und in der Körperhöhle frei herumflottierend als Anlagen späterer Muskeln sowie auch als Verstärkung der schon vorhandenen dienen. Die Histolyse im Puppenstadium findet in einer Weise statt, die sich der oben dargestellten anschliesst.

Von der Entwicklung eines Käfers berichtet BREED [1]) in einer sowohl anatomischen wie histologischen Abhandlung. Nach ihm werden die Muskelfibrillen der Larve durch Selbstauflösung zerspalten und zerstört, die larvalen Kerne teilen sich amitotisch, und um sie werden neue Fibrillen abgesetzt. Wandernde Myoblasten kennt er nicht, ebenso wenig wie Muskelhistolyse durch Leukocyten; dagegen schreibt er den Tracheenendzellen eine grosse Bedeutung bei dem diesbezüglichen Prozesse zu; sie teilen sich mitotisch, trennen sich im Puppenstadium von den Tracheen und sind sowohl mit den Myoblasten wie mit den Leukocyten früherer Autoren identisch, und wirken als solche bei der Histolyse der alten und bei der Histogenese der neuen Muskeln mit. Mit Körnchen und Tropfen beladene freie Zellen — die Körnchenkugeln der Autoren — betrachtet er als Entoparasiten(!).

Über die Fliegenentwicklung arbeitete noch einmal MERCIER [2]). Er benutzte, um die Leukocyten sicher von anderen Zellen zu unterscheiden, Injektion von Karmin in den Larvenkörper, wodurch er unzweideutig konstatierte, dass es die — karmingefärbten — Leukocyten sind, welche die Muskeln auflösen, und keine anderen Zellenarten dabei betätigt sind. Die Histogenese studierte er nicht.

Eine neue gründliche Untersuchung der so vielmals früher studierten Fliegenpuppe hat PÉREZ [3]) vor einigen Jahren veröffentlicht. Er nimmt sämtliche Angaben älterer Autoren zu kritischer Beurteilung auf und stützt auf ein umfassendes eigenes Tatsachenmaterial seine scharf gefasste Meinung vom wirklichen Vorgang. Er konstatiert wie MERCIER, dass die Leukocyten der Körperflüssigkeit die wirklichen Auflöser der Muskelgewebe sind, die beim Eintritt der Histolyse massenhaft in die Gewebe eindringen und die Fragmente der kontraktilen Substanz in sich aufnehmen und auflösen. In dieser Frage stimmt er mit KOWALEWSKY überein, ebenso in seiner Deutung der „Körnchenkugeln" WEISMANNS als mit Nahrungsstoffen der aufgelösten Gewebe beladene Leukocyten. Was seiner Untersuchung aber besonderen Wert gibt, ist seine genaue Feststellung der cytologischen Charaktere der verschiedenen Zellenarten und -entwicklungsstadien. Er verfolgt

[1]) BREED. The changes which occur in a Beetle — — during the Metamorphosis. Bull. of the museum of comp. zoology, Harward college vol. 40, n:o 7. Cambridge Mass., U. S. A. 1903.

[2]) MERCER. Les processus phagocytaires pendant la metamorphose des Batraciens anoures et des Insectes. Archives de zoologie expérimentale et générale. (4) T. 5, p. 1. Paris 1906.

[3]) PÉREZ. Recherches histologiques sur la métamorphose des muscides. Zeitschr. wie oben, (5) T. 4, p. 1. Paris 1910.

genau das Eindringen der Leukocyten im Muskel, welchen er bei Beginn des Angriffes unverändert findet: erst durch die Arbeit der Leukocyten werden zuerst das Sarkoplasma, dann die Fibrillen zerstört. Die Kerne der Muskeln verhalten sich ganz passiv: ihre Teilnahme am Auflösungsprozesse wird in Abrede gestellt, ebenso das Dasein freier Sarkolyten. Inbetreff der Histogenese der Imaginalmuskeln vertritt Pérez eine ganz neue Auffassung: er behauptet nämlich, dass diese Muskeln aus zweierlei Elementen hervorgehen: erstens aus freien Myoblasten, die aus den Imaginalscheiben stammen, zweitens aus sich metamorphosierenden larvalen Muskeln. Die Extremitätenmuskeln stammen ausschliesslich aus Myoblasten, die Abdominalmuskeln dagegen bestehen aus larvalen Muskeln, die ein eigenartiges Ruhestadium mit gänzlicher Auflösung der kontraktilen Substanz durchlaufen, um dann mit von aussen hinzutretenden Myoblasten zu verschmelzen und dadurch den Anfang des Imaginalmuskels zu bilden. Die Kerne des letztgenannten stammen also teils aus larvalen Muskelkernen, teils aus Myoblastenkernen; jene teilen sich beim Zuwachs amitotisch, diese bleiben in ihrem früheren Zustand. Der Verf. ist sich der Eigenartigkeit seiner Befunde wohl bewusst und will ihre Tragweite nicht auf andere Insektenformen anpassen, vielmehr behauptet er, dass die Imaginalkerne z. B. der Hymenopteren nicht von aussen stammen, sondern wie frühere Autoren angeben, im Larvenmuskel selbst zerstreut sind und von da aus sich weiter entwickeln.

Ein Schüler von Pérez, E. Poyarkoff [1]), hat die Muskelmetamorphose eines Käfers aus der Gattung *Galeruca* bearbeitet. Mit grosser Genauigkeit hat er die verschiedenen Muskeln isoliert verfolgt und dadurch auch gewisse Abweichungen in ihrer Entwicklung konstatiert, obwohl die ganze Muskelmetamorphose in ausgeprägt typischer Weise erfolgt. Dieser Entwicklungstypus scheint im grossen ganzen mit demjenigen der Hymenopteren identisch zu sein und andererseits von den von Pérez bei den Dipteren konstatierten Verhältnissen bedeutend abzuweichen. Zuerst stellt der Verf. die Neubildung der Genitalmuskulatur dar, welche von Myoblasten ausgeht, die von den Imaginalscheiben stammen und sich zuerst mitotisch, dann amitotisch teilen, verschmelzen und Fibrillen produzieren. Die amitotische Teilung der jungen Imaginalkerne findet in einer ganz eigenartigen Weise statt: zu beiden Seiten des Kernes bilden sich Vakuolen, die die Kernsubstanz einschnüren und schliesslich teilen; nach erfolgter Teilung bleiben die Vakuolen eine Zeitlang bestehen. Die Abdominalmuskulatur wird in folgender Weise metamorphosiert. Schon früh unterscheidet man am Larvenmuskel zweierlei Kerne, die einen sind spezifisch larval und gehen zu Grunde, die anderen, welche sich durch grösseren Chromatingehalt auszeichnen, bilden die imaginalen Kerne: am Anfang der Metamorphose um-

[1]) Poyarkoff. Recherches histologiques sur la métamorphose d'un coléoptère. Archives d'anatomie microscopique. Tome 12, pag. 333. Paris 1910.

geben sie sich mit einer spindelförmigen Sarkoplasmamasse und bilden freie Myoblasten, indem sie die Fibrillenmasse, welche gleichzeitig ihre Querstreifung einbüsst, auflösen und somit frei werden. Die Leukocyten leiten also nicht, wie ANGLAS meint, die Auflösung der Muskel ein, wohl aber fressen sie später die Fibrillenfragmente auf [1]). Die spindelförmigen Myoblasten wachsen, teilen sich zuerst mitotisch, dann amitotisch durch Vakuolen und bauen durch Verschmelzung die imaginalen Muskeln auf. Von Thoraxmuskeln wird der „Flexor coxae thoracis secundus" behandelt, welcher aus drei larvalen Körpermuskeln gebildet wird, im grossen ganzen nach obigem Typus; die alten destrukturierten Fibrillen bilden Bänder, in welche die Myoblasten eindringen, um sie als Grundsubstanz für ihre weitere Entwicklung zu benutzen. Der „Musculus adductor mandibuli" hat im grossen ganzen denselben Entwicklungsgang; nur bietet hier die Muskelsubstanz eigenartige Veränderungen dar, indem zuerst die Querstreifen verwischt werden, dann die Masse eine eigenartige alveolare Struktur annimmt und schliesslich von den Myoblasten aufgelöst und von Phagocyten verzehrt wird. Die Myoblasten werden mutmasslich zum Aufbau anderer Muskeln benutzt. Die larvalen Extremitätenmuskeln werden in derselben Weise wie die Mandibularmuskeln zerstört, die Myoblasten sammeln sich in der leeren Höhle des Fussstummels und bauen dort imaginale Fussmuskeln auf. Schliesslich behauptet der Verf., dass ANGLAS die Myoblasten mit Leukocyten verwechselt habe, und bestätigt somit die Angaben KARAWAIEWS, mit welchen die seinigen auch sonst in vielen Hinsichten übereinstimmen, z. B. inbetreff der beiden Arten von Kernen im Larvenmuskel.

Aus der obenstehenden, nur die wichtigsten Angaben umfassenden Übersicht geht hervor, dass die Auffassungen verschiedener Forscher über die hier behandelten Prozesse in vielen Hinsichten nicht zu vereinen sind. Gewisse Hauptzüge können zwar ausgeschieden werden, so z. B. dass die Verhältnisse bei Fliegen einerseits, bei Hymenopteren und Käfern andererseits verschiedenartig sein müssen. Aber inbetreff vieler Einzelheiten wird es noch davon abhängen, ob man diesem oder jenem Forscher grösseres Vertrauen schenken will, bis einmal die Beobachtungen nachgeprüft werden. Besonders dürftig sind die Angaben über Schmetterlinge. Wenn man die oben referierten Darstellungen KOROTNEFFS, DE BRUYNES und BERLESES vergleicht, wird man unmöglich ein gemeinsames Ergebnis aus ihnen gewinnen können. Alle enthalten sie eigenartige, von keinem anderen Verfasser beobachtete Einzelheiten und alle stehen sie im Widerspruch miteinander. Unter solchen Umständen muss der Forscher auf diesem Gebiete versuchen sich auf eigene Hand eine Aufklärung in den verwickelten Verhältnissen zu suchen.

---

[1]) Merkwürdigerweise schreibt der Verf. auch den Fettzellen phagocytische Eigenschaften zu: Seite 451.

Material und Technik.

Vorliegende Untersuchung beschäftigt sich hauptsächlich mit den histolytischen und histogenetischen Veränderungen der Körpermuskulatur der Puppenentwicklung von *Vanessa urticae*. Zum Vergleich wurden einige andere Tagfalter herangezogen, von welchen jedoch keine besonders bemerkenswerten Ergebnisse gewonnen wurden. Die Untersuchung umfasste die Muskeln des Körpers und der Bewegungsorgane; die Muskeln der Verdauungs- und Geschlechtsorgane sowie des Herzens sind hier nicht behandelt worden. Das Untersuchungsmaterial wurde als Larven gesammelt und im Larvenkäfig weitergezüchtet. Die sich zur Verpuppung anschickenden Exemplare wurden beobachtet und zu verschiedenen Zeiten konserviert; von anderen wurden während des 10- bis 14-tägigen Puppenstadiums täglich einige fixiert. Die kurze Puppenzeit dieser Art bietet natürlich den Vorteil, dass sich die ganze Entwicklung verhältnismässig schnell abspielt und also die Hoffnung vorliegt, dass alle oder wenigstens die meisten Entwicklungsstadien leicht zu haben sind, wenn auch immer zu bemerken ist, dass bei verschiedenen Individuen dieselbe Zeit die Entwicklung nicht gleich weit bringt. Als Fixierungsflüssigkeiten konnten natürlich nur solche benutzt werden, welche das schon in der Natur harte Chitin der Puppenschale nicht noch brüchiger machten. Sublimatgemische z. B. waren also ausgeschlossen. Die wichtigsten Erfolge wurden mit Carnoys Alkohol-Chloroform-Eisessig (24 Stunden Einwirkung) sowie mit verschiedenen Chromgemischen erreicht, von letzteren sind besonders Flemmings Chrom-Osmium-Essigsäure und Johnsons Kaliumbichromat-Osmium-Essigsäure zu erwähnen. Mit diesen Flüssigkeiten wurden, trotz ihrem schwachen Eindringungsvermögen, gute Resultate erzielt, besonders inbezug auf die feineren Plasmastrukturen — Granulabildungen u. dgl. — welche bekanntlich vom Carnoy'schen Gemisch wenigstens teilweise aufgelöst werden. Ihre Einwirkung musste immer wenigstens wochenlang sein. Auch 10 % Formol wurde benutzt; es rief zwar Schrumpfungen hervor, gab aber doch einige Aufschlüsse. Die Flüssigkeiten wurden sämtlich mit einer Pravaz'schen Spritze in die Körperhöhle des Tieres injiziert; später wurden dem Objekte einige Einschnitte in das Chitin beigebracht, und schliesslich wurde es in der Flüssigkeit aufgehängt, alles um das Eindringen der Fixierungsflüssigkeit möglichst zu beschleunigen. Die Schnitte wurden mit einem Schanzeschen Mikrotom angefertigt und verschiedenartig gefärbt. Hauptfärbemittel war immer Heidenhains Eisenalaun—Hämatoxylin, mit oder ohne Nachfärbung mit Säurefuchsin—Orange G.; andere Färbungen, welche zu erwähnen sind, waren Bendas sulfalizarinsaures Natron —Krystallviolett, ferner Safranin—Lichtgrün und Toluidin—Erythrosin.

Die Rolle der Leukocyten bei der Muskelhistolyse.

Aus den sehr bunten Ergebnissen der früheren Forschung auf diesem Gebiete scheint schliesslich als allgemein anerkannte Tatsache hervorgegangen zu sein, dass die tief eingreifende Rolle, welche die Leukocyten bei der Muskelhistolyse der *Dipteren*-Larven spielen, eine ganz vereinzelte Ausnahmeerscheinung darstellt, obwohl durch die grosse Vorliebe der Forscher seit WEISMANNS Tagen für dieses Objekt dessen Verhältnisse zu allgemein massgebender Geltung erhoben wurden. In der Tat spielt die Autolyse eine weit grössere und allgemeinere Rolle bei der Auflösung der Larvenmuskeln der Insekten als die Phagocytose. So ist es auch bei unserem Objekte, und die Phagocytose wäre überhaupt hier kaum einer Erwähnung wert, wäre es nicht gerade wegen des allgemein herrschenden Interesses für dieses Phänomen. Phagocytische Prozesse spielen bei der Muskelhistolyse von *Vanessa urticae* eine ganz sekundäre Rolle, indem Überreste abgestorbener Muskelemente von den amöboiden Blutkörperchen aufgefangen und aufgelöst werden. Solche Reste erscheinen, wenn sie von den Phagocyten angegriffen werden, schon in ganz deformiertem und destrukturiertem Zustande als mehr oder weniger zusammengeballte, homogene Klumpen, in welchen ab und zu Überreste von Fibrillen zu sehen sind, welche den Ursprung des ganzen verraten (Fig. 1). Diese Überreste stammen von Muskeln, welche, zum Verschwinden bestimmt, früher durch eine — unten näher zu besprechende — autolytische Degeneration aufgelöst worden sind. Wenn man sonst in dem Muskelgewebe Blutkörperchen findet, was besonders in wachsender Muskulatur nicht selten ist, machen sie immer den Eindruck von Nährstoffproduzenten, nicht von Phagocyten (Fig. 2).

Über die Auflösung der Larvenmuskulatur im allgemeinen.

Die Auflösung der Larvenmuskulatur verläuft also wesentlich autolytisch, um das mehrmals benutzte Wort der Autoren zu gebrauchen. Dass es sich hierbei um einen sehr komplizierten Prozess handelt, versteht sich von selbst: um einen Prozess, dessen Ursachen und mitwirkende Agentien im Grunde ganz unaufgeklärt sind. Dass die Initiative zur Auflösung von den Kernen und dem Sarkoplasma des Muskels ausgeht und von dort auf die kontraktile Substanz übertragen wird, kann man jedenfalls postulieren, da ja letztere ein Derivat der ersteren ist und von ihnen inbetreff des Lebens und der Lebensfunktionen abhängt. Das Schicksal der kontraktilen Substanz ist auch immer dasselbe: sie wird aufgelöst und schwindet; für Plasma und Kerne liegt die Sache aber nicht so einfach: sie können entweder zu Grunde gehen oder sie können fortleben und an der Bildung neuer Muskeln teilnehmen. Ihr Absterben geht hier wie überall vom

Kerne aus und wird durch Schrumpfung desselben und durch Konzentration von dessen Chromatinsubstanz eingeleitet. Mit den absterbenden Kernen geht ein Teil des Muskelplasmas unter, indem der sterbende Kern nebst umgebendem Plasma beim Zerfall des Muskels isoliert und schliesslich von Phagocyten zerstört wird. Solche absterbende Kerne mit dem oben erwähnten charakteristischen Aussehen findet man in gewissen sich verwandelnden Muskeln zerstreut, z. B. in den Kopfmuskeln (Fig. 1), aber einen konstanten Unterschied zwischen absterbenden larvalen und fortlebenden imaginalen Kernen, wie ihn z. B. Poyarkoff konstatiert hat, findet man hier nicht, und überhaupt scheinen hier weit weniger Kerne unterzugehen, als es bei der von ihm dargestellten Käferform der Fall ist.

Aber auch ganze Muskeln können dem Untergang anheimfallen und aufgelöst werden. Hierbei behalten aber die meisten Kerne ihre Vitalität und umgeben sich mit Plasma, welches anfangs unregelmässig, später eine mehr oder weniger ausgezogene Spindelform annimmt. Somit wandern beim Zerfall des Muskels eine Menge von Myoblasten mit ihrer bei so gut wie allen metamorphosierenden Insekten beschriebenen, charakteristischen Form frei in die Körperhöhle aus. Die Auflösung der kontraktilen Substanz selbst wird eingeleitet durch das Schwinden der Querstreifung und einer in Zusammenhang damit auftretenden Quellung der Fibrillen, wodurch die ganze Struktur aufgelockert wird und die einzelnen Bündel eine wellige oder sogar zusammengeknäuelte Form annehmen (Fig. 5). Diese Phänomene stehen ohne Zweifel mit chemischen Veränderungen in Verbindung, welche bei ihrem Fortschreiten den Charakter einer Fettdegeneration, wie sie schon Weismann behauptet, annehmen (Fig. 5). Durch diese Degeneration löst sich die Muskelsubstanz in eine Menge kugelartiger Gebilde von mehr oder weniger fettigem Charakter — sie schwärzen sich zum Teil mit Osmium — auf. Auch Pigmentbildung tritt dann und wann im Muskeldetritus auf, besonders im Kopfe. Schliesslich werden, wie gesagt, die Muskelfragmente von Leukocyten aufgenommen; da findet man in ihnen noch dann und wann Reste der Fibrillierung (siehe Fig. 1 u. 5). Eine solche totale Auflösung von Muskeln findet man vor allen Dingen in der Muskulatur der Abdominalfüsse, jener ausgeprägten Larvenorgane, die ja bei der Verpuppung vollkommen eingebüsst werden. Auch anderwärts im Körper schwinden einzelne der larvalen Muskeln oder Teile von solchen, so z. B. im Kopfe, in der Körperwand und auch in den Extremitäten. Was aus den frei gewordenen Myoblasten dieser Muskeln wird, habe ich nicht verfolgt; dass sie aber eine zukünftige Funktion haben, beweist ihre auf kräftige Vitalität deutende Struktur.

Die meisten Muskeln der Schmetterlingslarve werden im Gegensatz zu den obenerwähnten nicht aufgelöst, sondern gehen nach erfolgter Verwandlung in den Imaginalkörper über. So wird die Muskulatur der larvalen Mundteile für den imaginalen Mund-

apparat verwertet, die Muskeln der Larvenfüsse für die imaginalen Extremitäten; die Muskulatur der Körpersegmente wird ebenfalls im grossen ganzen beibehalten, und was schliesslich die Flügelmuskeln anbelangt, so gehen sie, wie schon bei anderen Insekten konstatiert worden ist [1]), aus umgewandelten Muskeln der Thoraxsegmente hervor. Die Umwandlung, welche solche Larvenmuskeln durchlaufen, ist insofern mit der obengeschilderten übereinstimmend, als die kontraktile Substanz aufgelöst und vom Sarkoplasma aus erneuert wird. Sonst hat aber der Prozess einen schrittweisen Charakter, indem man gewöhnlich an verschiedenen Partien desselben Muskels verschiedene Stadien der Entwicklung beobachten kann. Darum lassen sich auch an einem und demselben Präparate zuweilen mehrere histologisch verschiedene Stadien der Muskelmetamorphose studieren (Fig 6). Andererseits ist aber auch der Prozess insofern launenhaft, als oft dieselben Veränderungen an verschiedenen Exemplaren eine ungleich lange Zeit in Anspruch nehmen, sodass man das Entwicklungsstadium nicht nach der seit der Verpuppung verstrichenen Zeit sicher berechnen kann, sondern mehr gezwungen ist den Zufall zu benutzen. Die unten folgenden Beobachtungen sind an Muskeln verschiedener Körperteile gemacht worden; da es sich aber in dieser Untersuchung um histologische, nicht um topographische Fragen handelt, wurden hierbei nur gewisse, histologisch mehr versprechende Muskeln verfolgt, deren Lage und Funktion jedesmal erwähnt werden soll. Eine systematische Durcharbeitung der Entwicklung des ganzen Muskelsystems wäre zwar sehr interessant, aber auch sehr zeitraubend, und würde dennoch den histologischen Zwecken nicht viel mehr dienen.

Spezielle Beobachtungen über Muskelhistolyse.

Im Kopfe finden sehr eingreifende Veränderungen der Muskulatur statt in Zusammenhang mit der Umwandlung der beissenden Mundteile der Raupe zu den saugenden des Schmetterlings. Hierbei werden eine Anzahl von Muskelbündeln gänzlich aufgelöst. Andere wandeln sich den Veränderungen in den Mundteilen entsprechend um. Zur ersteren Kategorie gehören vor allen Dingen die Mandibularmuskeln, zu letzteren die Muskeln der Antennen und Maxillen. An der Mandibularmuskulatur findet man sofort, nachdem die Larve zu fressen aufgehört hat, die Anfänge der Auflösung der kontraktilen Substanz (Fig. 3). Die Kerne schrumpfen zuerst, indem ihre Formen eckig werden und das Chromatin sich zusammenballt. Dann erfolgt nach und nach der oben angegebene Zerfall und die völlige Auflösung der Fibrillen. An der Stelle, wo der

[1]) VAN REES ist der Entdecker dieser Tatsache, welche später besonders von PÉREZ bestätigt worden ist.

Muskel früher gewesen ist, findet man nun eine formlose Detritusmasse. In dieser unterscheidet man Klumpen zusammengeknäuelter Fibrillen, Sarkoplasmamassen mit geschrumpften Kernen, aus welchen oft das Chromatin herausgequollen ist und dem Plasma ein buntscheckiges Aussehen verliehen hat, ferner spindelförmige Myoblasten mit gleichmässig körnigem Plasma und Kerne mit allen Zeichen kräftiger Vitalität, schliesslich zum Fressen eingedrungene Phagocyten — alles zuweilen noch vom allgemeinen Sarkolemma wie von einem Sack umgeben und von formlosen, aus fettdegenerierter Substanz bestehenden Körnern durchsprengt (Fig. 4). Diese Prozesse erfolgen aber nicht an allen Muskeln gleichzeitig; vielmehr kann man an einem und demselben Präparate die verschiedenen Stadien der Zerstörung an verschiedenen Muskelbündeln vorfinden. Schon ehe die Puppe die Larvenhaut gesprengt hat, findet man einige ganz aufgelöste Muskelpartien; etwa am dritten oder vierten Tag nach der Verpuppung ist der Auflösungsprozess vollendet.

Ausser im Kopfe werden, wie gesagt, an vielen Stellen im Körper larvale Muskeln total aufgelöst. Diejenigen der Abdominalfüsse wurden schon erwähnt. In diesen Organen erscheinen deutliche Zeichen der Histolyse sofort, nachdem die Larve unbeweglich geworden ist; dann schreitet der Prozess schnell weiter, sodass die erwähnten Muskeln schon bei der Puppenhäutung in eine unförmliche Masse von Fettkörnern, Fibrillenklumpen und Myoblasten verwandelt sind (Fig. 5). Von den segmentalen Muskeln des Larvenkörpers werden auch gewisse aufgelöst; ihre Histolyse hat wie diejenige der Kopfmuskeln verschiedene Anfangszeit und Dauer. In den Vorderextremitäten der Larve habe ich bis jetzt keine Fälle von totaler Muskelzerstörung beobachtet: es scheint, als ob alle da vorhandenen Muskeln nach erfolgter Verwandlung in den Imaginalkörper übergehen.

Allgemeines über die Umwandlung von Larvenmuskeln zu Imaginalmuskeln.

Diejenigen Muskeln des Larvenkörpers, welche nicht aufgelöst werden, erleiden eine histologische Metamorphose, welche den Übergang zum Imaginalstadium vermittelt. Die diesbezüglichen Veränderungen sind immer sehr durchgreifend; soweit es zu beobachten möglich gewesen ist, geht kein Muskel mit unversehrter kontraktiler Substanz durchs Puppenstadium, sondern die ganze Fibrillenmasse wird aufgelöst und später von den imaginalen Myoblasten neugebildet. Dieser Prozess verläuft aber im ganzen Körper mit einer gewissen Gleichförmigkeit und kann darum ein für allemal behandelt werden. Wie oben gesagt, geht der Prozess schrittweise vor sich, sodass oft ein und derselbe Muskel mehrere Stadien desselben aufweisen kann (Fig. 6.) Im allgemeinen scheinen die beiden

Enden des Muskels zuerst, die Mittelpartie zuletzt der Verwandlung anheimzufallen. Auch inbetreff der Zeit wechselt der Prozess insofern, als verschiedene Muskeln zu verschiedener Zeit erneuert werden. Im Allgemeinen fällt die Metamorphose in die Tage vor und nach der Puppenhäutung, besonders in die Zeit zwischen einem Tag vor und einem nach dem Verlassen der Larvenhaut, aber auch später findet man solche Veränderungen, oft bis etwa fünf oder sechs Tage nach der Häutung. Besonders die Abdominalmuskeln metamorphosieren zu sehr wechselnder Zeit, da ja das Abdomen der Puppe immer eine gewisse Beweglichkeit bewahrt. Um grössere Klarheit über den Verlauf des Prozesses zu gewinnen, wollen wir die verschiedenen Momente desselben gesondert behandeln, also zuerst die Auflösung der larvalen Fibrillen, dann die Umbildung der Kerne und des Sarkoplasmas der Larvenmuskeln zu imaginalen Myoblasten und schliesslich die Bildung der imaginalen kontraktilen Substanz.

Die Auflösung der kontraktilen Substanz des Larvenmuskels.

Im Allgemeinen kann von diesem Prozesse gesagt werden, dass, je zarter die Elemente des Muskels sind, sie umso eher zu Grunde gehen. Es schwinden also zuerst die Granulabildungen jeder Art, was auch insofern natürlich ist, als diese Bildungen ja Produkte und zugleich Zeichen der intensiven Vitalität des Muskels sind. Mit der Einstellung der Muskeltätigkeit werden sie gleich überflüssig und darum auch sofort vom allgemeinen Sarkoplasma resorbiert. Die Fibrillen selbst halten verhältnismässig länger aus. Zuerst geht ihre Querstreifung verloren, und sie bekommen ein homogenes Aussehen, was auch zu erwarten ist, da ja die Querstreifen, wie neuere Untersuchungen beweisen, vom funktionellen Zustande des Muskels abhängen und darum auch beim Aussergebrauchsetzen des Muskels sozusagen von selbst verwischt werden müssen, worüber weiter unten. Die jetzt farblos und strukturlos erscheinende Fibrillenmasse lässt sich nicht mehr vom Sarkoplasma unterscheiden, sondern bildet mit diesem eine homogene Masse, auf deren Kosten die Erneuerung des imaginalen Muskels erfolgt (Fig. 7).

Die Umwandlung von Kernen und Sarkoplasma des Larvenmuskels in die imaginalen Myoblasten.

Von den Kernen des alten Muskels geht die Bildung des neuen aus. Ein Studium ihrer strukturellen Veränderungen ist also die notwendige Einleitung zum Verständnis des folgenden Prozesses. Ein Vergleich mit den Ergebnissen früherer Forscher auf diesem Gebiete wird uns zeigen, dass die Verhältnisse bei *Vanessa* von denjenigen an-

derer Insekten in gewissen Hinsichten beträchtlich abweichen. Wir finden hier weder einen solchen Zerfall der alten Kerne zum Zweck der Bildung der neuen, wie ihn Anglas bei den Wespen gefunden haben will, noch einen so ausgeprägten Unterschied zwischen larvalen, zum Untergehen bestimmten Kernen und imaginalen, zum Fortleben und zur Vermehrung bestimmten, wie ihn Poyarkoff bei *Galeruca* gefunden hat. Am meisten scheint das Verhalten der Kerne unseres Objektes mit denjenigen einfachen Verhältnissen, welche Korotneff bei *Tinea* gefunden hat, übereinzustimmen, soweit man sie nach seiner summarischen Darstellung beurteilen kann. Hier wie dort ist nämlich das Verhalten der Kerne im grossen ganzen weit einfacher als bei den früher erwähnten Objekten. Die meisten Kerne scheinen in der Tat die Verwandlung von Larven- zu Imaginalmuskulatur mitzumachen. Diese Verwandlung verläuft kontinuierlich und setzt im Zusammenhang mit der beginnenden Auflösung der kontraktilen Fibrillen ein. Die Kerne haben alsdann gewöhnlich eine länglichovale Form, mit reichlichem in ziemlich grossen Körnern verteiltem Chromatin und deutlichem Nucleolus (Fig. 7).

Hand in Hand mit dem Absterben der kontraktilen Substanz geht nun eine Ansammlung des Sarkoplasmas in abgesonderten Massen um die Kerne. Die Kerne werden durch diesen Prozess zu den oberflächlichen Partien des Muskels abgeschoben (Fig. 8), und da bilden sie, noch ehe die kontraktile Substanz eingeschmolzen ist, im Verein mit dem umgebenden Plasma eine mehr oder weniger mächtige Lage, deren einzelne Elemente sich voneinander absondern und hierdurch jene so oft bei der Muskelhistogenese der Insekten beschriebenen, spindelförmigen Zellen, die Myoblasten bilden, durch deren Vermehrung dann die definitiven Muskeln entstehen. Wenn nun die Fibrillenmasse schwindet, repräsentiert das mehr oder weniger lockere Gefüge der Myoblasten den Muskel. Das weitere Verfolgen der einzelnen Elemente dieser Myoblastenansammlungen ist schwierig, und der ganze Entwicklungsprozess wird noch dadurch kompliziert, dass verschiedene Stadien desselben neben- und oft sogar durcheinander auftreten (Fig. 6). Wie oben gesagt, schreitet die Umwandlung im einzelnen Muskelbündel sukzessiv vorwärts, sodass z. B. ein Ende desselben schon junge Fibrillen zeigt, wenn die Mitte noch eine verhältnismässig lose Masse von Myoblasten darstellt. Und in grösseren Muskelmassen, z. B. der Flügelmuskeln, findet man öfters nebeneinander Bündel, die ganz verschiedene Entwicklungsstadien aufweisen (Fig. 19).

Die Myoblasten sind, wie gesagt, spindelförmig, mehr oder weniger in die Länge ausgezogen, zwischen ausgezogener Bandform und abgerundeter, oft vieleckiger Klumpenform wechselnd (Fig. 8, 9 u. 10). Diese wechselnde Form hängt mit dem gewissermassen amöboiden Charakter dieser Zellengebilde zusammen: von begrenzender Zellmembran findet man bei ihnen gewöhnlich keine Andeutung, wogegen oft die Zellen selbst in verschiedene Krümmungen sowie in enge Spalten hineingezwängt vorliegen. Ihr

Plasma ist sehr homogen, zeigt zwar oft eine dichte Lage feiner Granula um den Kern, niemals aber tropfenförmige Einschlüsse irgendwelcher Art: ein Umstand, welcher diese Zellenart sofort von umgebenden Leukocyten unterscheidet. Sie vermehren sich fleissig, und zwar in diesem Stadium, soweit es sich beobachten lässt, immer mitotisch. Wäre nämlich eine direkte Kernteilung vorhanden, sollte man wohl öfters Zellen mit zwei Kernen vorfinden, was mir aber bis jetzt niemals begegnet ist. Kerne mit Furchen oder Einschnitten findet man zwar ab und zu, sie können aber durch die Plastizität der Kerne, welche mit der obenerwähnten Biegsamkeit der Zellen selbst zusammenhängt, erklärt werden. — Wie weit sich die Myoblasten bewegen können und ob sie, wie einige Autoren behaupten, wirklich wandern, um neue Muskeln an anderen weiter entfernten Orten des Insektenkörpers zu bilden, muss hier dahingestellt bleiben. Als Belege dafür könnte man einige Fälle anführen, wo freiliegende Myoblasten ohne Anschluss an voraus existierende Larvenmuskeln gefunden wurden, diese können aber auch aus vorausgegangener Umlegung in der Nähe befindlicher Muskeln hergeleitet werden (Fig. 9). Dass z. B. aus den Abdominalextremitätenmuskeln Myoblasten gebildet werden, welche anderswo Verwendung finden, wurde oben vermutet, kann aber auch nicht bewiesen werden. PÉREZ hat bei den Fliegen beobachtet, dass Myoblasten aus den Imaginalscheiben neugebildet werden, nach den werdenden Imaginalmuskeln wandern und diese verstärken. Ein solcher Prozess wurde bei unserem Objekte niemals beobachtet, was ja auch beim Untersuchungsobjekte POYARKOFFS der Fall war.

Aus der in oben dargestellter Weise sich vermehrenden Myoblastenmasse werden nun die Fibrillen neugebildet. Zu diesem Prozesse werden wir unten zurückkehren. Die kontraktile Substanz wird in der Form von Strängen oder Balken abgesetzt, und zwischen diesen werden nun die Myoblasten zusammengedrängt, indem sie den einzelnen Fibrillenbündeln aufsitzen (Fig. 13). An durch die Fixierung etwas geschrumpften Präparaten sieht man dieses am besten. Je mehr sich die Fibrillen entwickeln, umso schwieriger wird es die Grenze der einzelnen Myoblasten klar auseinanderzuhalten: ihr Plasma geht in dasjenige der Fibrillenbündel und der Nachbarmyoblasten über und bildet so ein Syncytium. Der Zuwachs des Muskels wird nun durch die Vermehrung der Myoblasten bedingt, und in der Tat tritt jetzt die intensivste Vermehrungsperiode ihrer Kerne ein. Durch diesen sekundären Vermehrungsprozess bilden sich Kerne, welche sich von den alten Myoblastenkernen durch verhältnismässig geringere Grösse und Mangel an Chromatin unterscheiden. Diese Kerne findet man oft zu Gruppen vereinigt (Fig. 14), eng aneinander geschlossen den Fibrillenbündel aufsitzend; andere solche Kerne zeichnen sich durch ungewöhnlich lang ausgezogene Form aus (Fig. 7). Von diesen jungen Kernen unterscheiden sich die alten noch überlebenden Myoblastenkerne dadurch, dass sie ver einzelt vorkommen, von reichlichem Sarkoplasma umgeben sind und einen grösseren

Reichtum an Chromatin zeigen. Wie verläuft nun diese sekundäre Kernvermehrung? Beinahe einstimmig behaupten die Forscher, dass bei der Neubildung der Muskulatur der Insekten die Kerne während ihrer intensivsten Vermehrungsperiode sich direkt teilen. Poyarkoff hat sogar einen besonderen Teilungsmodus dieser Kerne beschrieben: es bilden sich beiderseitig des bereits ausgezogenen Kerns zwei helle Vakuolen, welche sich vergrössern und hierdurch den Kern erst ein- dann abschnüren, um dann noch, nachdem die Tochterkerne sich voneinander entfernt haben, eine Zeitlang weiter zu bestehen. Diese Darstellung steht bis jetzt in der Literatur vereinzelt da. Auch bei unserem Objekte lassen sich keine Spuren eines solchen Prozesses konstatieren. Unter solchen Umständen wie den hier vorliegenden ist in der Tat eine amitotische Kernteilung sehr schwer zu beweisen. Bei gut abgegrenzten Zellen ist das Vorkommen zweier oder mehrerer Kerne in einer Zelle ein sehr plausibler Beweis, aber dieser wird hinfällig bei einem Syncytium, wie es hier vorliegt. Demnach lässt sich höchstens eine mehr oder weniger grosse Wahrscheinlichkeit des Vorkommens einer direkten Kernteilung behaupten. Und in der Tat ist ein solcher Prozess bei unserem Objekte gerade bei der Vermehrung dieser sekundären Kerne höchst wahrscheinlich. Dafür spricht sowohl das Vorkommen der obenerwähnten lang ausgezogenen Kerne und Anhäufungen von Kernen nebeneinander wie auch die vollkommene Abwesenheit von mitotischen Stadien unter den sekundären Kernen, wogegen die alten noch zurückbleibenden Myoblastenkerne oft in mitotischer Teilung vorgefunden werden. Über das weitere Schicksal der jungen Kerne und des Sarkoplasmas können wir uns kurz fassen: die oben erwähnten Gruppen von Kernen ordnen sich beim weiteren Zuwachs der kontraktilen Substanz in Reihen, deren einzelne Mitglieder bei der Längenstreckung des Muskels mehr und mehr voneinander entfernt und zugleich von den Muskelfibrillen dicht umgeben werden. Übrigens wechselt der Reichtum an Kernen und Sarkoplasma des fertigen Muskels nach dessen Lage und Funktion nicht unbeträchtlich, aber ein Eingehen auf diesbezügliche Fragen setzt die Kenntnis der Entwicklungsgeschichte der kontraktilen Substanz voraus. Zu dieser werden wir also jetzt übergehen.

Die Neubildung der kontraktilen Substanz.

Eie Frage, wie die kontraktile Substanz neugebildet wird, ist von allen Problemen der Muskelhistolyse am schwierigsten zu beantworten. Inbetreff der Insektenmetamorphose schweigt die Literatur vollständig, sodass man, um Vergleichsmaterial zu bekommen, sich der allgemeinen Embryologie zuwenden muss. Aber auch auf diesem Gebiete, dessen Tatsachen übrigens natürlich nicht ohne weiteres auf die Muskelmetamorphose der

Insekten übertragen werden sollten, findet man sehr widersprechende Angaben, was damit zusammenhängt, dass der feinere Bau des quergestreiften Muskels, selbst im völlig ausgebildeten Zustande noch mehrere umstrittene Probleme darbietet. Es scheint darum notwendig, ehe wir zur Behandlung vorliegender Spezialfrage übergehen, die Auffassung festzustellen, nach welcher in diesem Aufsatze die kontraktile Substanz betrachtet werden soll. Es müssen aber dann auch notwendig im selben Zusammenhange alle diejenigen sarkoplasmatischen Bildungen behandelt werden, welche mit der Funktion der kontraktilen Substanz unmittelbar zusammenhängen. Eine eingehendere Durchmusterung der gesamten modernen Literatur über Muskelhistologie wäre jedoch an dieser Stelle wenig am Platze, umso weniger da schon mehrere treffliche Zusammenstellungen der Ergebnisse der gesammten Forschung auf diesem Gebiete existieren; von diesen seien hier besonders hervorgehoben HEIDENHAINS [1]) Plasma und Zelle und PRENANTS [2]) Problèmes cytologiques généraux, &c. Letztere Arbeit enthält auch sehr vollständige Literaturangaben.

Die quergestreiften Muskeln sind an und für sich komplizierte Gebilde, und die Schwierigkeit aus der Literatur einen sicheren Überblick über die Forschungsergebnisse auf diesem Gebiete zu erhalten, wird dadurch erschwert, dass verschiedene Forscher sich ausschliesslich dem Studium der einen oder der anderen Einzelheit gewidmet haben: während der eine sich nur mit den Fibrillen beschäftigt, studiert der andere ebenso ausschliesslich die sarkoplasmatischen Gebilde. Im folgenden wird ein Versuch gemacht werden diese Gebilde zuerst gesondert, dann im Zusammenhange zu behandeln, und zwar mit besonderer Rücksicht auf ihre Entstehungsweise.

Inbetreff der Entstehung der kontraktilen Muskelsubstanz im allgemeinen sind mehrere Ansichten aufeinander gefolgt. Die älteste jetzt kaum mehr aufrecht gehaltene stellt sie auf dieselbe Stufe wie reine Sekretionsprodukte des Zellenplasmas, wie Chitin, Zellulose u. s. w. Jetzt werden die kontraktilen Fibrillen allgemein als durch besondere vitale Eigenschaften ausgezeichnete Plasmaderivate betrachtet, wobei man sie einerseits aus Differenziationen des allgemeinen Plasmanetzwerkes hervorgehen lässt (Reticulogenese nach PRENANT, von MAC CALLUM und WIEMAN vertreten) oder, allgemeiner, sie werden als Derivate von Mitochondrien, Körnchenbildungen mit besonders starken vitalen Eigenschaften betrachtet (Chondriogenese nach PRENANT, vgl. ALTMANN, BENDA, MEVES, DUESBERG).

Der verhältnismässig einfachen glatten Muskelsubstanz gegenüber steht die quergestreifte mit ihrer komplizierten Aufeinanderfolge von abwechselnd einfach und dop-

[1]) HEIDENHAIN, Plasma und Zelle, I, 2, Jena 1911.

[2]) PRENANT, Problèmes cytologiques généraux, soulevés par l'étude des cellules musculaires. Journal de l'Anatomie et de la Physiologie XLVIII année, n:o 3. Paris 1912.

peltbrechenden Elementen [1]. Auf die ausserordentlich zahlreichen Versuche diese komplizierten Verhältnisse näher zu analysieren und zu erklären kann aber hier nicht näher eingegangen werden, umso weniger da die Gelehrten über die wahren Ursachen dieser regelmässigen Querstreifung noch nicht einig geworden zu sein scheinen: während einige, z. B. Heidenhain, den Unterschied der doppeltbrechenden Querscheiben von den einfachbrechenden Nachbargebilden in rein physikalischen Verhältnissen sehen, heben andere auch chemische Unterschiede im Bau der verschiedenen Elemente der Muskelfibrille hervor. Es muss jedoch hervorgehoben werden, dass nach den meisten Angaben die Doppeltbrechung, welche der ganzen kontraktilen Substanz des glatten Muskels zukommt, im quergestreiften an die dadurch ausgezeichneten Querscheiben gebunden ist: dass also die Querzeichnung des Muskels vom Vorkommen alternierender, physikalisch wie chemisch verschiedenartiger Teilchen hervorgerufen wird. Diese Teilchen verhalten sich nun bei verschiedenen Funktionszuständen des Muskels verschiedenartig. Die Verhältnisse komplizieren sich noch mehr dadurch, dass die Fibrillen, wie neuere Untersuchungen unzweideutig klargelegt haben, unter dauerndem Einfluss des umgebenden Sarkoplasmas und dessen Derivate stehen, ein Einfluss, der sich in gegenseitiger Stoffaufnahme und -abgabe äussert, durch welche die verschiedenen Funktionszustände der Fibrillen bedingt werden. — Inbetreff dieser Verhältnisse werden wir vor allen Dingen den Darstellungen von Holmgren [2]) folgen welche neue Beiträge grundlegender Natur sowohl über die Morphologie wie über die Physiologie des Muskels geliefert haben.

Schon mehrere frühere Forscher haben beobachtet, dass bei den quergestreiften Muskeln körnchenförmige, dem Sarkoplasma zugehörige Gebilde in intimer Verbindung mit den Fibrillen auftreten. Diese Körnchen bilden nach Holmgren ebenso konstante Bestandteile des Muskels wie die Fibrillen selbst, und ihre Veränderungen greifen in die Funktion des Muskels ebenso ein wie diese. Die Körnchen werden nach ihrer Lage im Verhältnis zu den verschiedenen Komponenten der angrenzenden Muskelfibrille als Q-Körner und J-Körner bezeichnet: nach den letzten Untersuchungen Holmgrens scheint zwischen diesen Körnchenarten kaum ein prinzipieller Unterschied zu sein. Mit der doppeltbrechenden Querscheibe (Q) der Fibrille steht das entsprechende Körnchen in

[1]) Es wird hier nur auf die in allen Handbücher zu findende Darstellung der Reihenfolge dieser Gebilde und ihrer allgemeingültigen Buchstabenbezeichnung hingewiesen.

[2]) Von Holmgrens zahlreichen Abhandlungen auf diesem Gebiete, seien hier besonders zitiert: 1) Über die Trophospongien der quergestreiften Muskelfasern, Archiv für mikr. Anatomie u. Entw.-geschichte, Bd. 71, pag. 165. 1907; 2) Untersuchungen über die morphologisch nachweisbaren stofflichen Umsetzungen der quergestreiften Muskelfasern, ibid. Bd. 75, 1910; 3) Weitere Untersuchungen über die morphologisch nachweisbaren stofflichen Veränderungen der Muskelfasern. K. Svenska vetenskapsakademiens handl. Bd. 29, N:o 2, 1912; 4) Von den Q- und J-Körnern der quergestreiften Muskelfasern. Anatom. Anzeiger, Bd. 44, pag. 225, 1911.

einem Stoffaustausch, welcher die Kontraktion der Fibrille ermöglicht und bedingt. Im gegenseitigen Verhältnis der beiden Gebilde unterscheidet HOLMGREN vier Stadien, welche denjenigen der myographischen Zuckungskurve der Physiologie entsprechen. Als erstes erwähnt er das fakultative Stadium, wo den Q-Scheiben von Seiten der Körnchen Stoffe zugeführt worden ist, durch welche die Fibrille imstande ist sich momentan zusammenzuziehen. Die Q-Scheiben werden in diesem Stadium stark gefärbt, wogegen die Körnchen verhältnismässig hell bleiben. Im zweiten oder Kontraktionsstadium ist die Fibrille zusammengezogen; hierbei werden die aufgenommenen Stoffe resorbiert. Die zusammengezogenen Q-Scheiben färben sich hier ebenso wenig wie die Körnchen, wogegen sich die Grundmembranen durch bei der Kontraktion aufgenommene Stoffe färben. Im dritten oder Regenerationsstadium nehmen die Körnchen neue Stoffe auf, wodurch sowohl diese wie die Q-Scheiben wieder Farben aufnehmen und sogenannte regenerative Querbänder darstellen. Wird aber der Muskel ganz erschöpft, dann schwinden die Querbänder, die Fibrillen erscheinen ganz heil, und nur die Körnchen nehmen Farbe auf (postregeneratives Stadium). Wird die Erschöpfung bis zu ihrer äussersten Grenze getrieben, dann verlieren die Körnchen ihre an die Q-Scheiben gebundene, regelmässige Lage und fliessen zu grösseren Massen zusammen.

Es muss noch ein Wort über die Grundmembranen des Muskels gesagt werden, welche vom Sarkoplasma ausgehend die Fibrillen in regelmässiger Entfernung durchziehen und jene Zwischenscheiben (Z) bilden, durch welche die Fibrillenkomponenten voneinander abgegrenzt werden. Ihre Entstehungsweise scheint noch fraglich zu sein; an Muskeln von Tracheaten folgen ihnen feine Verzweigungen der Tracheenendzellen, welche hierdurch mit den Fibrillen in intimste Verbindung treten; nach HOLMGREN bilden sie Bahnen, durch welche von aussen her gelangte Nahrungsstoffe den Muskeln und zwar speziell ihren Körnchenbildungen zugeführt werden. Diese Nahrungsstoffe treten zwischen den Fibrillen als Körnchen auf, welche durch ihr unregelmässiges und temporäres Vorkommen von den konstanten an die Muskelfibrillen gebundenen Körnchenbildungen unterschieden werden.

Bildung der Fibrillen.

Aus dem obengesagten wird ohne weiteres einleuchten, dass wir beim Studium der Neubildung der kontraktilen Substanz bei unserem Objekte zwei parallele Entwicklungen zu verfolgen haben, diejenige der Fibrillen und diejenige der Körnchen. Von diesen beiden Neubildungsprozessen fängt derjenige der Fibrillen früher an, und wir wollen also damit beginnen. Dabei müssen wir von den oben geschilderten Myoblasten

ausgehen in dem Augenblicke, wo sie mit ihrem spindelförmigen Zellkörper, ihrem feinkörnigen Plasma und ihren ovalen, mit reichlichem Chromatin besetzten Kernen von der alten kontraktilen Substanz frei geworden sind. Wie lange es von da ab bis zum Anfang der neuen Fibrillenbildung dauert, muss natürlich im Einzelfalle von verschiedenen ontogenetisch eingreifenden Momenten abhängig sein. Wenn aber die neue Entwicklung einsetzt, geht sie Hand in Hand mit einer Umbildung der Myoblasten (Fig. 11 u. 12). Diese drängen sich dichter zusammen, verlieren ihre ausgeprägte Form und werden unregelmässig, und schliesslich schwinden ihre Grenzen, sodass ihre Plasmamassen ineinander überfliessen. Hand in Hand mit dieser schon oben erwähnten Syncytiumbildung geht aber eine Differenzierung des Plasmas: es bildet sich um jeden Kern ein Bezirk von stark körnigem Plasma, welches von dem übrigen gleichmässigen scharf abgegrenzt wird; es bildet sich also ein gemeinsames indifferentes Plasma, im Verhältnis zu den Kernen ein Ektoplasma, und ein scharf abgegrenztes jeden Kern umgebendes Endoplasma. Eine solche Ansammlung von stark granuliertem Plasma in nächster Nähe der Kerne ist bekanntlich bei Zellen verschiedenster Art als Zeichen beginnender Vitalität beobachtet und in ursächlichen Zusammenhang mit dem Austreten von vital anregenden Stoffen aus dem Kerne gebracht worden. Ein solcher Stoffaustritt aus dem Kerne wurde bekanntlich bei mehreren Zellkernen nachgewiesen, bei unserem Objekte lässt er sich aber bis jetzt nicht sicher aufzeigen. Dass die Anregung zur Fibrillenbildung vom Kerne über das Endoplasma ausgeht, lässt sich also bis jetzt nur vermuten, nicht beweisen. Tatsächlich treten aber die ersten Anlagen der Fibrillen im Exoplasma auf und zwar als feine fadenförmige Gebilde. Diese Fädchen lassen sich sowohl an der mit Carnoy's als auch an den mit Flemming's Flüssigkeit fixierten Objekten beobachten: im ersten Falle (Fig. 11) erscheinen sie ausserordentlich dünn, auf gewissen Strecken gleichförmig, auf anderen, weiter fortgeschrittnen, mit deutlichen, regelmässig auftretenden, stärker gefärbten Partien; an Flemmingpräparaten (Fig. 12) erscheinen sie ebenfalls sehr dünn und machen zuweilen den Eindruck, als ob sie aus Reihen winziger aneinander gereihter Stäbchen zusammengesetzt wären. Stäbchenförmige Elementarteile der Muskelfibrillen sind auch an anderen Objekten beobachtet worden und werden allgemein als mitochondriale Gebilde bezeichnet. Ob an unserem Objekte eine solche Deutung am Platze ist, mag jedoch dahingestellt bleiben. Gerade ihre Haltbarkeit in der Carnoy'schen Fixierung dürfte eigentlich dagegen sprechen, denn diejenigen chemischen Verbindungen, welche unter dem Namen der Mitochondrien gehen, sind ja in dieser Flüssigkeit löslich und an damit hergestellten Präparaten unsichtbar. An diesbezüglichen Präparaten machen die Fibrillen weit mehr den Eindruck von Verdickungen der allgemeinen protoplasmatischen Filarmasse, wie ja die ältere oben dargestellte Theorie behauptet. Andrerseits habe ich aber auch keine solchen direkten

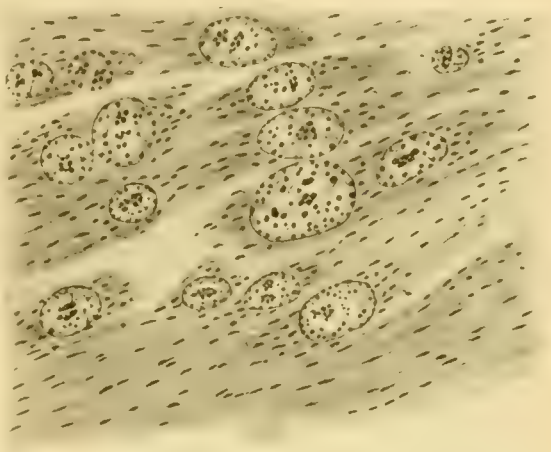
Übergänge zwischen der allgemeinen plasmatischen Filarmasse und den Muskelfibrillen gefunden, wie sie WIEMAN [1]) beobachtet haben will. Die wahre Natur der ersten Anfänge der Fibrillen muss ich unter diesen Umständen auf sich beruhen lassen, bis sie vielleicht durch erneute Untersuchungen endgültig beantwortet werden mag; die obenerwähnten Fixierungserscheinungen sprechen jedenfalls bei unserem Objekte eher gegen als für die Theorie vom mitochondrialen Ursprung der Muskelfibrillen. Wie es auch damit sein mag: die Fibrillen treten in der zusammengeschmolzenen Ektoplasmamasse auf und vermehren sich dort. An gewissen Präparaten sind Andeutungen von Spaltung der Fibrillen beobachtet worden, man kann also annehmen, dass sich die Fibrillen in dieser auch früher beobachteten Weise vermehren. Wie gesagt, treten Andeutungen einer Querstreifung der Fibrillen schon früh auf (Fig. 11). Besonders ist dies bei den Flügelmuskelanlagen der Fall; an Körpermuskeln erscheinen sie immer etwas später. Die sich vermehrenden Fibrillen vereinigen sich zu Bündeln oder Strängen, welche, je nachdem sie wachsen, die Muskelkerne mit ihrem Endoplasma zusammenpressen (Fig. 13). Hierdurch werden diese mehr und mehr in Reihen zwischen den Fibrillen zusammengedrängt. Zu dieser Zeit der intensiven Fibrillenvermehrung lässt sich die erste Körnchenbildung beobachten, und zu dieser Abteilung der Myogenese wollen wir also jetzt übergehen.

Bildung von Körnchen und Grundmembran.

Die Körnchen der kontraktilen Substanz sind unzweideutig mitochondrialer Natur und stammen aus dem Endoplasma der Myoblasten. Wenn die beiden Plasmakategorien sich abgesondert haben, zeigt sich das Endoplasma gleichmässig chromophil und zwar, wie man sich durch Anilinfärbungen überzeugen kann, basophil. Wenn die Entwicklung fortschreitet, wird das Endoplasma grobkörniger: man kann einzelne, anfangs sehr feine Granulabildungen aussondern. Diese vermehren sich an Zahl und Grösse, wandern in das Ektoplasma hinaus und verbreiten sich dort entlang den von den Fibrillen angegebenen Bahnen (Fig. 15). In diesem Anfangsstadium sind sie verhältnismässig gross und vermehren sich durch Teilung. Auf eine solche deutet nämlich teils das Vorkommen von Körnern in Gruppen von zwei oder vier zusammen (Fig. 16), teils die Erscheinung von lang ausgezogenen, mit Einschnürungen versehenen Körnern. Ihre Lage ist anfangs ganz unregelmässig, unter den Fibrillen zerstreut. Später ordnen sich die Körner in regelmässigen Abständen. Dieser Prozess gibt dem jungen Muskel seine

[1]) WIEMAN, The relation between the cytoreticulum and the fibrilbundles in the heart muscle cell of the chick. American Journal of Anatomy, vol. VI, 1907.

charakteristische quergestreifte Struktur. Die späteren in geordneten Reihen auftretenden Körnchen sind weit kleiner als die ursprünglichen (Fig. 17), was auf der erneuerten Teilung der letzteren beruht. Übrigens sind sie, wie auch an anderen Insektenmuskeln, von verschiedener Grösse, kleiner an den Körpermuskeln (siehe Textfigur) grösser an den Flügelmuskeln. Die besondere histologische Natur der Muskelkörnchen kommt auch darin zum Ausdruck, dass diese nur bei chromfixierten Präparaten in voller Deutlichkeit hervortreten. An mit Carnoy oder Formol fixierten Objekten lassen sie sich nur als Andeutungen nachweisen, welche kaum bemerkt werden dürften, wenn man nicht an mit Chromosmiumgemisch fixierten Objekten ihre Lage festgestellt hätte. Diese Eigenschaft teilen sie übrigens mit den meisten jener Plasmadifferenzierungen, welche unter dem Namen Mitochondrien in der Literatur Eingang gefunden haben. Ob ihre färbbare Substanz in letzter Linie aus den Kernen stammt, wie die Anhänger der Chromidialtheorie ohne Zweifel postulieren müssten, bleibt allerdings unbewiesen. Dafür spricht jedenfalls, dass gerade zur Zeit der Entstehung der Körnchen die meisten Kerne verhältnismässig arm an Chromatin erscheinen, ärmer, als man selbst nach ihrer intensivsten Teilungstätigkeit annehmen möchte. — Die schliessliche streng geordnete Lage der Körnchen tritt mit auffallender Schnelligkeit ein; welche Einflüsse hierbei mitwirken, müssen wir vorläufig unentschieden lassen, um auf einige andere mit der Muskelbildung in Zusammenhang stehende Fragen einzugehen.



Anlage eines Gliedmassenmuskels mit Körnchenbildung. Behandl. u. vergr. wie Fig. 15.

Zu den Derivaten des Sarkoplasmas zählt man gegenwärtig auch jene membranösen Gebilde, welche die Muskelbündel quer durchsetzen. Von diesen ist bekanntlich die sogenannte Grundmembran am bedeutendsten, welche, von dem Sarkolemma ausgehend, das Sarkoplasma quer durchzieht und an den Fibrillen die sogenannte Zwischenscheibe (Z) bildet. Diese Grundmembran, welche, wie der Name andeutet, als morphologische Grenze der kontraktilen Elementarteile der Muskelfibrille gilt, indem der Zwischenraum zwischen zwei Membranen als einzelnes Muskelelement betrachtet wird, wird wohl allgemein als wichtigste Leitungsbahn für den Stoffwechsel der kontraktilen Elementarteile des Muskels betrachtet. Bei unserem Objekte tritt dieses Gebilde, soweit es bis jetzt zu beobachten gewesen ist, erst verhältnismässig spät auf, wenn die Bildung von Fibrillen schon weit fortgeschritten und diejenige der Körnchen eingetreten ist. Sie erscheint

dann als eine schwache, kaum wahrnehmbare Lamelle, deren Lage mehr durch die um sie sich sammelnden Körnchen als durch eine selbständige deutliche Kontourierung verfolgt werden kann (Fig. 17). An älteren Muskeln tritt sie als deutlich hervortretendes Sarkoplasmagebilde hervor, dessen ganze Länge ausserhalb der kontraktilen Substanz oft durch Reihen von Körnchen markiert wird (Fig. 21), welche auch hier die ganze Bildung als Nahrungsbahn bezeichnen. Die erste Entstehung dieser zarten Membran ist dagegen schwer zu verfolgen. Von früheren Forschern haben MEVES [1]) und DUESBERG [2]) sowie HEIDENHAIN [3]) die Z-Membran der Fibrillen aus Mitochondrien hergeleitet, indem sie, wie oben gesagt, die ganze Fibrille aus Reihen von solchen Körnchen entstehen lassen, aus denen dann sowohl die kontraktilen Q-Scheiben wie die Z-Membran sich herausdifferenzieren sollen. Die Entstehung der sarkoplasmatischen Grundmembran ausserhalb der Fibrillen bleibt aber hierbei unaufgeklärt. Die allerjüngsten Stadien desselben sind zwar an unserem Objekte bis jetzt nicht zu entdecken gewesen, aber an etwas älteren, noch sarkoplasmareichen Muskeln tritt die Membran deutlich hervor und geht dann immer unmittelbar in das protoplasmatische Netzwerk über, welches, die Myoblastenkerne umspinnend, das alsdann noch reichliche Muskelplasma bis zum Sarkolemma durchzieht (Fig. 18). Es leidet darum auch kaum einen Zweifel, dass sie ein Derivat dieses Netzwerkes ist und im Zusammenhang mit ihm entsteht. Was die Z-Membran der Fibrillen anbetrifft, so sind zwar an gewissen Orten solche Gruppen von drei Körnchen, welche die genannten Forscher als Anlage zu den Grundelementen eines Muskelfaches deuten, nicht selten, da aber die Körnchen, wie wir gesehen haben, einen anderen Ursprung als die Fibrillen selbst haben, kann auch die Entstehung von Q oder Z, wenigstens in unserem Falle, nicht aus diesen Bildungen hergeleitet werden; sie scheinen übrigens einen mehr zufälligen Charakter zu haben, denn auch andere Kombinationen von Körnchen kommen ebenso oft vor. Das ganze Verhältnis zwischen Körnchen und Fibrillen soll unten noch einmal behandelt und dabei auch die Frage von der Grundmembran erörtert werden. Es verdienen aber noch einige von aussen stammende Einflüsse auf die Muskelbildung Aufmerksamkeit, besonders muss die Einwirkung der Tracheenverzweigungen betrachtet werden.

---

[1]) MEVES, Chondriosomen als Träger erblicher Anlagen. Archiv für mikr. Anatomie und Entw.-geschichte. Bd. 72, 1908.

[2]) DUESBERG, Les chondriosomes des cellules embryonaires du poulet &c. Archiv für Zellforschung. Bd. 4, 1910.

[3]) HEIDENHAIN, l. c., pag. 642.

Die Tracheenverzweigungen im Verhältnis zur Muskelbildung.

Über die Rolle der Tracheen bei der Muskelmetamorphose der Insekten liegen bisher nur die Angaben Breed's [1]) vor, welcher behauptet, dass die Myoblasten in der Tat Derivate von Tracheenzellen seien, ein Irrtum, der schon von Poyarkoff mit Recht verurteilt wurde. Sonst haben die Autoren, welche sich mit diesem Prozesse beschäftigt haben, das Verhältnis der Tracheenverzweigungen in den Muskeln gänzlich ignoriert. Dass die Tracheen und ihre Endapparate sowohl morphologisch wie physiologisch sehr bedeutungsvolle Bestandteile der Muskulatur der Insekten ausmachen, ist jedenfalls jetzt bewiesen durch Cajal [2]) und seine Schüler sowie auch durch Holmgren [3]). Die die Muskeln versorgenden Tracheenzweige endigen in der Tat in einer Anzahl den Muskelbündeln dicht aufliegender stark verzweigter Zellen, deren Verzweigungen ein Netzwerk bilden, welches die einzelnen Muskelfibrillen umspinnen. Die gröberen Maschen dieses Tracheennetzes sind noch kanalisiert, ihre feinsten Endverzweigungen sind aber kompakte Plasmagebilde, welche den Muskeln die für den Stoffumsatz nötige Oxydation vermitteln. Es fragt sich nun, wie sich diese Zellen bei der Muskelmetamorphose verhalten. Die Endverzweigungen im einzelnen bei der Histolyse der kontraktilen Substanz zu verfolgen ist schwierig, wenn nicht unmöglich, das Endergebnis aber ist, dass sie mitsamt den Fibrillen, welche sie versorgen, aufgelöst werden. Die Tracheenzellen selbst teilen natürlich ebenfalls das Schicksal des betreffenden Muskels: wird er ganz aufgelöst, dann gehen sie zu Grunde, wird er an Ort und Stelle erneuert, so nehmen sie daran Teil. Sie sind dann unter den Myoblasten durch ihre bedeutende Grösse und ihre unregelmässige Form sichtbar und zeichnen sich sonst durch chromatinreichen Kern und stark körniges Plasma aus (Fig. 8), sind aber ganz kompakt, da die Kanalisierung bei der Metamorphose der Tracheen schwindet. Auf den letztgenannten Prozess einzugehen ist hier nicht der Ort. Noch ehe die ersten Fibrillen angelegt werden, senden die Tracheenzellen unter den Myoblasten pseudopodienähnliche Ausläufer aus, welche ebenfalls solid sind, aber eine deutliche Körnchenmasse in ihrem Innern zeigen, was ihre schon da beginnende Bedeutung für den Stoffumsatz des Muskels beweist (Fig. 19). Die ersten Ausläufer verzweigen sich dann mehr und mehr, und mit ihrer Weiterentwicklung folgt dann auch eine erneute Kanalisierung ihres Plasmas (Fig. 20). Die Tracheenhauptstämme, welche

[1]) Breed, l. c., pag. 349 u. ff.

[2]) Ramon y Cajal, Coloration par la méthode de Golgi des terminaisons des trachées &c. dans les muscles des ailes des insectes. Zeitschr. für wiss. Mikroskopie, Bd. VII, 1890.

[3]) Holmgren, l. c. 1907.

diese Endausläufer aussenden, können natürlich auch nach den veränderten morphologischen Bedürfnissen der Imago ganz neue Zweige und damit auch neue Endzellen aussprossen lassen, durch welche neue Muskeln oder Teile von solchen versorgt werden.

Allgemeine Schlussfolgerungen.

Im Obenstehenden wurde der Versuch gemacht die verschiedenen Elemente, aus welchen der imaginale Muskel unseres Objektes aufgebaut ist, in ihrer Entwicklung zu verfolgen. Wir haben dabei gefunden, dass, nachdem die larvalen Fibrillen grösstenteils durch Autolyse geschwunden sind und die Kerne sich mit umgebendem Plasma zu Myoblasten differenziert haben, diese zu einem Syncytium zusammenfliessen, in welchem die neuen Fibrillen angelegt werden; wenn diese schon etwas fortgeschritten sind, entwickeln sich die mitochondrialen Körnchen und noch später die sarkoplasmatische Grundmembran. Hiermit wären nun die Hauptbestandteile des Muskels fertig gebildet, aber noch bleibt zu erklären, wie das Zusammenwirken zustande kommt, durch welches die Muskelarbeit hervorgebracht wird. Die bisher gelieferten, besonders an Vertebratenembryonen gemachten Beobachtungen der Muskelhistogenese lassen die Fibrillen ganz einfach aus Reihen von Mitochondrien hervorgehen, aus welchen die verschiedenen Querelemente der einzelnen Fibrille durch einfache Umwandlung gebildet würden. Im Gegensatz zu diesen Darstellungen stehen die vorliegenden Beobachtungen in völligem Einklang mit den neuesten Ergebnissen auf dem Gebiete der Histophysiologie der quergestreiften Muskulatur, nach welchen die „organischen Körner“ wie sie HOLMGREN in seiner letzten Abhandlung nennt, besondere Bestandteile neben den Fibrillen bilden und mit diesen die Bewegungen des gesamten Muskels bewirken. Die Fibrillen bleiben nach diesen Beobachtungen freilich wie früher das wirkliche kontraktile Element, aber die Körnchen, durch welche die Fibrillen mit Umsatzstoffen versorgt werden, bleiben ebenso integrierende Teile des Muskels wie diese. Die Bilder der Muskelelemente müssen allerdings gegenwärtig nach den benutzten Fixierungsmethoden betrachten werden: von alkoholischen und sauren Fixierungsmitteln werden die Körnchen aufgelöst und die verschiedenen Querelemente der Fibrille selbst, sowie auch die membranösen Plasmabildungen, nach ihrer verschiedenen physikalischen Dichtigkeit gefärbt, wodurch die geläufigen Bilder des quergestreiften Muskels entstehen; chromhaltige Fixierungen andererseits konservieren die Körner, heben aber die Eigenschaften der Fibrillen weit weniger hervor und liefern somit gewissermassen das Negative der ersteren Methode [1]). Durch diese Tatsache scheint

[1]) Cfr. HOLMGREN, l. c. 1907.

aber auch die verschiedenartige chemische Beschaffenheit der beiden Muskelbestandteile bewiesen zu werden, und ihre oben dargestellte, verschiedenartige Genese erscheint in diesem Lichte ganz natürlich. Doch auch die Fibrillen, sensu strictiori betrachtet, können nicht homogen gebaut sein, sondern müssen verschiedenartige Elemente enthalten: abwechselnd mit jenen Querscheiben, welche die Stoffe aus den Körnchen aufnehmen und durch diese die Arbeitsleistungen der Fibrille besorgen, kommen jene indifferenteren Elemente vor, welche bei der Arbeit mehr zurücktreten. Und diese Querstreifung tritt, wie oben gesagt, auch bei solchen Fixierungen auf, welche die Körnchenstoffe auflösen, und noch mehr, sie erscheint in den frühesten Bildungsstadien der Fibrillen, noch ehe die Körnchen gebildet sind, wenigstens andeutungsweise (siehe oben pag. 27), was wohl am bestimmtesten für die komplexe Zusammensetzung der Fibrillen spricht. Aber zur Funktionsfähigkeit der Fibrillen gehört noch die Mitwirkung der Körnchen, diese gehören ebenso notwendig zum quergestreiften Muskel wie jene.

Unter solchen Umständen ist es von Interesse das morphogenetische Auftreten der Körnchen, wie wir es oben gefunden haben, mit den histophysiologischen Veränderungen derselben, wie sie Holmgren beobachtet hat, zu vergleichen. Wir haben gesehen, dass die Körnchen zuerst in beträchtlicher Grösse und unregelmässiger Lage zwischen den Fibrillen auftreten, um sich dann durch Teilung zu vermehren und zu verkleinern und schliesslich ihre regelmässige Lage an den Fibrillen einnehmen. Vergleicht man aber mit diesem Prozesse den Vorgang, welcher zum postregenerativen Stadium Holmgrens führt, so findet man diesen dadurch charakterisiert, dass die Körnchen sich gänzlich an der Aussenseite der Fibrillen konzentrieren, um, wenn die Erschöpfung noch weiter geht, schliesslich zu grösseren, unregelmässigen Massen zusammenzufliessen [1]. In diesem Stadium entspricht die Lage der Körnchen und Fibrillen ziemlich derjenigen vor dem Anfang der Muskelfunktion bei unserem Objekte: der durch vollkommene Erschöpfung arbeitsunfähig gewordene Muskel kehrt also zu demselben Stadium zurück, auf welchem der junge Muskel vor dem Eintreten der Arbeitsfähigkeit stand. Das postregenerative Stadium ist also das morphogenetische älteste der vier Stadien der Muskeltätigkeit. Nach diesem Stadium muss dann das fakultative kommen, welches den Muskel zur Arbeit fähig macht, und hiernach folgen dann die wechselnden Kontraktions- und Regenerationsstadien des arbeitenden Muskels. Das Auftreten der Grundmembran muss unzweifelhaft mit den Stoffleitungsverhältnissen im Muskel in ein Kausalverhältnis gesetzt werden; die Beobachtungen früherer Forscher, welche diese Rolle der Grundmembran im vollausgebildeten Muskel ausser Zweifel stellen, wurden schon oben zitiert.

---

[1]) Holmgren, l. c. 1912, pag. 13. Mikrophot. I, Taf. 7.

Aus dem Zusammenwirken dieser dreier Bestandteile: Fibrillen, Körnchen und Grundmembran, geht nun der komplizierte Mechanismus des quergestreiften Muskels hervor. Wie man sich das Entstehen dieser kunstvollen Bildung phylogenetisch denken soll, bleibt schwer zu beantworten, solange die primitivsten Formen quergestreifter Muskulatur, wie sie z. B. bei gewissen Muskeln der Mollusken vorkommen, nicht nach modernen Methoden und Gesichtspunkten untersucht worden sind. Dass der quergestreifte, syncytiale Muskel aus der einfachen, glatten Muskelzelle hergeleitet werden muss, kann postuliert werden und wird schon allgemein angenommen, aber den Gang der Entwicklung zu rekonstruieren erscheint gegenwärtig sehr problematisch. Die rein vitalen Verhältnisse des Muskels sind durch die neuesten Untersuchungen auf denselben Typus des Stoffumsatzes zurückgeführt worden, wie er in anderen Geweben beobachtet worden ist: Stoffzufuhr in Form von granulären Substanzen und Verbrauch derselben zur mechanischen Arbeitsleistung; aber die Zusammensetzung der hierbei mitwirkenden Komponenten ist noch unaufgeklärt und hiermit auch der Weg der Entwicklung unbekannt geblieben. Dass die Verteilung der kontraktilen Elemente der quergestreiften Fibrille in Querfelder mit den allgemeinen, bei kontraktilen Substanzen unter gleichartigen Umständen geltenden mechanischen Gesetzen übereinstimmt, ist besonders von VLÈS [1]) hervorgehoben und sogar durch Experimente gewissermassen bestätigt worden, seine Theorie fehlt aber darin, dass er wiederum die Körnchenbildungen und damit den Stoffumsatz des Muskels ganz ausser Acht zu lassen scheint, wie er auch sonst die Muskeln zumeist von rein physikalischen Gesichtspunkten aus behandelt. Es ist anzunehmen, dass erst Fortschritte auf anderen Gebieten der Cytologie gemacht werden müssen, ehe man inbetreff der Geschichte der Muskelentwicklung überhaupt den richtigen Weg finden kann. Vielleicht hat HOLMGREN auch auf diesem theoretischen Gebiete das Richtige getroffen und den Weg für die Zukunft angedeutet, wenn er von Organellen spricht, aus welchen der Muskel zusammengesetzt sei. Es sind die Körnchen, die er hierbei vor allen Dingen hervorhebt, aber unwahrscheinlich ist es nicht, dass auch die Querscheiben der Muskelfibrille einmal als solche halb selbständige cytologische Elemente gelten werden, und dass aus einem Studium der verschiedenen Elemente des quergestreiften Muskels von diesem Gesichtspunkte neue Ergebnisse gewonnen werden können. Möglicherweise ist aus der ursprünglich glatten kontraktilen Fibrille unter Mitwirkung allgemeiner mechanischer Gesetze eine Reihe von Elementen sozusagen aktiver und passiver Art ausgebildet worden: die erstgenannten haben in sich die Eigenschaften der Kontraktilität weiter ausgebildet und sind hiermit auch mit einem aus Derivaten des Sarkoplasma gebildeten komplizierten Stoffumsatzappa-

[1]) Die Abhandlung von VLÈS, Propriétés optiques des muscles, Paris 1911, war mir nicht zugänglich. Ich zitiere nach PRENANT's Referat, l. c. V, pag. 110 u. ff.

rate in Verbindung getreten, während den letzterwähnten Fibrillenpartien die Rolle passiver Zwischensubstanz übertragen worden ist. Der Stoffumsatzapparat hat sich im Anschluss an die Entwicklung der aktiven Querscheiben aus teils mitochondrialen, teils membranösen Elementen des allgemeinen Zellplasmas entwickelt, und zwar in der Ordnung, dass zuerst die Körnchen als Nahrungsvermittler, dann die Grundmembranen als Leiter eines noch intensiveren Stoffumsatzes entstanden sind.

ERKLÄRUNG DER FIGUREN.

Sämtliche Figuren sind mit Hülfe von ABBE's Zeichenapparat mit einem ZEISS'schen Mikroskop bei 160 mm Tubuslänge und auf der Höhe des Objekttisches gezeichnet worden. Das Objektiv war dabei immer eine apochromatische Ölimmersion von 2 mm Brennweite; die Okulare waren abwechselnd Kompensationsokulare 4 und 6 und werden unten bei jeder Figur angegeben. Ebenso werden jedesmal Fixierung und Färbung erwähnt.

Fig. 1. Larve kurz vor der Verpuppung. Von Phagocyten angegriffenes Fragment eines Kopfmuskels. Ok. 6. CARNOY's Fixierung. Eisenalaun + Säurefuchsin Orange G.

Fig. 2. Ganz junge Puppe. Mit aufgenommenen Zellfragmenten gefüllte Phagocyten, zwischen zwei neugebildeten Flügelmuskelpartien. M Myoblasten, P Phagocyten in verschiedenen Entwicklungszuständen, T Trachee. Ok. 4. FLEMMING's Fixierung, Eisenalaunhämatoxylin.

Fig, 3. Dasselbe Exemplar wie Fig. 1. Umbildung eines Extremitätenmuskels. Rechts kontraktile Substanz mit sich umbildenden Kernen; links junge Myoblasten. Ok. 4. Behandl. wie Fig. 1.

Fig. 4. Dasselbe Exemplar wie Fig. 2. Partie eines degenerierenden Mandibularmuskels. L absterbende Larvenmuskelkerne verschiedenen Alters. M freie Myoblasten. Ok. 4, Färbung wie Fig. 2.

Fig. 5. Junge Puppe in der Larvenhaut. Teil eines degenerierenden Abdominalfussmuskels. F Reste des larvalen Muskelfibrillen. Ok. 4. CARNOY's Fixierung, Färbung wie Fig. 1.

Fig. 6. Dasselbe Exemplar wie Fig. 1. Teil eines Thoraxextremitätenmuskels während der Neubildung. Längsschnitt. Rechts neugebildete Myoblasten, links alte, noch nicht aufgelöste kontraktile Substanz, dazwischen Fragmente aufgelöster Muskelpartien. Ok. 4. Färbung wie Fig. 1.

Fig. 7. Dasselbe Exemplar wie Fig. 2. In Umbildung begriffene Partie eines Antennenmuskels mit Phagocyten und sich umbildenden Kerne (Längsschnitt). Behandl. u. Vergr. wie Fig. 2.

Fig. 8. Noch nicht ausgeschlüpfte Puppe. In Umbildung begriffener Thoraxextremitätenmuskel (Querschnitt). Links Myoblasten, rechts in Auflösung begriffene kontraktile Substanz. Tr Kerne von Tracheenzellen. Ok. 4, CARNOY's Fixierung. Färbung wie Fig. 1.

Fig. 9. Dasselbe Exemplar wie Fig. 8. In Umbildung begriffener Abdominalmuskel (Querschnitt) mit freien Myoblasten. Behandl. u. Vergr. wie Fig. 8.

Fig. 10. Dasselbe Exemplar wie Fig. 8. Tangentialschnitt durch einen in Neubildung begriffenen Kopfmuskel mit dicht aneinander geschlossenen Myoblasten. Behandl. u. Vergr. wie Fig. 8.

Fig. 11. Dasselbe Exemplar wie Fig. 5. Fibrillenbildung in einer Flügelmuskelanlage nach CARNOY'scher Fixierung. Färbung u. Vergr. wie Fig. 1.

Fig. 12. Dasselbe Exemplar wie Fig. 2. Dasselbe wie in voriger Fig. nach Flemming-Fixierung. Ok. 6. Färbung wie Fig. 2.

Fig. 13. Einen Tag alte Puppe. Fibrillenbildung in einer Flügelmuskelanlage. Vorgeschritteneres Stadium. Ok. 4. CARNOY's Fixierung. Färbung wie Fig. 1.

Fig. 14. Drei Tage alte Puppe. Längsschnitt eines jungen Thoraxmuskels. P primäre, S sekundäre Kerne. Ok. 4. CARNOY's Fixierung. Färbung wie Fig. 1.

Fig. 15. Dasselbe Präparat wie Fig. 2. Partie eines Flügelmuskels. Rechts junge Myoblasten, links Körnchenbildung. Ok. 6. Behandl. wie Fig. 2.

Fig. 16. Drei Tage alte Puppe. Abdominalmuskel mit Körnchenbildung. Ok. 6, Flemming-Fixierung. Färbung wie Fig. 2.

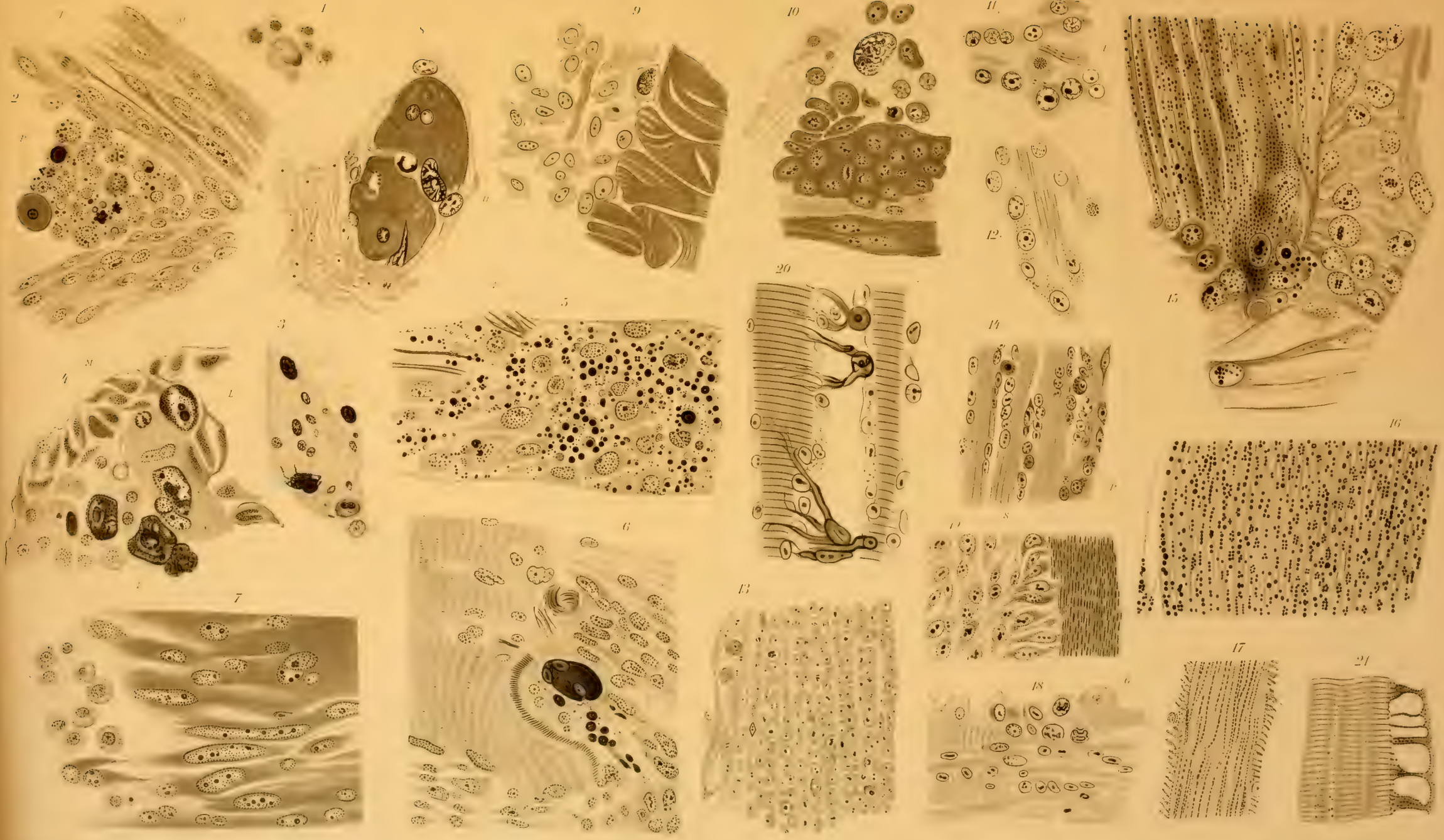
Fig. 17. Dasselbe Exemplar wie Fig. 16. Abdominalmuskel, Körnchen und Grundmembrananlagen. Behandl. u. Vergr. wie Fig. 15.

Fig. 18. Ganz junge Puppe. Abdominalmuskel mit Fibrillen und Grundmembran ausgebildet. Bei G Übergang der Grundmembran in das Filarnetzwerk des Sarkoplasmas. Ok. 4, CARNOY's Fixierung. Färbung wie Fig. 1.

Fig. 19. Dasselbe Exemplar wie Fig. 1. Flügelmuskelanlage. Bündel von verschiedenem Alter: in der Mitte Tracheenendzellen mit Ausläufern. Ok. 4. Färbung wie Fig. 1.

Fig. 20. Puppe von neun Tagen. Flügelmuskel mit Tracheenverzweigungen. Ok. 4. CARNOY's Fixierung, Toluidin-Erythrosin.

Fig. 21. Dasselbe Exemplar wie Fig. 2. Teil eines Abdominalmuskels im Kontraktionsstadium. Rechts Sarkoplasma mit Grundmembranen und Körnchenbildungen. Ok. 6. Behandl. wie Fig. 2.



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 2.

ÜBER DIE SCHWINGUNGSZAHLEN DER METALLMOLEKÜLE UND DIE ABSORPTION DES LICHTES IN METALLEN

VON

K. F. SLOTTE

HELSINGFORS 1914,
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT.

Über die Schwingungszahlen der Metallmoleküle und die Absorption des Lichtes in Metallen.

VON

K. F. SLOTTE [1]).

Unter Voraussetzung, dass die Molekularschwingungen eines einfachen festen Körpers geradlinig und einfach-harmonisch sind, ergibt sich für die Anzahl ganzer Schwingungen, die jedes Molekül eines solchen Körpers in der Zeiteinheit ausführt, die Formel:

$$N = \frac{U}{2\pi r}, \tag{1}$$

wo U die Maximalgeschwindigkeit des Moleküles und r die Schwingungsamplitude bezeichnet Wenn die in früheren Arbeiten hergeleiteten Ausdrücke für U und r hier eingesetzt werden, so ergibt sich mit 1 mm als Längeneinheit und 1 sec. als Zeiteinheit folgender Wert von N für die Gefriertemperatur des Wassers [2]):

$$N_0 = \frac{1166{,}8}{\lambda_0 b_0} \cdot \sqrt{\frac{(c_p)}{1 + 153\, b_1}}, \tag{2}$$

wo (c_p) die specifische Wärme des Körpers und λ_0 die Kante des Molekularwürfels bei der genannten Temperatur bezeichnet. Die Grössen b_0 und b_1 sind zwei auf die thermische Ausdehnung sich beziehende Koeffizienten. In der oben zitierten Arbeit habe ich u. A. die Werte von N_0 nach der Gleichung (2) für eine Reihe verschiedener Metalle berechnet [3]). Die Werte von λ_0 in mm wurden aus folgender von mir hergeleiteten Gleichung erhalten:

$$\lambda_0 = 3{,}02 \,.\, 10^{-8} \left(\frac{\mu}{s_0}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3}$$

Hierin bezeichnet μ das chemische Atomgewicht und s_0 das specifische Gewicht für 0° C.

[1]) Das Manuscript zu dieser Abhandlung, die der Verfasser nicht die Gelegenheit hatte bei Lebzeiten zu vollenden, ist nach dessen Tode laut seinem darauf notierten Wunsche von seiner Wittwe Frau Professor EMMY SLOTTE dem Secretär der Gesellschaft überliefert worden um in den Acta der Societät veröffentlicht zu werden. Die Zahlen in der Tafel S. 10 wurden vom letztgenannten nach den Formeln des Verfassers berechnet und dort eingetragen. Professor SUNDELL hat das Korrectur durchgesehen. A. D.

[2]) Molekularphysikalische Konstanten etc. Acta Soc. Scient. Fenn. XL, N:o 3, p. 6.

[3]) l. c. p. 8.

Man dürfte annehmen können, dass ein einfacher fester Körper vorzugsweise solche Etherschwingungen absorbiert, deren Schwingungszahl mit den Grundschwingungen seiner Moleküle übereinstimmt. Leider sind nur für wenige Metalle zuverlässige Beobachtungen über die Absorption des Lichtes vorhanden. Wir wollen hier nur diejenigen von HAGEN und RUBENS [1]) in Betracht nehmen. Unter den von ihnen untersuchten Metallen zeigen nur drei, nämlich Silber, Kupfer und Gold, deutliche Maxima der Absorption. Die aus der Gleichung (2) sich ergebenden Werte von N_0 für diese drei Körper sind die folgenden:

	N_0 nach (2)
Silber	$= 251 . 10^{12}$
Kupfer	$= 475 . 10^{12}$
Gold	$= 257 . 10^{12}$

Nach HAGEN und RUBENS [2]) ist die Absorptionskonstante des Silbers ein Maximum für die Wellenlänge 0,0012 mm und die entsprechende Schwingungszahl ist $250 . 10^{12}$, welche Zahl fast genau mit dem von mir berechneten Werte von N_0 zusammenfällt. Dieses nahe Zusammenfallen könnte wohl ein Zufall sein, ist aber jedenfalls sehr bemerkenswert, besonders weil auch für andere Körper ähnliche wenn auch nicht so genaue Übereinstimmungen vorkommen. Ein kleineres Maximum der Absorptionskonstante für das genannte Metall existiert bei einer Wellenlänge von etwa 0,00025 mm, und aus den Versuchen derselben Forscher über das Reflexionsvermögen der Metalle [3]) ergibt sich für das Silber ein scharfes Minimum des Reflexionsvermögens bei der Wellenlänge 0,000316 mm. Dem zweiten Absorptionsmaximum des Silbers entspricht somit eine Wellenlänge, die nahe $\frac{1}{4}$ der Wellenlänge des Hauptmaximums ist

Dieses zweite Absorptionsmaximum des Silbers scheint somit einer Oberschwingung zu entsprechen.

Die Absorptionskonstante des Kupfers haben die genannten Forscher nicht bestimmt. Aus ihren Versuchen über die Reflexion scheint aber hervorzugehen, dass für dieses Metall ein schwaches Minimum des Reflexionsvermögen existieren würde bei einer Wellenlänge, die zwischen 0,000288 mm und 0,000326 mm fällt. Dem von mir berechneten Werte von N_0 für Kupfer entspricht die Wellenlänge 0,000632 mm. Diese Wellenlänge ist somit ungefähr das zweifache der Wellenlänge, bei welcher nach HAGEN und RUBENS ein Minimum des Reflexionsvermögens vorhanden ist.

Was endlich dem Golde anbetrifft, so entspricht der von mir berechneten Schwingungszahl $257 . 10^{12}$ eine Wellenlänge von etwa 0,00117 mm. Nach HAGEN und RUBENS hat das letztgenannte Metall ein Maximum der Absorption für die Wellenlänge 0,002 mm und ein schwächeres Maximum für die Wellenlänge 0,000357 mm. Ein Minimum der Reflexion fanden sie bei der Wellenlänge 0,000385 mm. Dieser Wellenlänge entspricht die Schwingungszahl $779 . 10^{12}$, welche sehr nahe das 3-fache des von mir erhaltenen Wertes von N_0 ist und somit als eine Oberschwingungszahl aufgefasst werden kann.

[1]) Ann. d. Physik, 1900, 1902 (zwei Abhandlungen) und 1903.

[2]) Ann. d. Physik, 8, p. 446.

[3]) l. c. p. 16.

Auch für Platin haben die oben genannten Forscher die Absorptionskontante für verschiedene Wellenlängen bestimmt. Bei diesem Körper erkennt man im allgemeinen eine Abnahme der Konstante mit zunehmender Wellenlänge. Nur zwischen den Wellenlängen 0,00055 und 0,0007 mm scheint ein schwaches Maximum oder eine Stagnation der Abnahme vorhanden zu sein. Die entsprechenden Schwingungszahlen sind $545 . 10^{12}$ und $429 . 10^{12}$. Ich habe für dieses Metall

$$N_0 = 414 . 10^{12}$$

gefunden.

Die Werte von N_0, die wir in der oben zitierten Arbeit für verschiedene Metalle berechnet haben, sind unter der einfachen Voraussetzung erhalten, dass alle Moleküle einatomig seien. Wenn aber einige Moleküle einatomig, andere dagegen zwei- oder mehratomig sind, so müssen wir die Schwingungszahlen der einatomigen von denen der zweiatomigen unterscheiden und dann können die erhaltenen Werte von N_0 im allgemeinen weder mit den Schwingungszahlen der einatomigen, noch mit denen der zweiatomigen Moleküle genau zusammenfallen.

Wir haben in der oben genannten Arbeit den Fall speziell behandelt, wo der Körper nur zwei Arten von Molekülen, nämlich einatomige und zweiatomige enthält. Wir werden auch hier dieselbe Voraussetzung machen und bezeichnen die Anzahl der zweiatomigen Moleküle auf 100 Atome des Körpers mit n. Dann ist ist die Anzahl der einatomigen Moleküle auf 100 Atome des Körpers $100 - 2n$, und wenn die Masse eines einatomigen Moleküles mit m_1, das chemische Atomgewicht mit μ, die mittlere Molekularmasse mit $\bar{m}$, das mittlere Molekulargewicht mit $\bar{\mu}$ bezeichnet wird, so ist

$$(\alpha) \qquad \frac{\bar{m}}{m_1} = \frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{100}{100 - n} .$$

Für den molekularen Druck auf die Flächeneinheit eines einfachen festen Körpers haben wir früher, unter Voraussetzung, dass nur einatomige Moleküle mit der Masse m vorhanden sind, folgenden Ausdruck hergeleitet:

$$(\beta) \qquad P = \varepsilon \cdot \frac{m U^2}{4 r \lambda^2} .$$

Hier ist ε eine von der Schwingungsform abhängige Konstante, U die Maximalgeschwindigkeit eines Moleküles, r die Schwingungsamplitude und λ die Kante des Molekularwürfels. Wenn nun in einem und demselben Körper, dessen Temperatur und physische Beschaffenheit in allen Punkten dieselbe ist, zwei Arten von Molekülen vorhanden sind, so müssen wir annehmen, dass der Wert von P für beide Arten von Molekülen derselbe ist, denn sonst könnte inneres Gleichgewicht im Körper nicht bestehen. Wir können auch annehmen, dass der Wert von ε für beide Arten von Molekülen derselbe ist, müssen aber für die übrigen Grössen in der Gleichung (β) verschiedene Werte für die beiden verschiedenen Arten von Molekülen voraussetzen.

Indem wir annehmen, dass die Temperatur des Körpers die Gefriertemperatur des Wassers ist, bezeichnen wir die Werte von m, U, r und λ für die einatomigen Moleküle mit

m_1, U_1, r_1, λ_1, für die zweiatomigen mit m_2, U_2, r_2 und λ_2. Da die Werte von P und ε für beide Arten von Molekülen dieselben sind, so haben wir dann auf Grund der Gleichung (β):

$$(\gamma) \qquad \frac{m_1 U_1^2}{r_1 \lambda_1^2} = \frac{m_2 U_2^2}{r_2 \lambda_2^2}.$$

Weil aber die Temperatur für alle Moleküle dieselbe ist, müssen wir auch

$$(4) \qquad m_1 U_1^2 = m_2 U_2^2$$

annehmen [1]). Aus der Gleichung (γ) ergibt sich dann:

$$(5) \qquad r_1 \lambda_1^2 = r_2 \lambda_2^2 .$$

Es wird ferner notwendig auch für den Wärmeausdehnungskoeffizienten der einatomigen Moleküle einen anderen Wert anzunehmen als für denjenigen der zweiatomigen. Bezeichnen wir den mittleren linearen Ausdehnungskoeffizienten der einatomigen Moleküle zwischen dem absoluten Nullpunkte und der Gefriertemperatur des Wassers mit β_1, dieselbe Grösse für die zweiatomigen Moleküle mit β_2 und die absolute Temperatur für den Gefrierpunkt des Wassers mit T_0, so haben wir in Übereinstimmung mit den in unseren früheren Arbeiten gemachten Annahmen:

$$(6) \qquad r_1 = \frac{\lambda_1 \beta_1 T_0}{2},$$

$$(6\,a) \qquad r_2 = \frac{\lambda_2 \beta_2 T_0}{2}.$$

Werden diese Werte von r_1 und r_2 in die Gleichung (5) eingesetzt, so erhalten wir:

$$(7) \qquad \lambda_1^3 \beta_1 = \lambda_2^3 \beta_2 .$$

Wenn die Dichte des Körpers bei der in Frage stehenden Temperatur mit d_0 bezeichnet wird, so dürfen wir ferner:

$$(a) \qquad m_1 = \lambda_1^3 d_0 , \; m_2 = \lambda_2^3 d_0$$

setzen. Wir haben aber:

$$(b) \qquad m_2 = 2 m_1 .$$

Aus den Gleichungen (a) bekommen wir dann auch:

$$(8) \qquad \lambda_2^3 = 2 \lambda_1^3 .$$

Wenn dieser Wert von λ_2^3 in (7) eingesetzt wird, so ergibt sich:

$$(9) \qquad \beta_1 = 2 \beta_2 .$$

Wenn wir die Gleichungen (6) dividieren, so erhalten wir:

$$(c) \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

[1]) Vgl. „Molekular-physikalische Konstanten“, p. 11.

Aus (8) ergibt sich aber

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$$

und aus (9)

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 2 .$$

Wenn diese Werte in (c) eingesetzt werden, so finden wir

(d) $$\frac{r_1}{r_2} = 2^{\frac{2}{3}} = 1{,}587 .$$

Wenn wir auch hier voraussetzen, dass die Molekularschwingungen geradlinig und einfach-harmonisch sind $\left(\varepsilon = \frac{2}{\pi}\right)$, und mit N_1 die Schwingungszahl der einatomigen, mit N_2 diejenige der zweiatomigen Moleküle bezeichnen, haben wir:

(10) $$\left| \begin{array}{l} N_1 = \dfrac{U_1}{2\pi r_1} . \\ N_2 = \dfrac{U_2}{2\pi r_2} . \end{array} \right.$$

Dann erhalten wir:

(e) $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

Aus den Gleichungen (4) und (b) ergibt sich aber:

(f) $$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1{,}414} .$$

Wenn wir die Werte von $\frac{U_2}{U_1}$ und $\frac{r_1}{r_2}$ aus (f) und (d) in (e) einsetzen, so finden wir:

(g) $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1{,}587}{1{,}414} = 1{,}122 = 2^{\frac{1}{8}}$$

Die Schwingungszahl der zweiatomigen Molenküle wäre hiernach 12,2 % grösser als diejenige der einatomigen, welches Ergebnis etwas überraschend ist, aber darin seine Erklärung findet, dass die Schwingungsamplitude r_1 der einatomigen Moleküle, weil $U_1^2 = 2\,U_2^2$ ist, bedeutend grösser sein muss als diejenige der zweiatomigen.

Unter der hier gemachten Voraussetzung, dass ein einfacher fester Körper aus ein- und zweiatomigen Molekülen besteht, bezeichnet die in der Gleichung (1) vorkommende Grösse U_0 eine mittlere Geschwindigkeit, welche durch folgende Gleichung definiert wird:

(11) $$\overline{\mu}\, U_0^2 = \mu\, U_1^2 = 2\mu\, U_2^2$$ [1]).

[1]) Vgl. Molekular-physikalische Konstanten, p. 10.

Aus (11) erhalten wir:

$$U_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\mu}} \cdot U_1 = \frac{\sqrt{100-n}}{10} \cdot U_1 \tag{12}$$

und

$$U_0 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\mu}{\mu}} \cdot U_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{100-n}}{10} \cdot U_2 . \tag{12 a}$$

Für die Grösse r_0, welche auch in der Gl. (1) vorkommt, gilt der Ausdruck:

$$r_0 = \frac{\lambda_0 b_0 T_0}{2} . \tag{13}$$

Der Wert von λ_0 erhalten wir aus der Gleichung (3). Diese Grösse bezieht sich somit nur auf einatomige Moleküle. Die Grösse b_0 ist der mittlere lineare Ausdehnungskoeffizient zwischen dem Gefrierpunkte des Wassers und dem absoluten Nullpunkte[1]). Wenn wir aber einen Körper in Betracht ziehen, der aus ein- und zweiatomigen Molekülen mit verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten zusammengesetzt ist, so wird b_0 ein mittlerer Wert dieser beiden Koeffizienten, welcher in folgender Weise bestimmt wird.

Bezeichnen wir das Volumen, welches 100 Atome des Körpers bei 0° C einnehmen, mit v_0, so ist

$$v_0 = (100 - 2n)\,\lambda_1^3 + n\,\lambda_2^3 .$$

Da aber $\lambda_2^3 = 2\,\lambda_1^3$ ist, so erhalten wir einfach:

$$v_0 = 100 \cdot \lambda_1^3 .$$

Wenn der Körper von 0° C. bis zum absoluten Nullpunkte abgekühlt wird. so vermindert sich das Volumen v_0 mit dem Betrage:

$$v_0 \cdot 3\,b_0 \cdot T_0 = 100\,\lambda_1^3 \cdot 3\,b_0 \cdot T_0 . \tag{h}$$

Für dieselbe Volumenverminderung erhalten wir aber auch den Ausdruck:

$$(100 - 2n)\,\lambda_1^3 \cdot 3\,\beta_1 \cdot T_0 + n \cdot \lambda_2^3 \cdot 3\,\beta_2 \cdot T_0 = (100 - n) \cdot \lambda_1^3 \cdot 3\,\beta_1 \cdot T_0 . \tag{i}$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (h) und (i) erhalten wir:

$$100\,b_0 = (100 - n)\,\beta_1$$

und

$$b_0 = \frac{100 - n}{100} \cdot \beta_1 . \tag{14}$$

[1]) Man hat nämlich $b\,T = b_0 T_0 + b'\,t$, und wenn man hier $T = 0$, $t = -T_0$ einsetzt, so ergibt sich: $b_0 = b'$. Die letztgenannte Grösse ist aber der mittlere lineare Ausdehnungskoeffizient zwischen 0° C. und t.

Auf Grund der Gleichung (9) erhalten wir dann auch:

(14 a) $$b_0 = \frac{100 - n}{50} \cdot \beta_2 .$$

Wenn wir den Ausdruck für b_0 aus (14) in (13) einsetzen, so finden wir:

(15) $$r_0 = \frac{100 - n}{100} \cdot \frac{\lambda_0 \beta_1 T_0}{2}$$

oder auf Grund der Beziehung (6), da $\lambda_0 = \lambda_1$ ist:

(15 a) $$r_0 = \frac{100 - n}{100} \cdot r_1 .$$

Wenn die Ausdrücke für U_0 und r_0 aus (12) und (15 a) in Gleichung (1) eingesetzt werden, so ergibt sich:

(16) $$N_0 = \frac{\sqrt{100 - n}}{10} \cdot \frac{100}{100 - n} \cdot \frac{U_1}{2 \pi r_1} = \frac{10}{\sqrt{100 - n}} \cdot N_1 .$$

Auf Grund der Beziehung (9) erhalten wir auch aus (15):

(15 b) $$r_0 = \frac{100 - n}{50} \cdot \frac{\lambda_0 \beta_2 T_0}{2} .$$

Da aber

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2^{\frac{1}{3}}}$$

ist, so finden wir mit Hülfe von (6 a):

(15 c) $$r_0 = \frac{100 - n}{50 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\lambda_2 \beta_2 T_0}{2} = \frac{100 - n}{50 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \cdot r_2 .$$

Wenn wir wieder die Werte von U_0 und r_0 aus (12 a) und (15 c) in (1) einsetzen, so ergibt sich:

(17) $$N_0 = \frac{\sqrt{100 - n}}{10} \cdot \frac{50 \cdot 2^{\frac{5}{6}}}{100 - n} \cdot \frac{U_2}{2 \pi r_2} = \frac{5 \cdot 2^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{100 - n}} \cdot N_2 .$$

Aus den Gleichungen (17) und (16) erhalten wir:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{10}{5 \cdot 2^{\frac{5}{6}}} = 2^{\frac{1}{6}}$$

oder genau denselben Wert, welchen wir früher gefunden haben [Gleichung (g)].

Aus den Gleichungen (16) und (17) ergibt sich zur Berechnung von N_1 und N_2 mit Kenntnis von n und N_0:

(18) $$N_1 = \frac{\sqrt{100 - n}}{10} \cdot N_0 ,$$

(19) $$N_2 = \frac{\sqrt{100 - n}}{5 \cdot 2^{\frac{5}{6}}} \cdot N_0 = \frac{\sqrt{100 - n}}{8{,}9} \cdot N_0 .$$

Da die Grösse n für die meisten Körper zwischen 15 und 25 fällt, so geht aus der Gleichung (19) hervor, dass N_2 im allgemeinen von N_0 nicht viel verschieden sein kann.

In der oben zitierten Arbeit „Molekular-physikalische Konstanten etc." haben wir die Werte von U_0 für eine Reihe verschiedener Metalle berechnet. Mit Kenntnis von μ haben wir ferner auch die entsprechenden Werte der Grösse:

$$U_0 \sqrt{\mu} = A \tag{20}$$

berechnet. Wenn man 1 m als Längeneinheit und 1 sec als Zeiteinheit annimmt, so ist nach unserer Theorie

$$U_0 \sqrt{\mu} = 2609\ ^{1}). \tag{21}$$

Wird Gleichung (21) mit Gl. (20) dividiert, so ergibt sich:

$$\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\mu}} = \frac{2609}{A} = k. \tag{22}$$

Mit Kenntnis der Grösse k finden wir dann die entsprechenden Werte der Grössen $\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{100}{100 - n}$ und n nach den Formeln:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{100}{100 - n} = k^2 \tag{23}$$

und

$$n = \frac{100\,(k^2 - 1)}{k^2}. \tag{24}$$

Für die in (18) und (19) vorkommende Grösse $\sqrt{100 - n}$ erhalten wir

$$\sqrt{100 - n} = \frac{10}{k}. \tag{25}$$

Die Werte von A, die nach (22) und (24) berechneten Werte von k und n und die aus (18) und (19) sich ergebenden Werte von N_1 und N_2 für die Metalle, für welche wir oben die Absorption des Lichtes diskutiert haben, sind in der untenstehenden Tabelle zusammengestellt.

	A	k	n	$10^{-12} N_0$	$10^{-12} N_1$	$10^{-12} N_2$
Silber	2319	1·125	21	251	223	250
Kupfer	2245	1·162	26	475	409	459
Gold	2391	1·091	16	257	236	264
Platin	2405	1·085	15	414	382	428

[1]) l. c. p. 10.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 3.

NOTE SUR LE PROBLÈME ISOPÉRIMÉTRIQUE

PAR

J. W. LINDEBERG

HELSINGFORS 1915.
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ DE LITTÉRATURE FINNOISE.

Soient $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$ des fonctions données des variables x, y, y', analytiques et régulières pour chaque système de valeurs de ces variables que nous aurons à considérer. Nous allons envisager le problème de trouver l'extremum de l'intégrale

$$I_0 = \int f_0 \, dx$$

dans un champ comprenant toutes les lignes joignant deux points fixes et donnant aux intégrales

$$I_1 = \int f_1 \, dx, \quad I_2 = \int f_2 \, dx, \cdots, \quad I_n = \int f_n \, dx$$

des valeurs déterminées.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ des nombres fixes, d'ailleurs quelconques, c une extrémale relative à la fonction

$$f = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

P_0 un point fixe de c, $\bar{P}$ le foyer conjugué de P_0 sur c relatif à notre problème, et $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$ les $n+1$ premiers foyers conjugués de P_0 sur c relatifs au problème de l'extremum libre de l'intégrale

$$I = \int f \, dx.$$

Nous supposerons vérifiées les hypothèses suivantes:

1) La courbe c n'est extrémale par rapport à aucune combinaison linéaire des fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_n$.

2) Les foyers $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ existent tous.

3) La condition de Legendre relative à la fonction f est remplie au sens strict depuis P_0 jusqu'à P_{n+1}, limites comprises.

Dans ces conditions nous montrerons que *le foyer $\bar{P}$ existe toujours et ne peut jamais se trouver au delà du point P_{n+1}.*

Dans notre Mémoire „Sur les maxima et minima d'une fonction de deux intégrales définies“ *) nous avons déjà démontré ce théorème pour le cas $n=1$; la théorie de la variation seconde va nous conduire très facilement au théorème général.

Désignons par x_i, y_i les coordonnées du point P_i, et soit $y=y(x,\mu)$ l'équation de l'extrémale relative à la fonction f qui passe par le point P_0 et dont la tangente a en ce point μ pour coefficient angulaire. Soit encore μ_0 la valeur de μ qui correspond à la courbe c, et posons

$$z=\frac{\partial y}{\partial \mu}(x,\mu_0).$$

Désignons par $\delta I_{r,i}$ la variation première de l'intégrale

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_r\,dx$$

correspondant à la variation $\delta y=z$ de y; choisissons enfin des nombres $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$ qui ne soient pas tous nuls, de telle manière qu'on ait

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i\,\delta I_{r,i}=0$$

pour $r=1, 2, \cdots, n$, ce qui est évidemment toujours possible. Nous appellerons z la fonction de x qui, dans chaque intervalle $x_{i-1}\leq x\leq x_i$, coïncide avec la fonction $k_i z$.

D'après la manière même dont nous avons déterminé les nombres $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$, il est évident que, si la variation δy de y est égale à z, les variations premières des intégrales $I_1, I_2, \cdots, I_n$ prises entre les limites x_0 et x_{n+1} seront toutes nulles. En vertu de notre hypothèse 1) on peut donc trouver une famille de courbes à un paramètre

$$y=\bar{y}(x,\alpha),$$

joignant les points P_0 et P_{n+1} et comprenant la courbe c, telle que, α_0 étant la valeur de α qui correspond à la courbe c, on ait

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha}(x,\alpha_0)=\bar{z},$$

et que les intégrales $I_1, I_2, \cdots, I_n$ prises suivant ces courbes entre les limites x_0 et x_{n+1}, gardent des valeurs constantes.

Considérons la variation seconde $\delta^2 I$ de l'intégrale I prise suivant la courbe $y=\bar{y}(x,\alpha)$ entre les limites x_0 et x_{n+1}. Malgré les discontinuités que peut présenter la dérivée de δy $(=\bar{z})$ pour $x=x_1, x_2, \cdots, x_n$, on voit facilement que la variation $\delta^2 I$ est donnée par l'intégrale

*) Acta Soc. Sc. Fennicae t. XLIV, p. 12.

$$\int_{x_0}^{x_{n+1}} \delta y\, \delta \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) dx.$$

et, puisque la fonction à intégrer est identiquement nulle, il en résulte donc

$$\delta^2 I = 0.$$

Or, en vertu de notre hypothèse 3), l'existence d'une famille de courbes ayant les propriétés précédentes serait impossible s'il n'y avait pas de foyer P ou si ce foyer se trouvait au delà du point P_{n+1}. Le théorème que nous avons énoncé est donc démontré.

On peut donner à ce théorème une autre forme.

Considérons le problème de l'extremum libre de l'intégrale I_0, et soient c une extrémale relative à la fonction f_0, P_0 un point fixe de c et P_1, P_2, $\cdots$, P_{n+1} les $n+1$ premiers foyers conjugués de P_0 sur c. Supposons enfin la condition de Legendre remplie au sens strict sur c entre P_0 et P_{n+1}, limites comprises.

Soit P' un point mobile de c. Pour que l'arc $P_0 P'$ de c fournisse un extremum, il faut que P' se trouve à gauche de P_1 (ou en ce point). Mais si l'on restreint le champ des lignes variées par des conditions convenables, l'intervalle dans lequel doit rester P' pour que l'extremum ait lieu peut devenir plus large. Le théorème que nous venons de démontrer est équivalent à l'énoncé suivant:

Quelles que soient les fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_n$, à la seule condition que c ne soit pas une extrémale par rapport à une combinaison linéaire de ces fonctions, si l'on impose aux courbes variées la condition de donner aux intégrales

$$\int f_1\, dx, \quad \int f_2\, dx, \quad \cdots, \quad \int f_n\, dx$$

les mêmes valeurs que l'arc $P_0 P'$ de l'extrémale c, le segment de c sur lequel peut varier P' sans que l'extremum cesse d'avoir lieu ne s'étend jamais au delà du point P_{n+1}.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI N:o 4.

SUR UN PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'ANALYSE

ET SES APPLICATIONS A

LA THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

PAR

ERNST LINDELÖF

(PRÉSENTÉ LE 17 MAI 1915)

HELSINGFORS 1915
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ DE LITTÉRATURE FINNOISE

Introduction.

On sait depuis longtemps que l'intérieur d'un domaine simplement connexe, dont la frontière comprend plus d'un point, peut être représenté d'une manière conforme sur l'intérieur d'un cercle, mais ce n'est que dans ces derniers temps qu'on est arrivé à traiter d'une manière générale le problème relatif à la correspondance entre les frontières des deux domaines[1]).

Dans une Note récente[2]) nous avons montré que cette dernière question peut être rattachée au principe classique suivant lequel le module d'une fonction monogène qui est régulière dans un domaine donné atteint toujours sa plus grande valeur sur la frontière de ce domaine. Toutefois il nous était nécessaire, dans cette courte Note, de nous borner au cas d'un domaine limité par une ligne simple fermée, du genre de celles qui ont fait l'objet des recherches de M. Camille Jordan[3]).

Dans le présent Mémoire nous allons reprendre le problème dont il s'agit dans toute sa généralité, et nous allons faire voir que le principe élémentaire dont nous venons de parler permet d'établir très facilement les résultats obtenus jusqu'ici, et de les préciser et compléter sur certains points.

La première partie de notre Mémoire renferme différentes applications analytiques du principe en question, ainsi que certains théorèmes qui s'y rattachent, mais dont la démonstration exige l'emploi de la fonction modulaire. Dans la seconde partie nous appliquerons les résultats obtenus à la théorie de la représentation conforme.

---

[1]) *Voir* à ce sujet:

C. Carathéodory: *Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis* (Mathematische Annalen, t. 73, 1913). *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete* (ibidem).

E. Study: *Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche* (B.-G. Teubner, 1913).

P. Koebe: *Ränderzuordnung bei konformer Abbildung* (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1913). Les résultats résumés dans cette Note ont été développés dans un travail intitulé *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung* (Journal de Crelle, t. 145, p. 177—223), qui a paru après que nous avions achevé la rédaction de notre Mémoire.

W.-F. Osgood and E.-H. Taylor: *Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition* (Transactions of the American Mathematical Society, t. 14, 1913).

[2]) Ernst Lindelöf: *Sur la représentation conforme* (Comptes rendus, t. 158, 26 janvier 1914).

[3]) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, tome I, 2e édition, pages 90—100.

I. Quelques théorèmes d'Analyse.

1. Dans ce Mémoire nous aurons à nous servir du principe auquel nous venons de faire allusion sous la forme précise que voici:

PRINCIPE FONDAMENTAL. — *Soient dans le plan de la variable complexe z un domaine fini simplement connexe, T, et une fonction monogène, $f(z)$, régulière à l'intérieur de ce domaine et vérifiant pour tout point ξ de son contour la condition suivante:*

(A) *Le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on le veut, l'inégalité*

$$|f(z)| < M + \varepsilon,$$

où M désigne une constante positive, est vérifiée dès que le point z, restant à l'intérieur de T, se trouve dans un voisinage suffisamment restreint du point ξ.

Dans ces conditions on aura en tout point z pris à l'intérieur du domaine T

$$|f(z)| \leqq M, \tag{1}$$

le signe d'égalité ne pouvant d'ailleurs se présenter que dans les cas où la fonction $f(z)$ se réduit à une constante.

Rappelons en quelques mots la démonstration de ce principe.

Soit G la limite supérieure du module $|f(z)|$ dans le domaine T. Par un raisonnement bien connu, on démontre qu'il existe, à l'intérieur ou sur la frontière de T, au moins un point P tel que la limite supérieure de $|f(z)|$ soit égale à G dans la portion de T comprise dans un cercle quelconque ayant ce point comme centre.

Admettons d'abord qu'il n'existe pas de ces points P à l'intérieur de T, où l'on aura par suite $|f(z)| < G$. La frontière de T comprend alors au moins un point tel que P, et l'hypothèse (A) nous montre dès lors qu'on a $G < M$. Dans ce cas on aura donc $|f(z)| < M$ pour tout point z pris à l'intérieur du domaine T.

Supposons maintenant qu'il y ait à l'intérieur de T un point tel que P, et soit z_0 son affixe et r_0 sa plus courte distance de la frontière de T. Puisque la fonction $f(z)$ est continue au point z_0, on aura d'abord $|f(z_0)| = G$. D'autre part, en faisant $z - z_0 = re^{i\varphi}$ $(r < r_0)$, la formule de CAUCHY nous donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

d'où il suit

$$G \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Puisque $|f(z_0 + re^{i\varphi})|$ ne saurait dépasser la valeur G pour aucune valeur φ, on aura nécessairement $|f(z_0 + re^{i\varphi})| = G$ pour $0 < \varphi < 2\pi$, sans quoi le second membre serait inférieur à G. Donc le module $|f(z)|$ conserve une valeur constante dans le cercle $|z - z_0| < r_0$, et il s'ensuit

que la fonction $f(z)$ se réduit elle-même à une constante. En vertu de l'hypothèse (A), la valeur absolue de cette constante est $\leq M$, et l'on aura donc bien $|f(z)| \leq M$ à l'intérieur du domaine donné.

2. Dans un travail publié en commun avec M. PHRAGMÉN [1]), nous avons donné différentes extensions du principe qui précède. Nous rappellerons ici la plus simple de ces extensions, qui nous permettra dans la suite d'abréger certaines démonstrations.

La fonction $f(z)$ étant toujours régulière dans le domaine T, supposons que l'hypothèse (A) *soit vérifiée pour les points ξ situés sur la frontière de ce domaine, sauf peut-être pour un nombre fini de ces points, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.*

Admettons en outre que le module $|f(z)|$ reste dans T au-dessous d'une limite finie M'.

Dans ces conditions, le résultat (1) *aura encore lieu en tout point z pris à l'intérieur du domaine donné.*

Puisque le domaine T est fini, le module du produit $(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_n)$ y aura un maximum fini K. Posons

$$\Phi(z) = \frac{1}{K}(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_n)$$

et considérons l'expression

$$F(z) = \Phi(z)^\sigma f(z),$$

σ étant une constante positive.

Comme $|\Phi(z)| \leq 1$ dans le domaine T, on y aura $|F(z)| \leq |f(z)|$. En vertu de nos hypothèses, l'inégalité $|F(z)| < M + \varepsilon$ sera donc vérifiée dans un voisinage suffisamment restreint d'un point quelconque situé sur la frontière de T, excepté peut-être les points ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$. Mais en ces points $\Phi(z)$ s'annule, et, puisque par hypothèse $|f(z)| < M'$ dans T, l'inégalité précédente aura donc lieu aussi dans un voisinage suffisamment restreint de l'un quelconque de ces points.

Le principe fondamental nous apprend dès lors qu'on a à l'intérieur de T

$$|F(z)| \leq M \quad \text{ou bien} \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|\Phi(z)|^\sigma},$$

et, comme cette conclusion reste vraie quelque petit que soit σ, il faut bien que le résultat (1) ait lieu dans T.

3. Voici maintenant dans quelles conditions nous allons nous servir du principe fondamental.

Soit Ω un domaine fini, limité par une seule ligne simple fermée [2]) C, et soit $f(z)$ une

---

[1]) E. PHRAGMÉN et ERNST LINDELÖF: *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (Acta Mathematica, t. 31).

[2]) Nous dirons qu'un ensemble de points constitue *une ligne simple,* s'il existe une correspondance bi-univoque et continue entre les points de cet ensemble et ceux d'un arc de cercle. Un ensemble de points

fonction monogène, régulière à l'intérieur de ce domaine et vérifiant en outre les conditions suivantes:

1° Elle est *bornée* dans le domaine Ω, c'est-à-dire que son module $|f(z)|$ y reste au-dessous d'une limite finie M.

2° Si le point z du domaine Ω est suffisamment rapproché de certains arcs (γ) du contour C, le module $|f(z)|$ vérifie l'inégalité plus étroite

$$|f(z)|<\sigma,$$

σ désignant une constante positive inférieure à M.

Quant aux arcs (γ), nous admettrons cette dernière hypothèse:

3° On peut choisir $(n-1)$ transformations

$$\zeta=\varphi_\nu(z), \quad z=\psi_\nu(\zeta) \qquad (\nu=1,2,\ldots,n-1), \tag{2}$$

donnant la représentation conforme du domaine Ω sur certains domaines simplement couverts $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$, de telle manière que chacune de ces transformations laisse invariant un certain point z_0 pris à l'intérieur de Ω, et que la portion commune Ω_0 des domaines $\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ qui renferme ce point z_0 soit limitée uniquement par des segments des arcs (γ) et de leurs transformés par les substitutions (2).

Dans ces conditions, le module de la fonction $f(z)$ vérifie au point z_0 l'inégalité

$$|f(z_0)|^n<M^{n-1}\sigma. \tag{3}$$

En effet, la substitution (2) transforme $f(z)$ en une fonction de ζ

$$f_\nu(\zeta)=f(\psi_\nu(\zeta))$$

qui est régulière dans Ω_ν, et dont le module est inférieur à M dans tout ce domaine et inférieur à σ aux points qui sont suffisamment rapprochés des segments de son contour correspondant aux arcs (γ) du contour C. Puisque par hypothèse $\psi_\nu(z_0)=z_0$, on aura d'ailleurs $f_\nu(z_0)=f(z_0)$.

On en conclut que la fonction

$$F(z)=f(z)f_1(z)\cdots f_{n-1}(z)$$

est régulière dans la portion commune Ω_0 des domaines $\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$, et que son module est inférieur à $M^{n-1}\sigma$ en tout point du domaine Ω_0 qui est suffisamment rapproché d'un point quelconque de son contour.

---

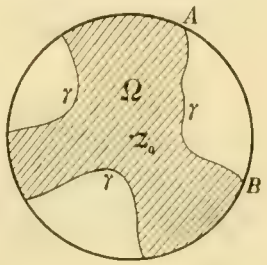
qui correspondent de la même manière aux points d'une circonférence complète, constitue *une ligne simple fermée.*

Nous supposons ici connues les propriétés des lignes simples et des domaines qu'elles limitent, en renvoyant pour ces questions au *Cours d'Analyse* de M. CAMILLE JORDAN, au Mémoire de M. BROUWER: *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes* (Mathematische Annalen, t. 69, 1910) et aux Mémoires de M. CARATHÉODORY cités au début.

En vertu du principe fondamental, l'inégalité $|F(z)| < M^{n-1}\sigma$ aura donc lieu en tout point situé à l'intérieur du domaine Ω_0. Or cette inégalité se réduit pour $z = z_0$ au résultat cherché (3).

Considérons en particulier le cas, qui interviendra souvent dans la suite, où le domaine Ω est constitué par un cercle C de centre z_0 dont on aura enlevé certaines portions par des coupures, lesquelles joueront ici le rôle des arcs (γ). Admettons d'ailleurs que le domaine Ω (couvert de hachures dans la figure ci-jointe) renferme intérieurement le point z_0.

Soit AB le plus grand parmi les arcs que les coupures (γ) interceptent de la circonférence C. En prenant l'entier n assez grand pour que la $n^{\text{ième}}$ partie de cette circonférence soit inférieure à AB, on pourra choisir comme substitutions (2) les $n-1$ rotations suivantes autour du point z_0:



$$\zeta - z_0 = e^{\nu \frac{2\pi i}{n}}(z - z_0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En effet, on voit immédiatement que, dans ces conditions, tout point de la circonférence C sera extérieur à l'un au moins des domaines $\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$, d'où il suit que la portion commune de ces domaines qui renferme le point z_0 est limitée uniquement par certains segments des coupures (γ) et de leurs transformées par les rotations considérées [1]).

4. Après ces généralités, nous allons déduire de notre principe un théorème qui joue un rôle important dans différentes branches de l'Analyse. Pour mieux faire ressortir l'idée de la démonstration, nous nous placerons d'abord dans des conditions aussi simples que possible [2]).

Soit $f(z)$ une fonction monogène de la variable $z = a + re^{i\varphi}$ qui est régulière à l'intérieur du domaine T défini par les inégalités

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2, \qquad 0 \leqq r \leqq R, \tag{4}$$

et continue encore sur son contour, excepté peut-être le point a.

Si cette fonction tend vers une même limite ω lorsque z tend vers a suivant le rayon $\varphi = \varphi_1$ ou suivant le rayon $\varphi = \varphi_2$, et si elle est bornée dans le domaine T, elle tendra uniformément vers ω dans l'angle $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$, de sorte qu'elle sera continue encore au point $z = a$.

Si, au contraire, la fonction $f(z)$ tend sur les rayons en question vers des limites déterminées mais différentes entre elles, elle ne saurait être bornée dans le domaine T.

Si ce théorème est démontré pour une certaine valeur de l'angle $\varphi_2 - \varphi_1$, on l'étend immédiatement à une autre valeur quelconque de cet angle par une substitution de la forme

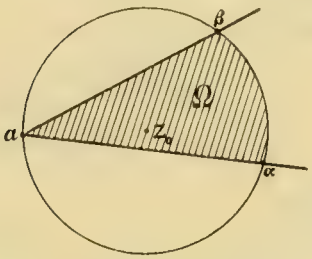
---

[1]) Sous une forme différente, le procédé dont nous nous servons ici avait déjà été utilisé par d'autres auteurs, notamment par M. PAINLEVÉ dans sa Thèse: *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, page 29.

[2]) On peut aussi établir ce théorème en faisant la représentation conforme du domaine T sur un cercle, puis en appliquant la formule de POISSON. *Voir* par exemple le travail de l'auteur: *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (Tome XXXV de ce Recueil).

$\zeta - a = (z-a)^{\mu}$. Sans restreindre la généralité, nous pouvons donc supposer qu'on ait $\varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$.

Admettons d'abord que $f(z)$ tende vers la même limite ω sur les rayons $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$. Le nombre positif ε étant donné, nous pouvons alors déterminer un nombre $R_\varepsilon (< R)$ tel que, si sur les rayons en question on découpe des segments aA et aB de longueur R_ε, l'inégalité $|f(z) - \omega| < \varepsilon$ sera vérifiée pour tout point de ces segments, excepté le point a. Prenons à l'intérieur de T un point quelconque z_0 compris dans le cercle $|z-a| < \frac{1}{2} R_\varepsilon$, et, de z_0 comme centre, traçons une circonférence C qui passe par le point a. Cette circonférence découpe du domaine T une portion Ω, limitée par deux segments rectilignes $a\alpha$ et $a\beta$, faisant respectivement partie des segments aA et aB, et l'arc $\alpha\beta$ de la circonférence C.



La somme des angles $az_0\alpha$ et $az_0\beta$ étant égale à $2\pi - 2(\varphi_2 - \varphi_1)$ et, par suite, supérieure à π, l'un au moins de ces angles dépassera $\frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que, si l'on fait tourner le domaine Ω trois fois de suite autour du point z_0, chaque fois de l'angle $\frac{\pi}{2}$, et si l'on désigne par $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ les domaines ainsi obtenus, la portion commune Ω_0 de $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sera située tout entière à l'intérieur de C et, par suite, limitée uniquement par certaines portions des segments $a\alpha$ et $a\beta$ et de leurs transformés par les rotations considérées.

En vertu de nos hypothèses, la fonction $f(z) - \omega$ est régulière dans le domaine Ω, et son module y reste au-dessous d'une limite finie M. D'autre part le module de cette fonction est inférieur à ε en tout point des segments $a\alpha$ et $a\beta$, à l'exception du seul point a; mais celui-ci restera, ainsi que tous ses transformés, à l'extérieur du domaine Ω_0.

En appliquant à la fonction $f(z) - \omega$ les considérations du n° 3, on trouve donc

$$|f(z_0) - \omega|^4 < M^3 \varepsilon \quad \text{ou bien} \quad |f(z_0) - \omega| < M^{\frac{3}{4}} \varepsilon^{\frac{1}{4}},$$

et, puisque cette conclusion est valable pour tout point z_0 compris dans le cercle $|z-a| < \frac{1}{2} R_\varepsilon$, on voit bien que la fonction $f(z)$ tend uniformément vers ω dans l'angle $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Supposons maintenant que $f(z)$ tende sur les rayons $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$ vers des limites différentes, ω_1 et ω_2, et considérons la fonction

$$F(z) = \left(f(z) - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2.$$

En vertu de nos hypothèses, cette fonction est régulière dans le domaine T et continue encore sur son contour, excepté le point a; de plus elle tend sur chacun des rayons considérés vers la limite $\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2$.

Si la fonction $f(z)$ était bornée dans T, il en serait de même de $F(z)$, et, en vertu de la première partie de notre théorème, cette dernière fonction devrait donc tendre uniformément vers la limite $\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2$ dans l'angle $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Mais cela exige que $f(z)$ y tende

uniformément soit vers ω_1, soit vers ω_2. Puisque cette conséquence n'est pas compatible avec notre hypothèse, on voit donc que, si cette hypothèse se trouve vérifiée, la fonction $f(z)$ ne saurait être bornée dans le domaine T.

5. Le théorème que nous venons de démontrer peut être généralisé comme suit:

Supposons que la fonction monogène $f(z)$ soit régulière dans un domaine T admettant comme contour une ligne simple fermée S, et qu'elle soit continue encore sur ce contour, excepté peut-être un certain point a.

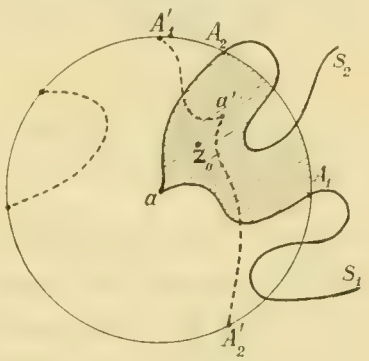
Soient S_1 et S_2 les portions de S limitées par le point a et un autre point quelconque P de ce contour.

Si la fonction $f(z)$ tend vers une même limite ω lorsque z tend vers a suivant S_1 ou suivant S_2, et si elle est bornée dans T, elle tendra uniformément vers ω lorsque z tend vers a dans ce domaine, et sera donc continue encore pour $z=a$.

Si, au contraire, la fonction $f(z)$ tend sur S_1 et S_2 vers des limites distinctes lorsque z tend vers a, elle ne saurait être bornée dans le domaine T.

Il suffira de démontrer la première partie de ce théorème, car la seconde partie s'en déduit comme au numéro précédent.

Du point a comme centre traçons une circonférence C_r de rayon r qui coupe le contour S. Cette circonférence divise le domaine T en un nombre fini ou infini de portions distinctes, dont une seule, qui sera désignée par T_r et qui est couverte de hachures dans la figure à côté, admet $z=a$ comme point de frontière. Désignons par A_1 et A_2 les premiers points, à partir du point a, où les lignes S_1 et S_2 rencontrent la circonférence C_r. Les segments aA_1 et aA_2 de ces lignes divisent le cercle $|z-a|<r$ en deux domaines distincts, dont l'un, que nous désignerons par $\overline{T}_r$, renferme T_r comme partie. Nous admettrons que l'arc A_1A_2 de C_r qui fait partie de la frontière de $\overline{T}_r$ est inférieur à $\frac{1}{3}2\pi r$, ce qui ne restreint pas la généralité puisqu'on peut toujours réaliser cette hypothèse par la substitution $\zeta-a=(z-a)^{\frac{1}{3}}$.



Prenons maintenant un point z_0 à l'intérieur de T_r et effectuons la transformation linéaire

$$\frac{\zeta-z_0}{\zeta-\bar{z}_0}=-\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, \tag{5}$$

$\bar{z}_0$ étant le conjugué du point z_0 par rapport à la circonférence C_r. Cette transformation laisse invariants les points z_0 et $\bar{z}_0$ et transforme en elle-même la circonférence C_r. Si l'on fait tendre z_0 vers a, $\bar{z}_0$ tendra vers l'infini et la transformation (5) se réduira à la limite à une rotation de l'angle π autour du point a. Il s'ensuit que, si le rapport $\frac{|z_0-a|}{r}$ est inférieur à un certain nombre positif μ, l'arc A_1A_2 de la circonférence C_r, qui est par hypothèse inférieur à $\frac{1}{3}2\pi r$, sera transformé par (5) en un arc $A_1'A_2'$ de la même circonférence n'ayant aucun point commun avec A_1A_2.

Le domaine T_r est limité par certaines portions de l'arc A_1A_2 et certains segments (s) du contour S qui sont compris dans le cercle $|z-a|<r$. Le transformé T'_r de T_r par la substitution (5) sera donc limité par certaines portions de l'arc $A'_1A'_2$ et par les transformés (s') des segments (s) (les lignes (s') sont marquées en pointillé dans la figure ci-dessus). Puisque les arcs A_1A_2 et $A'_1A'_2$ n'ont pas de point commun, la portion commune Ω_0 des domaines T_r et T'_r qui renferme le point z_0 est située tout entière à l'intérieur du cercle $|z-a|<r$, et son contour se compose donc exclusivement de certaines portions des segments (s) et (s').

Après ces préliminaires, considérons l'expression

$$F(z)=(f(z)-\omega)(f_1(z)-\omega),$$

où la fonction f_1 est définie par la relation $f_1(\zeta)=f(z)$. Par hypothèse, le module $|f(z)-\omega|$ reste au-dessous d'une limite finie M dans le domaine T, et par suite aussi dans T_r. On aura donc aussi $|f_1(z)-\omega|<M$ dans T'_r. D'autre part, si le nombre positif ε est donné, on peut déterminer R_ε de telle sorte que l'inégalité $|f(z)-\omega|<\varepsilon$ soit vérifiée sur les segments (s), excepté le seul point a, dès que r est inférieur à R_ε. Pour ces valeurs de r on aura donc aussi $|f_1(z)-\omega|<\varepsilon$ sur les segments (s'), excepté le point a' qui se déduit de a par la transformation (5).

En somme on voit donc que la fonction $F(z)$ est régulière et bornée dans Ω_0, et qu'elle est continue et vérifie l'inégalité $|F(z)|<M\varepsilon$ sur la frontière de ce domaine, excepté peut-être les points a et a'. D'après le n° 2 on en conclut que l'inégalité en question subsiste aussi à l'intérieur de Ω_0 et, en particulier, au point z_0, où elle se réduit à

$$|f(z_0)-\omega|<\sqrt{M\varepsilon}.$$

Ce résultat est ainsi établi pour tout point z_0 du domaine T qui est compris dans le cercle $|z-a|<\mu R_\varepsilon$, d'où suit notre théorème.

6. Voici maintenant une nouvelle généralisation du théorème du n° 4, dont nous aurons également à tirer parti [1]).

Soit $f(z)$ une fonction monogène de la variable $z=a+re^{i\varphi}$ qui est régulière et bornée à l'intérieur du domaine T défini par les inégalités (4).

Admettons que $f(z)$ tende vers une limite déterminée ω lorsque z tend vers a suivant une certaine ligne simple L faisant partie du domaine T. Cette ligne pourra avoir aussi des points communs avec les rayons qui limitent le domaine T, à condition que la fonction $f(z)$ reste continue en ces points.

Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ tendra uniformément vers la limite ω dans l'angle

$$\varphi_1+\varepsilon\leqq\varphi\leqq\varphi_2-\varepsilon, \tag{6}$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε.

---

[1]) Dans le cas particulier où L est un rayon issu du point a et compris dans l'angle $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$, ce théorème avait déjà été établi par M. MONTEL dans son Mémoire: *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (Annales de l'École Normale Supérieure, t. 29, 1912).

Si, en particulier, la ligne L se confond avec l'un des rayons qui limitent le domaine T, soit le rayon $\varphi = \varphi_1$, $f(z)$ tendra uniformément vers ω dans l'angle $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 - \varepsilon$.

Pour simplifier autant que possible la démonstration de ce théorème, nous supposerons d'abord l'angle $v = \varphi_2 - \varphi_1$ égal à $\frac{\pi}{3}$.

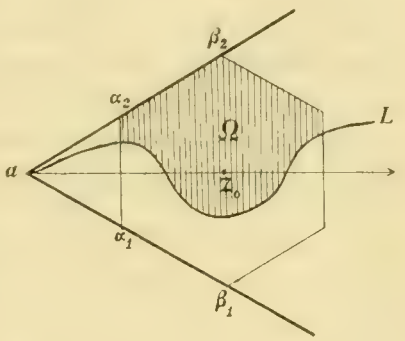
Commençons par démontrer que $f(z)$ tend vers ω lorsque z tend vers a suivant la bissectrice de cet angle.

A tout nombre positif ε correspond, en vertu de nos hypothèses, une longueur $R_\varepsilon (< R)$ telle que l'inégalité

$$|f(z) - \omega| < \varepsilon \tag{7}$$

soit vérifiée sur le segment L_ε de la ligne L compris entre le point a et le premier point, à partir de a, où cette ligne rencontre la circonférence $|z - a| = R_\varepsilon$. Prenons sur la bissectrice de l'angle v un point quelconque z_0 compris dans le cercle $|z - a| < \frac{1}{2} R_\varepsilon$.

Si le point z_0 est situé sur L_ε, l'inégalité (7) est vérifiée en ce point; si non, nous construirons de z_0 comme centre un hexagone régulier P dont deux côtés, $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$, font respectivement partie des rayons $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$. Il arrivera, en général, que cet hexagone P, qui fait partie du domaine T, est divisé par L_ε en deux ou plusieurs domaines distincts; nous désignerons alors par Ω celui de ces domaines qui renferme le point z_0. Mais il peut aussi arriver que la ligne L_ε n'a en commun avec l'hexagone que certaines portions de son périmètre, parmi lesquelles figurera alors nécessairement l'un des côtés $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$, et dans ce cas nous choisirons comme domaine Ω l'hexagone lui-même.



Faisons tourner le domaine Ω autour du point z_0 cinq fois de suite, chaque fois de l'angle $\frac{2\pi}{6}$, et désignons par $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$ les domaines ainsi obtenus et par Ω_0 la portion commune des domaines $\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_5$ qui renferme le point z_0. La frontière du domaine Ω_0 se compose de certains segments de la ligne L_ε et de ses transformées par les rotations considérées.

En vertu de nos hypothèses, la fonction $f(z) - \omega$ est régulière et son module inférieur à une constante finie M dans le domaine Ω. De plus cette fonction reste continue et vérifie l'inégalité (7) sur les portions de la frontière de Ω qui font partie de la ligne L_ε. D'après le n° 3 nous pouvons en conclure qu'on a pour $z = z_0$ l'inégalité

$$|f(z) - \omega| < M^{\frac{5}{6}} \varepsilon^{\frac{1}{6}}. \tag{8}$$

Nous avons ainsi démontré que, en tout point de la bissectrice de l'angle v compris dans le cercle $|z - a| < \frac{1}{2} R_\varepsilon$, l'une ou l'autre des inégalités (7) et (8) a lieu. Donc la fonction $f(z)$ tend bien vers la limite ω lorsque z tend vers a suivant cette bissectrice.

A l'aide d'une substitution de la forme $\zeta - a = (z-a)^\mu$ on peut se débarrasser de l'hypothèse $v = \frac{\pi}{3}$ admise ci-dessus. On peut donc appliquer aussi le résultat obtenu aux deux moitiés du domaine T comprises respectivement dans les angles $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_1 + \frac{v}{2}$ et $\varphi_1 + \frac{v}{2} \leqq \varphi \leqq \varphi_2$, et l'on trouve ainsi que la fonction $f(z)$ tend également vers ω sur leurs bissectrices, c'est-à-dire sur les rayons $\varphi = \varphi_1 + \frac{v}{4}$ et $\varphi = \varphi_2 - \frac{v}{4}$. D'après le théorème du n° 4, $f(z)$ tendra donc uniformément vers ω dans l'angle

$$\varphi_1 + \frac{v}{4} \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \frac{v}{4}.$$

En appliquant notre résultat aux portions du domaine T extérieures à l'angle précédent, on conclut de même que $f(z)$ tend uniformément vers ω dans l'angle

$$\varphi_1 + \frac{v}{8} \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \frac{v}{8},$$

et, en continuant de la sorte, on arrive évidemment à cette conclusion que $f(z)$ tend uniformément vers la limite ω dans l'angle (6), quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε. Notre théorème est donc démontré.

Par des substitutions convenables on peut présenter ce théorème sous différentes formes et le préciser dans certaines directions. Nous nous contenterons d'indiquer ici sans démonstration le résultat suivant:

Les hypothèses et les notations restant les mêmes que dans le théorème ci-dessus, admettons que la ligne L, à partir d'un certain de ses points, reste comprise dans le domaine

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_1 + k r^\mu \quad (\mu > 0, k > 0),$$

de sorte qu'elle soit tangente au rayon $\varphi = \varphi_1$ au point a.

Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ tendra uniformément vers la limite ω lorsque z tend vers a dans le domaine

$$\varphi_1 + \varepsilon r^\mu \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \varepsilon,$$

le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

7. Jusqu'ici nous nous sommes appuyé exclusivement sur le principe élémentaire rappelé au n° 1. En nous servant de la fonction modulaire, dont nous supposons connues les propriétés essentielles, nous allons maintenant établir un théorème qui servira à compléter celui du n° 5, et qui joue un rôle important dans différentes branches de l'Analyse et, en particulier, dans la théorie des fonctions méromorphes et de leurs inverses [1]).

[1]) Voir la Thèse de M. FELIX IVERSEN: *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (Helsingfors 1914), ainsi que les travaux antérieurs de M. PIERRE BOUTROUX sur le même sujet. Toutefois M. BOUTROUX n'a pas donné de démonstration précise, ni d'énoncé précis du théorème en question.

Supposons que la fonction monogène $f(z)$ soit régulière dans un domaine T, limité par un contour simple fermé S, et continue encore sur ce contour, excepté peut-être un certain point a.

Désignons par S_1 et S_2 les portions de S limitées par le point a et un autre point quelconque P de ce contour.

Si la fonction $f(z)$ tend vers une même limite ω, finie ou non, lorsque z tend vers a suivant S_1 ou suivant S_2, ou bien elle tendra uniformément vers cette limite dans le domaine T, ou bien elle prendra à l'intérieur de ce domaine, dans un voisinage arbitrairement restreint du point a, toute valeur finie donnée, sauf peut-être une seule de ces valeurs.

Si la fonction $f(z)$ tend sur S_1 et sur S_2 vers des limites déterminées différentes entre elles lorsque z tend vers a, elle prendra toujours dans le domaine T, aussi près du point a qu'on voudra, toute valeur finie donnée, excepté peut-être une seule valeur.

Soit Φ une surface de Riemann à une infinité de feuillets, étendue sur le plan de la variable complexe x, qui admet comme seuls points-limites les points $x = 0, 1, \infty$, chacun d'eux étant un point de ramification d'ordre infini pour chaque feuillet de la surface. On sait qu'il existe une fonction

$$u = \lambda(x) \tag{9}$$

qui donne la représentation conforme de l'intérieur de cette surface Φ sur le cercle $|u| < 1$.

Désignons comme au n° 5 par T_r la portion du domaine T qui est intérieure au cercle $|z - a| < r$ et dont le contour comprend le point a. Si l'on admet qu'il existe deux valeurs finies distinctes, α et β, que la fonction donnée $f(z)$ ne prenne pas à l'intérieur de T_r, la fonction

$$F(z) = \frac{f(z) - \alpha}{\beta - \alpha} \tag{10}$$

sera régulière et différente de 0 et de 1 dans ce même domaine, et continue encore sur son contour, excepté le point a. Par suite toute détermination de la fonction[1])

$$\lambda(F(z)) \tag{11}$$

sera uniforme et régulière dans le domaine T_r, et continue sur son contour, sauf peut-être au point a, et à l'intérieur de T_r son module sera partout inférieur à l'unité.

Cela posé, admettons d'abord que $f(z)$ tende sur les lignes S_1 et S_2 vers des limites différentes, ω_1 et ω_2, lorsque z tend vers a. La fonction $F(z)$ tendra également vers des limites différentes, et, d'après les propriétés connues de la fonction (9), il en sera donc de même de la fonction (11). Mais cette conclusion est en contradiction avec la proposition établie au n° 5, puisque la fonction (11) est bornée dans le domaine T_r, et la seconde partie de notre théorème est donc exacte.

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ tende sur S_1 et S_2 vers la même limite ω,

---

[1]) On sait que cette fonction comporte une infinité de déterminations distinctes, qui proviennent de l'une d'elles par des substitutions linéaires.

mais qu'elle ne tend pas uniformément vers cette limite dans le domaine T. La fonction $F(z)$ tendra sur S_1 et sur S_2 vers la même limite

$$\omega' = \frac{\omega - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

En admettant d'abord que $\omega \neq \alpha, \beta, \infty$, on aura $\omega' \neq 0, 1, \infty$. Marquons dans un feuillet donné de la surface Φ le point $x = \omega'$, et soit $u = u'$ le point du cercle $|u| < 1$ qui lui correspond en vertu de (9), et $\lambda(z)$ la détermination de la fonction (11) qui tend vers u' lorsque z tend vers a suivant S_1. Cette fonction $\lambda(z)$ tendra également sur S_2 vers une limite déterminée, puisqu'il en est ainsi de $F(z)$, et, d'après la dernière partie de la proposition établie au n° 5, cette limite doit être égale à u', puisque $\bar{\lambda}(z)$ est bornée dans T_r. La première partie de la proposition citée nous apprend dès lors que $\bar{\lambda}(z)$ tend uniformément vers u' lorsque z tend vers a dans le domaine T. Mais, en vertu de la correspondance (9), $|x - \omega'|$ tend vers zéro en même temps que $|u - u'|$, puisque le point u' est situé *à l'intérieur* du cercle $|u| < 1$, et on voit donc que, si $f(z)$ ne prenait dans T_r ni la valeur α ni la valeur β, $F(z)$ tendrait dans ce domaine uniformément vers la limite ω' lorsque z tend vers a. Mais alors $f(z)$ tendrait uniformément vers la limite ω, contrairement à notre hypothèse.

Supposons en second lieu que l'une des valeurs α et β soit égale à ω, par exemple qu'on ait $\beta = \omega$. Dans ce cas $\omega' = 1$, et le raisonnement qui précède n'est plus applicable. Or considérons l'expression $\sqrt{F(z)}$. Puisque $F(z) \neq 0, 1$ dans T_r, chacune des deux branches de cette expression est régulière dans ce domaine et n'y prend aucune des trois valeurs $0, 1, -1$. Choisissons celle de ces branches qui tend vers -1 lorsque z tend vers a sur S_1. Sur l'autre chemin S_2 cette branche tendra soit vers 1, soit vers -1, puisque $F(z)$ tend vers 1. Mais la première de ces hypothèses est en contradiction avec la dernière partie de notre théorème, que nous avons déjà démontrée, et la seconde hypothèse nous conduirait, par un raisonnement identique à celui qui précède, à cette conclusion que $\sqrt{F(z)}$ devrait tendre uniformément vers -1 et, par suite, $F(z)$ uniformément vers 1 et, enfin, $f(z)$ uniformément vers ω, lorsque z tend vers a dans le domaine donné. Nous nous heurtons donc encore à une contradiction.

Enfin l'hypothèse $\omega = \infty$ se ramène à la précédente, si l'on remplace la fonction (10) par la suivante :

$$\frac{f(z) - \beta}{f(z) - \alpha}.$$

En effet, si $f(z) \neq \alpha, \beta$ dans le domaine T_r, cette fonction y serait régulière et différente de 0 et de 1, et tendrait vers 1 lorsque z tend vers a sur S_1 ou sur S_2.

Notre théorème est ainsi démontré dans toutes ses parties.

II. Sur la correspondance entre les frontières de deux domaines qui sont représentés l'un sur l'autre d'une manière conforme.

8. Soient T un domaine fini simplement connexe quelconque du plan des z, O un point pris à l'intérieur de ce domaine, et

$$\zeta = f(z) \tag{1}$$

une fonction qui donne la représentation conforme de l'intérieur de T sur le cercle $|\zeta| < 1$ de telle manière qu'au point O corresponde le centre du cercle. L'inverse de cette fonction sera désignée par

$$z = \varphi(\zeta). \tag{1}'$$

Désignons encore par K la plus grande corde du domaine T et par q la plus courte distance du point O à sa frontière.

On sait que, lorsque le point z se déplace dans T de telle manière que sa distance à la frontière de ce domaine tende vers zéro, le module de la fonction $f(z)$ tend vers l'unité, de sorte que le point $\zeta = f(z)$ tendra vers la circonférence $|\zeta| = 1$. Mais on peut établir à ce sujet un résultat plus précis, dont on pourra tirer parti aussi dans d'autres recherches concernant la représentation conforme.

En désignant par a l'affixe d'un point situé sur la frontière du domaine T, imaginons qu'on construise la surface de Riemann à une infinité de feuillets qui se rattache à la fonction $\log(z-a)$, et considérons la portion $\overline{T}$ de cette surface qui est intérieure au cercle $|z-a| \leqq K$. Si l'on regarde le point O comme appartenant à un certain feuillet de la surface $\overline{T}$, le domaine donné T fera tout entier partie de cette surface.

Faisons la représentation conforme de la surface T sur le cercle $|\zeta| \leqq 1$ de telle sorte que le point O corresponde au centre du cercle et le point $z = a$ au point $\zeta = 1$. Cette représentation est donnée par la fonction

$$\zeta = F(z) \equiv \frac{\log\left(\frac{z-a}{K} e^{-iv}\right) + \log\frac{K}{Q}}{\log\left(\frac{z-a}{K} e^{-iv}\right) - \log\frac{K}{Q}},$$

Q désignant la longueur et v l'argument du vecteur aO. A la portion de la surface $\overline{T}$ comprise dans le cercle $|z-a| < r\,(< q)$ correspond l'intérieur d'un cercle ayant comme diamètre le segment $1-\delta' \leqq \zeta \leqq 1$ de l'axe réel, où δ' désigne l'expression

$$\delta' = \frac{2\log\frac{K}{Q}}{\log\frac{K}{Q} + \log\frac{K}{r}},$$

laquelle est inférieure à l'unité et tend vers zéro avec r. On aura donc $|F(z)| > 1-\delta'$ dès que $|z-a| < r$.

Considérons maintenant le quotient

$$\frac{F(z)}{f(z)}.$$

A l'intérieur du domaine T celui-ci définit évidemment une fonction monogène uniforme et régulière. Soit ξ un point quelconque situé sur la frontière de T. Quelque petit que soit ε, on pourra choisir ϱ de telle sorte qu'on ait $|f(z)|>1-\varepsilon$ pour tout point z de T compris dans le cercle $|z-\xi|<\varrho$, et, puisque d'autre part $|F(z)|<1$ dans T, on voit que le module du quotient considéré est, pour les mêmes points z, inférieur à $\frac{1}{1-\varepsilon}$. Le principe fondamental rappelé au n° 1 nous apprend dès lors que $\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|<1$ à l'intérieur du domaine T, et il en résulte qu'on a $|f(z)|>|F(z)|$ pour tout point de ce domaine distinct du point O.

D'après le résultat établi plus haut, on aura donc $|f(z)|>1-\delta'$ dans la portion du domaine T comprise dans le cercle $|z-a|<r$. Si le point a se déplace sur la frontière de T, la quantité Q et par suite aussi δ' varie, mais comme on a $Q\geq q$, δ' ne dépassera jamais la limite

$$\delta(r)=\frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{q}+\log\frac{K}{r}}. \tag{2}$$

Nous pouvons donc énoncer ce résultat:

A tout point z du domaine T situé à une distance inférieure à $r\,(<q)$ de sa frontière correspond, en vertu de (1), *un point ζ ayant à la circonférence $|\zeta|=1$ une distance inférieure à l'expression $\delta(r)$, qui tend vers zéro en même temps que r, et qui, en dehors de r, ne renferme que les quantités K et q.*

9. Nous allons maintenant établir un théorème aussi précis relatif à la variation de l'argument de la fonction $f(z)$.

Soient a un point quelconque situé sur la frontière du domaine T, l une ligne simple de ce domaine comprise dans le cercle $|z-a|<r\,(<q)$, et σ l'oscillation de l'argument de la fonction $f(z)$ sur cette ligne l, on aura, dès que r est inférieur à une certaine limite r_0, l'inégalité

$$\sigma<4\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{r}}}, \tag{3}$$

qui fait voir que σ tend vers zéro en même temps que r.

Soient ψ_1 et ψ_2 la plus grande et la plus petite valeur de l'argument de $f(z)$ sur la ligne l, et l_1 un segment de l compris entre deux points consécutifs où ces valeurs sont atteintes. A l_1 correspondra, dans le cercle $|\zeta|<1$, une ligne simple λ_1 dont les extrémités A_1 et B_1 sont respectivement situées sur les rayons $\psi=\psi_1$ et $\psi=\psi_2$, tandis que ses autres points sont compris dans l'angle $\psi_2<\psi<\psi_1$. Soient A et B les points où lesdits rayons rencontrent la circonférence $|\zeta|=1$.

D'après le n° 8, la ligne λ_1 est comprise entre les circonférences $|\zeta|=1$ et $|\zeta|=1-\delta(r)$, où $\delta(r)$ désigne l'expression (2). Une tangente à la dernière de ces circonférences intercepte de la première un arc de longueur

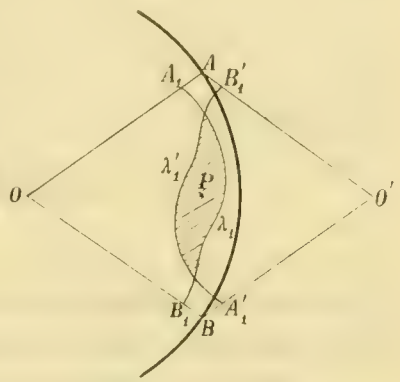
$$2 \arccos(1-\delta(r)). \tag{4}$$

Il s'agit de trouver une limite supérieure de la différence $\sigma=\psi_1-\psi_2$. A cet effet nous admettrons provisoirement les deux hypothèses suivantes:

1° La différence σ est supérieure à l'expression (4).

2° On a d'autre part $\sigma \leqq \frac{\pi}{2}$.

Soit P le milieu de la corde AB et ζ_0 l'affixe de ce point. En vertu des hypothèses 1° et 2°, P est situé à l'intérieur du domaine Ω limité par la ligne λ_1 et les segments rectilignes $0A_1$ et $0B_1$. Faisons tourner ce domaine de l'angle π autour du point P, et désignons par Ω' le nouveau domaine ainsi obtenu, lequel sera limité par les segments rectilignes $0'A'_1$, $0'B'_1$ et la ligne λ'_1, symétriques respectivement à $0A_1$, $0B_1$ et λ_1 par rapport au point P. Puisque, en vertu de l'hypothèse 2°, les segments $0'A'_1$ et $0'B'_1$ sont extérieurs au cercle $|\zeta|\leq 1$ et par suite au domaine Ω, les segments $0A_1$ et $0B_1$ seront extérieurs au domaine Ω', et la portion commune Ω_0 de ces deux domaines qui renferme le point P (couverte de hachures dans la figure à côté) sera donc limitée uniquement par des segments des lignes λ_1 et λ'_1.



Après ces préliminaires, nous appliquerons les considérations du n° 3 à la fonction

$$\Phi(\zeta)=\varphi(\zeta)-a.$$

Cette fonction est régulière dans le domaine Ω, contour compris, et vérifie l'inégalité $|\Phi(\zeta)|<K$ dans tout ce domaine et l'inégalité plus étroite $|\Phi(\zeta)|<r$ sur la portion λ_1 de son contour. Par la rotation considérée ci-dessus, qui se traduit analytiquement par la substitution $\zeta'-\zeta_0=-(\zeta-\zeta_0)$ ou $\zeta'=2\zeta_0-\zeta$, on déduit de $\Phi(\zeta)$ une nouvelle fonction,

$$\Phi_1(\zeta)=\Phi(2\zeta_0-\zeta),$$

qui est régulière dans le domaine Ω', contour compris, et vérifie l'inégalité $|\Phi_1(\zeta)|<K$ en tout point de ce domaine et l'inégalité $|\Phi_1(\zeta)|<r$ sur la ligne λ'_1.

Par suite la fonction $\Phi(\zeta)\Phi_1(\zeta)$ est régulière et bornée dans le domaine Ω_0 et sur son contour, et vérifie en tout point de ce contour l'inégalité $|\Phi(\zeta)\Phi_1(\zeta)|<Kr$. D'après le principe fondamental du n° 1, cette même inégalité subsiste donc aussi à l'intérieur du domaine Ω_0 et, en particulier, au point ζ_0, où elle se réduit à

$$|\varphi(\zeta_0)-a|<\sqrt{Kr}.$$

D'après cette inégalité, la distance du point $z_0 = \varphi(\zeta_0)$, qui correspond au point P, à la frontière du domaine T est inférieure à $\sqrt{Kr}$. Cette dernière quantité est elle-même inférieure à q si $r < \frac{q^2}{K}$. Le théorème du n° 8 nous apprend donc que, pour ces valeurs de r, la distance du point P à la circonférence $|\zeta| = 1$ est certainement inférieure à la limite

$$\delta(\sqrt{Kr}) = \frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{q} + \frac{1}{2}\log\frac{K}{r}}. \tag{5}$$

Mais cette distance est, d'autre part, égale à

$$1 - \cos\frac{\sigma}{2} = 2\sin^2\frac{\sigma}{4},$$

et il vient donc

$$2\sin^2\frac{\sigma}{4} < \frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{q} + \frac{1}{2}\log\frac{K}{r}},$$

d'où il suit enfin

$$\sigma < 4\arcsin\sqrt{\frac{\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{q} + \frac{1}{2}\log\frac{K}{r}}} = 4\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{r}}}.$$

C'est l'inégalité cherchée (3), qui se trouve ainsi établie pour les valeurs de r inférieures à $\frac{q^2}{K}$, en supposant vérifiées les hypothèses 1° et 2° ci-dessus.

Mais la première de ces hypothèses s'élimine d'elle-même, puisque, l'expression (5) étant supérieure à (2), la limite que nous venons de trouver pour σ est évidemment supérieure à l'expression (4). Quant à la seconde hypothèse, on vérifie aisément que la limite (3) est inférieure à $\frac{\pi}{2}$ si r est plus petit que la quantité

$$r_0 = q\left(\frac{q}{K}\right)^{5+4\sqrt{2}},$$

laquelle est elle-même inférieure à la limite $\frac{q^2}{K}$ admise ci-dessus.

Il en résulte que, si $r < r_0$, on ne saurait avoir $\sigma > \frac{\pi}{2}$. En effet, au cas contraire on pourrait choisir un segment l de la ligne l sur lequel l'oscillation σ de l'argument de la fonction $f(z)$ serait inférieure à $\frac{\pi}{2}$ mais en même temps supérieure à la limite (3), et on se trouverait ainsi en contradiction avec le résultat obtenu ci-dessus. Donc, si $r < r_0$, on aura nécessairement $\sigma \leq \frac{\pi}{2}$ et, par suite, l'inégalité (3), C. Q. F. D.

Remarquons enfin que le théorème que nous venons de démontrer reste encore vrai si l'on y remplace la quantité q par la longueur Q du vecteur aO et la quantité K par la plus grande corde du domaine T issue du point a.

10. Un point de la frontière du domaine T est dit *accessible*, s'il existe une ligne simple dont une extrémité se confond avec ce point tandis que ses autres points sont tous situés à l'intérieur du domaine T. S'il n'existe pas de telle ligne, le point en question est dit *inaccessible*. Il est évident que l'ensemble des points accessibles est dense partout sur la frontière, c'est-à-dire que tout cercle ayant comme centre un point de la frontière renferme une infinité de points accessibles.

Ces définitions posées, les considérations qui précèdent nous permettront d'établir en quelques mots deux théorèmes importants.

Soient $z=a$ un point accessible de la frontière du domaine T et L une ligne simple comprise dans ce domaine et ayant a comme extrémité, si le point z tend vers a suivant L, le point correspondant $\zeta=f(z)$ tendra vers un point déterminé $\zeta=\alpha$ de la circonférence $|\zeta|=1$.

Puisque nous savons que le module de la fonction $f(z)$ tend vers l'unité, nous n'avons qu'à démontrer que son argument tend également vers une limite finie et déterminée.

Soit L_r la portion de la ligne L comprise entre le point a et le premier point, à partir de a, où cette ligne rencontre la circonférence $|z-a|=r$. D'après le théorème du numéro précédent, l'oscillation de l'argument de $f(z)$ sur L_r sera inférieure à tel nombre ε qu'on voudra si r est inférieur à une certaine quantité r_ε. Or ceci constitue précisément la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une limite finie et déterminée.

Soient a et a' deux points accessibles distincts de la frontière du domaine T, L et L' deux lignes simples comprises dans ce domaine et ayant respectivement a et a' comme extrémités, α et α' les limites vers lesquelles tend la fonction $f(z)$ sur ces lignes; on aura nécessairement $\alpha\neq\alpha'$.

Au cas contraire, les lignes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ du cercle $|\zeta|<1$ qui correspondent à L et à L' aboutiraient au même point $\zeta=\alpha$ de la circonférence $|\zeta|=1$. Soient $\mathcal{A}_\rho$ et $\mathcal{A}'_\rho$ les segments de ces lignes compris respectivement entre le point α et les premiers points, β et β', où elles rencontrent la circonférence $|\zeta-\alpha|=\rho$. Si ρ est suffisamment petit, $\mathcal{A}_\rho$ et $\mathcal{A}'_\rho$ n'auront aucun point commun en dehors du point α, et limiteront par conséquent, avec l'arc $\beta\beta'$ de ladite circonférence, une portion connexe τ du cercle $|\zeta|<1$. La fonction $\varphi(\zeta)$ est régulière et bornée dans ce domaine τ, et malgré cela elle tendrait sur $\mathcal{A}_\rho$ et $\mathcal{A}'_\rho$ vers des limites différentes, a et a', lorsque ζ tend vers α. Or cette conséquence est en contradiction avec le théorème du n° 5.

Considérons maintenant une *coupure* quelconque s du domaine T, c'est-à-dire une ligne simple dont les extrémités, a et b, sont situées sur la frontière de T, tandis que ses autres points sont tous intérieurs à ce domaine. Les points a et b peuvent d'ailleurs être distincts ou non.

A cette coupure s correspond dans le cercle $|\zeta<1$ une ligne simple σ qui, d'après le premier des théorèmes établis ci-dessus, tend des deux côtés vers des points déterminés, α et β, de la circonférence $|\zeta|=1$. La ligne σ constitue donc une coupure du cercle $|\zeta|<1$ et le divise, par suite, en deux portions distinctes (*voir* la deuxième note page 5). En s'ap-

puyant sur la correspondance continue et bi-univoque entre les points intérieurs de ce cercle et ceux du domaine T, on en conclut que ce dernier domaine est divisé en deux portions distinctes par la coupure s.

Si les extrémités a et b de la coupure s sont distinctes, il en est de même des extrémités α et β de la coupure σ, d'après le second théorème ci-dessus. Dans le cas où les points a et b sont confondus, les points α et β seront encore distincts si le domaine limité extérieurement par la coupure s, qui est maintenant une ligne fermée, renferme des points de la frontière de T. En effet, dans ces conditions le contour de chacune des deux portions de T que sépare la coupure s comprend une infinité de points accessibles de la frontière de T, et le contour de chacune des deux portions correspondantes du cercle $|\zeta|<1$ doit donc comprendre une infinité de points de la circonférence $|\zeta|=1$, ce qui n'aurait pas lieu si les extrémités α et β de la coupure σ étaient confondues.

11. Soit a un point accessible de la frontière de T, et soit L une ligne simple comprise dans ce domaine et aboutissant au point a. Nous admettrons que l'autre extrémité de L est le point O, ce qui évidemment ne restreint pas la généralité.

De a comme centre traçons un cercle de rayon r inférieur à q, et fixons un segment aa_r de la ligne L dont les points sont tous situés à l'intérieur de ce cercle. On pourra par exemple choisir pour a_r le premier point, à partir du point a, où la ligne L rencontre la circonférence $|z-a|=\frac{r}{2}$.

La circonférence $|z-a|=r$ est divisée par la frontière du domaine T en un nombre fini ou infini d'arcs distincts, dont ceux qui sont intérieurs à T constituent autant de coupures de ce domaine. Puisque les points a_r et O sont situés respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de cette circonférence, le segment de la ligne L qui joint ces points doit traverser l'une au moins des coupures en question. D'autre part, comme les distances des points de ce segment à la frontière de T ont une limite inférieure non-nulle, on conçoit que le nombre des coupures distinctes (s) que traverse la ligne L est nécessairement fini.

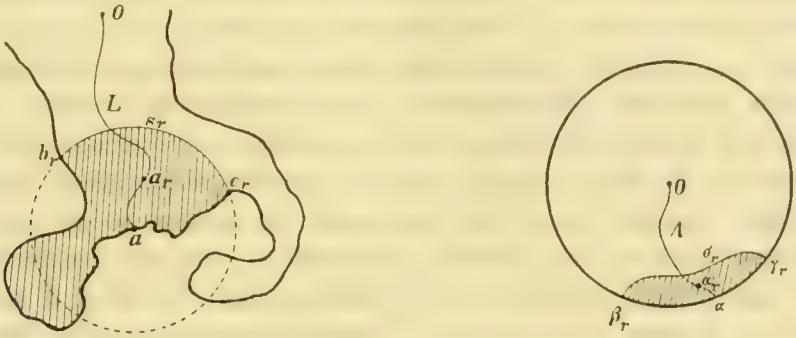
D'après le n° 10, chacune des coupures (s) divise le domaine T en deux portions distinctes. On démontre facilement [1]) qu'il existe parmi ces coupures au moins une qui *sépare* les points a_r et O, de sorte que les portions correspondantes du domaine T renferment chacune un de ces points.

Nous désignerons par s_r la première parmi les coupures (s) qui séparent les points a_r et O qu'on rencontre en suivant la ligne L depuis le point a, par b_r et c_r ses extrémités. La coupure s_r divise T en deux domaines partiels, dont nous désignerons par t_r celui qui renferme le point a_r.

A la ligne L correspond, dans le cercle $|\zeta|\leq 1$, une ligne simple Λ qui joint le centre du cercle avec un point déterminé α de la circonférence $|\zeta|=1$. A s_r correspond une coupure σ_r du cercle $|\zeta|<1$ dont les extrémités β_r et γ_r sont distinctes d'entre elles et du point α,

[1]) Cf. CARATHÉODORY: *Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, page 338.

en vertu des résultats établis au n° 10[1]). La coupure σ_r divise le cercle en deux domaines partiels, dont l'un renferme le centre du cercle, tandis que l'autre, que nous désignerons par τ_r, renferme le point α_r qui correspond au point a_r. Ce domaine τ_r, qui correspond à la portion



t_r de T, doit comprendre tout point du segment $\alpha_r\alpha$ de la ligne A, d'où l'on conclut que le point α est situé sur l'arc $\beta_r\gamma_r$ de la circonférence $|\zeta|=1$ qui fait partie du contour de τ_r. Dans la figure ci-dessus les domaines correspondants t_r et τ_r sont couverts de hachures.

On démontre facilement que, si $r'<r$, le domaine τ_r renferme $\tau_{r'}$ comme partie, d'où il suit que le domaine t_r renferme $t_{r'}$. D'autre part il résulte des théorèmes établis aux n°s 8 et 9, lorsqu'on les applique à l'arc s_r de la circonférence $|z-a|=r$, que les inégalités[2])

$$|1-\zeta|\leqq\frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{q}+\log\frac{K}{r}},\qquad |\arg\zeta-\arg\alpha|\leqq 4\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{r}}}$$

sont vérifiées pour tout point ζ de la coupure σ_r dès que r est inférieur à une certaine limite. Pour r suffisamment petit, cette coupure sera donc comprise dans un cercle aussi petit qu'on voudra de centre α. En particulier, les points β_r et γ_r s'approcheront constamment du point α et se confondront à la limite avec ce point lorsque r décroît vers zéro. Donc:

Lorsque r décroît vers zéro, les domaines t_r et τ_r se rétrécissent constamment, et le domaine τ_r se réduit à la limite au seul point α.

12. Avant de continuer ces recherches générales, occupons-nous du cas où le domaine donné T est limité par une ligne simple fermée S.

Celle-ci est divisée par la coupure s_r en deux segments, dont l'un, S_r, contient le point a, tandis que la distance minima de l'autre segment, S'_r, à ce point sera supérieure à une quantité positive $m(r)(\leqq r)$. Le domaine t_r est limité par s_r et S_r, la portion restante t'_r du domaine T par s_r et S'_r. Puisque la plus courte distance du point a à la frontière de

[1]) D'après la remarque qui termine le n° 10, les points β_r et γ_r seront distincts aussi dans le cas où les points b_r et c_r se confondent.

[2]) On remarquera que, puisque σ_r coupe le rayon 0α, l'argument de la fonction $f(z)$ est égal à $\arg\alpha$ en un point au moins de s_r.

t'_r est égale à $m(r)$, tout point à l'intérieur de t'_r sera à une distance du point a supérieure à $m(r)$, et on voit donc que tout point du domaine T qui est intérieur au cercle $|z-a|<m(r)$ appartient au domaine t_r.

A chacun de ces points de T correspond ainsi un point $\zeta=f(z)$ qui est situé dans le domaine τ_r. Or, d'après le n° 11, τ_r est intérieur au cercle $|\zeta-\alpha|<\varepsilon$ si r est inférieur à une certaine limite r_ε, le nombre positif ε étant donné aussi petit que l'on veut. On a donc $|f(z)-\alpha|<\varepsilon$ pour tout point z du domaine T qui est compris dans le cercle $|z-a|<m(r_\varepsilon)$. En d'autres termes, la fonction $f(z)$ est continue au point $z=a$ et y prend la valeur α.

Des propriétés des lignes simples (*voir* la deuxième note page 5) il résulte, d'autre part, que la distance maxima $\bar{m}(r)(\geq r)$ d'un point du segment S_r au point a tend vers zéro avec r. Quelque petit qu'on se donne ε, le domaine t_r sera donc compris dans le cercle $|z-a|<\varepsilon$ dès que r est inférieur à une certaine limite $\bar{r}_\varepsilon$, d'où il suit qu'on aura $|\varphi(\zeta)-a|<\varepsilon$ dans le domaine τ_r si $r<\bar{r}_\varepsilon$. Donc la fonction $\varphi(\zeta)$ est continue au point $\zeta=\alpha$ et y prend la valeur a.

Par hypothèse, a est un point accessible quelconque du contour du domaine T. Or on sait que, si ce contour est une ligne simple, comme nous le supposons ici, tous ses points sont accessibles. De ce qui précède il résulte donc que la fonction $f(z)$ est continue dans le domaine T et sur son contour S, et que la relation $\zeta=f(z)$ fait correspondre à tout point donné a de S un point déterminé α de la circonférence $|\zeta|=1$, et à deux points différents de S deux points différents de cette circonférence. De plus, la fonction $\varphi(\zeta)$ est continue en tout point de la circonférence $|\zeta|=1$ qui correspond à un point de S.

Reste à faire voir qu'à tout point de la circonférence $|\zeta|=1$ il correspond un point du contour S.

Puisque ce contour est une ligne simple fermée, on peut établir une correspondance continue et bi-univoque entre ses points et ceux d'une circonférence C. Soit u l'angle polaire d'un point P de cette circonférence par rapport à son centre. L'affixe z du point de S qui correspond à P est une fonction continue de u, et, d'après ce que nous venons de dire, il en sera donc de même de la valeur que prend en ce point la fonction $f(z)$. Par suite, l'angle polaire ψ du point correspondant $\zeta=f(z)$ de la circonférence $|\zeta|=1$ est aussi une fonction continue de u

$$\psi=\psi(u).$$

Si u varie d'un multiple de 2π, il en est de même de $\psi(u)$. D'autre part, à deux valeurs de u qui sont incongrues modulo 2π correspondent des valeurs de $\psi(u)$ jouissant de la même propriété.

Il s'ensuit avec nécessité que, lorsque l'angle u croît d'une manière continue depuis 0 à 2π, la fonction $\psi(u)$ varie d'une manière continue et *toujours dans le même sens*, et que sa variation totale est, en valeur absolue, précisément égale à 2π. Donc à tout point de la circonférence $|\zeta|=1$ correspond bien un point de la circonférence C et, par suite, un point du contour S, ce que nous voulions établir.

D'après ce qui précède, la fonction $\varphi(\zeta)$ est donc continue en tout point de la circonférence $|\zeta|=1$, et nous avons ainsi établi ce théorème:

Dans le cas où le domaine donné T est limité par une ligne simple fermée S, la relation $\zeta = f(z)$, qui donne la représentation conforme de l'intérieur de ce domaine sur l'intérieur du cercle $|\zeta| \leq 1$, établit une correspondance continue et bi-univoque entre les points de ces deux domaines, contours compris.

13. Retournons au cas général, en reprenant les hypothèses et les notations du n° 11.

Nous avons vu que, lorsque r décroît vers zéro, les domaines t_r et τ_r se rétrécissent constamment, et que le domaine τ_r se réduit à la limite au seul point α. Il en résulte que tout point z pris à l'intérieur du domaine T sera extérieur à t_r dès que r est suffisamment petit. Sur la frontière de T il peut, au contraire, y avoir des points, autres que a, qui appartiennent à la frontière du domaine t_r quelque petit que soit r. Nous désignerons par E_a l'ensemble de tous ces points, y compris le point a. D'après un théorème connu, E_a est un ensemble continu, à moins qu'il ne se réduise au seul point a.

Soit P un point quelconque de l'ensemble E_a et $\bar{z}$ son affixe. Puisque P appartient à la frontière de tout domaine t_r, chacun de ces domaines renferme des points z intérieurs au cercle $|z - \bar{z}| < \varepsilon$, quelque petit que soit ε. Donc tout domaine τ_r renferme des points ζ pour lesquels $|\varphi(\zeta) - \bar{z}| < \varepsilon$, et, puisque τ_r se réduit pour $r = 0$ au seul point α, il en résulte que $\bar{z}$ est une valeur-limite de la fonction $\varphi(\zeta)$ au point α.

Soit inversement $\bar{z}$ une valeur-limite quelconque de $\varphi(\zeta)$ au point α. Tout domaine τ_r renfermera des points ζ tels que $|\varphi(\zeta) - \bar{z}| < \varepsilon$, quelque petit qu'on se donne ε. Donc tout domaine t_r renfermera des points z qui sont intérieurs au cercle $|z - \bar{z}| < \varepsilon$, ce qui montre que le point $\bar{z}$ fait partie de la frontière du domaine t_r quel que soit r, et qu'il appartient par suite à l'ensemble E_a.

Le domaine E_a se compose ainsi des points ayant pour affixes les différentes valeurs-limites de la fonction $\varphi(\zeta)$ au point $\zeta = \alpha$, et constitue par suite, d'après M. Painlevé [1]), *le domaine d'indétermination* de cette fonction au point considéré (en se bornant au cercle $|\zeta| < 1$).

Si E_a se réduit au seul point a, la fonction $\varphi(\zeta)$ est continue au point $\zeta = \alpha$ et tend, par suite, vers la limite a sur tout chemin aboutissant à ce point.

Insistons un peu sur le cas où, l'ensemble E_a étant infini, la fonction $\varphi(\zeta)$ est indéterminée au point $\zeta = \alpha$.

D'après nos hypothèses, il existe dans le cercle $|\zeta| < 1$ une ligne $\mathcal{A}$ ayant le point α comme extrémité sur laquelle $\varphi(\zeta)$ tend vers la limite a. Le théorème du n° 5 nous apprend dès lors que, quel que soit le chemin suivant lequel ζ tend vers α, la fonction $\varphi(\zeta)$ ne saurait tendre vers une limite déterminée différente de a. Les chemins du cercle $|\zeta| < 1$ qui aboutissent au point $\zeta = \alpha$ sont donc de deux espèces: sur les uns la fonction $\varphi(\zeta)$ tend vers la limite a, sur les autres elle est oscillante.

On peut se demander, avec M. Study [2]), quels sont les chemins sur lesquels $\varphi(\zeta)$ tend vers la limite a. Le théorème établi au n° 6 nous permet d'énoncer à ce sujet le résultat suivant:

---

[1]) *Notice sur ses travaux scientifiques,* (Paris 1900), pages 17—18.

[2]) *Voir* le § 8 du travail cité au début.

La fonction $\varphi(\zeta)$ tend uniformément vers la limite a lorsque ζ tend vers le point α dans un angle quelconque ayant ce point comme sommet et dont les côtés forment avec le rayon $\alpha 0$ des angles inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.

Ce résultat se déduit immédiatement du théorème du n° 6 en faisant la représentation conforme du cercle $|\zeta| \leq 1$ sur un demi-plan.

14. Soit maintenant L' une ligne simple comprise dans le domaine T et aboutissant au même point a de sa frontière que la ligne L, et définissons à l'aide de cette ligne L' le point a'_r, la coupure s'_r et le domaine t'_r comme nous avions défini au n° 11 le point a_r, la coupure s_r et le domaine t_r en partant de la ligne L. A L' correspond dans le cercle $|\zeta| < 1$ une ligne simple Λ' aboutissant à un point déterminé $\zeta = \alpha'$ de la circonférence $|\zeta| = 1$. Désignons par α'_r le point de Λ' correspondant à a'_r, par σ'_r la coupure du cercle $|\zeta| \leq 1$ correspondant à s'_r, et par τ'_r la portion de ce cercle qui correspond au domaine t'_r.

Si les domaines t_r et t'_r restent identiques quelque petit que soit r, il en est de même de τ_r et τ'_r, et, puisque ces derniers domaines se réduisent respectivement aux points α et α' lorsque r tend vers zéro, on aura donc $\alpha' = \alpha$.

Inversement, si $\alpha' = \alpha$, les domaines t_r et t'_r resteront identiques quelque petit que soit r. En effet, puisque les segments $a a_r$ et $a a'_r$ des lignes L et L' ne rencontrent pas la circonférence $|z - a| = r$, les segments $\alpha \alpha_r$ et $\alpha \alpha'_r$ des lignes Λ et Λ' ne rencontreront ni la coupure σ_r, ni la coupure σ'_r. Chacune de ces coupures sépare donc les points α_r et α'_r du centre du cercle, d'où il suit que chacune des coupures s_r et s'_r sépare les points a_r et a'_r du point O. Si ces dernières coupures étaient distinctes, il en serait de même des coupures σ_r et σ'_r, de sorte que ou bien la coupure σ_r serait intérieure au domaine τ'_r, ou bien la coupure σ'_r intérieure au domaine τ_r. Or, si le premier cas se présentait, la ligne Λ' rencontrerait σ_r avant σ'_r, et, par suite, la ligne L' rencontrerait s_r avant de rencontrer s'_r. Mais ceci est impossible puisque, parmi les différentes coupures du domaine T qui font partie de la circonférence $|z - a| = r$ et qui séparent le point a'_r du point O, la coupure s'_r est, par définition, la première que rencontre la ligne L'. On voit de même que la coupure σ'_r ne saurait être intérieure au domaine τ_r. Donc les coupures s_r et s'_r se confondent, d'où il suit que les domaines t_r et t'_r sont identiques.

Donc tous les chemins aboutissant au point a sur lesquels $f(z)$ tend vers la limite α, restent, quelque petit que soit r, compris dans le même domaine t_r à partir de certains de leurs points, et, inversement, la fonction $f(z)$ tend vers la limite α sur tout chemin jouissant de cette propriété.

Supposons maintenant que les limites α et α' vers lesquelles tend $f(z)$ sur les lignes L et L' soient différentes entre elles. Les domaines τ_r et τ'_r seront alors extérieurs l'un à l'autre dès que r est inférieur à une certaine limite, d'où il suit que les domaines t_r et t'_r n'auront pas de point intérieur commun. Dans ce cas on convient de désigner le point $z = a$ auquel aboutit la ligne L et le point $z = a$ auquel aboutit la ligne L' comme deux points distincts, bien que de même affixe, de la frontière du domaine T.

En adoptant cette locution, nous pouvons résumer comme suit nos résultats relatifs aux points accessibles:

A tout point accessible de la frontière du domaine T correspond un point déterminé de la circonférence $|\zeta|=1$.

A deux points accessibles distincts, d'affixes différents ou égaux, correspondent toujours deux points distincts de cette circonférence.

15. Désignons par $\{a\}$ l'ensemble des points accessibles de la frontière du domaine T et par $\{\alpha\}$ l'ensemble des points correspondants de la circonférence $|\zeta|=1$. Comme nous l'avons déjà dit, l'ensemble $\{a\}$ est dense partout sur la frontière de T. Nous allons maintenant faire voir que *l'ensemble $\{\alpha\}$ est dense partout sur la circonférence $|\zeta|=1$.*

Soit en effet ζ_0 un point quelconque de cette circonférence, et soit z_0 une valeur-limite de la fonction $\varphi(\zeta)$ au point ζ_0 lorsqu'on s'en approche suivant le rayon $0\zeta_0$. Le point $z=z_0$ est nécessairement situé sur la frontière du domaine T.

Quelque petit que soit r, on peut choisir sur le rayon $0\zeta_0$ un point ζ' tel que la distance r' du point correspondant $z'=\varphi(\zeta')$ au point z_0 soit inférieure à r. La circonférence $|z-z_0|=r'$, qui passe par le point z', est divisée par la frontière de T en un nombre fini ou infini d'arcs distincts, dont nous désignerons par s' celui qui contient le point z'. Soit σ' la coupure du cercle $|\zeta|\leqq 1$ qui correspond à s'.

D'après le n° 9, on a pour tout point ζ de la coupure σ' l'inégalité

$$|\arg\zeta-\arg\zeta'|=|\arg\zeta-\arg\zeta_0|<4\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{r}}},$$

si $r<r_0$. Les extrémités de la coupure en question seront donc aussi voisines de ζ_0 qu'on voudra si l'on a choisi r suffisamment petit. Or ces points font partie de l'ensemble $\{\alpha\}$.

16. Il peut arriver que l'ensemble $\{\alpha\}$ ne comprenne pas tous les points de la circonférence $|\zeta|=1$. Chaque point de cette circonférence qui ne figure pas dans $\{\alpha\}$ est caractérisé par ce fait qu'il n'existe dans le cercle $|\zeta|<1$ aucun chemin continu aboutissant à ce point sur lequel la fonction $\varphi(\zeta)$ tendrait vers une limite déterminée. Soit ζ_0 un point de cette espèce.

Imaginons dans le plan des z un réseau de carrés dont les côtés, de longueur d inférieure à $q\sqrt{2}$, sont respectivement parallèles aux axes des coordonnées, l'un de ces carrés ayant pour centre le point O qui correspond au point $\zeta=0$. M. Carathéodory a démontré [1]) qu'on peut, à l'aide de ce réseau, définir un nombre fini de coupures du domaine T, chacune de longueur inférieure à $9d$, qui le divisent en domaines partiels dont celui qui renferme le point O n'atteint pas à la frontière de T, tandis que chacun des autres est limité par une de ces coupures et une portion de la frontière de T.

A ces coupures correspondent, dans le plan des ζ, des coupures divisant le cercle $|\zeta|\leqq 1$ en des domaines distincts, dont l'un, qui renferme le centre du cercle, n'atteint pas à

[1]) *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, page 340.

la circonférence $|\zeta| = 1$, tandis que chacun des autres est limité par un arc de cette circonférence et l'une des coupures en question. Les extrémités de ces coupures sont distinctes du point ζ_0, puisqu'elles figurent dans l'ensemble $\{\alpha\}$.

Parmi ces domaines du cercle $|\zeta| \leqq 1$ choisissons celui dont le contour comprend le point ζ_0. Nous désignerons par λ la coupure qui sépare ce domaine du reste du cercle, et par l la coupure correspondante du domaine T.

Imaginons maintenant qu'on applique le même procédé que ci-dessus en remplaçant successivement d par $\frac{d}{2}, \frac{d}{2^2}, \ldots, \frac{d}{2^n}, \ldots$. On arrive ainsi à une suite bien déterminée de coupures du domaine T,

$$l,\ l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots, \tag{6}$$

dont les longueurs tendent vers zéro et auxquelles correspondent, dans le cercle $|\zeta| \leqq 1$, des coupures

$$\lambda,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{6'}$$

dont les extrémités sont distinctes du point ζ_0 et qui séparent ce point du centre du cercle.

La longueur de la coupure l_n étant inférieure à la quantité $\frac{9d}{2^n}$, les théorèmes des n°s 8 et 9 nous apprennent que, dès que cette quantité est inférieure à la limite r_0 calculée page 18, les inégalités

$$|1-\zeta| < \frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{K}{q} + \log\frac{2^n K}{9d}}, \qquad |\arg\zeta - \arg\zeta_0| < 4 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{2\log\frac{K}{q}}{\log\frac{2^n K}{9d}}}$$

sont vérifiées pour tout point ζ de la coupure λ_n. Donc λ_n tend vers le point ζ_0 lorsque n augmente indéfiniment.

Les extrémités des coupures (6) admettent un ou plusieurs points-limites, tous situés sur la frontière du domaine T. Soit z_0 un de ces points, et, de z_0 comme centre, traçons une circonférence C_r de rayon $r\,(< q)$.

Il est facile de voir que, parmi les arcs de cette circonférence qui sont intérieurs au domaine T, il y en a au moins un auquel correspond dans le cercle $|\zeta| \leqq 1$ une coupure séparant le point ζ_0 du centre $\zeta = 0$. En effet, d'après ce qui précède, il y a parmi les coupures (6) une infinité qui sont intérieures au cercle C_r. Soient l_n une de ces coupures, P un point de l_n distinct de ses extrémités, et H le point correspondant de la coupure λ_n. Puisque les points P et O sont situés respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de C_r, l'un au moins des arcs de C_r qui sont intérieurs à T sépare ces points l'un de l'autre (*voir* la note page 20). Soit s un arc de C_r jouissant de cette propriété. La coupure correspondante du cercle $|\zeta| \leqq 1$ sépare le point H du point $\zeta = 0$, et, comme elle n'a aucun point commun avec la coupure λ_n, puisque s et l_n n'ont pas de point commun, elle sépare donc toute cette coupure, et par suite aussi le point ζ_0, du centre du cercle.

Soient, par ordre de longueurs décroissantes,

$$s_r^{(1)}, s_r^{(2)}, \ldots, s_r^{(n)}, \ldots \tag{7}$$

les coupures du domaine T faisant partie de la circonférence C_r auxquelles correspondent, dans le cercle $|\zeta| \leq 1$, des coupures

$$(7)' \qquad \sigma_r^{(1)}, \sigma_r^{(2)}, \ldots, \sigma_r^{(n)}, \ldots$$

séparant le point ζ_0 du centre du cercle.

Parmi les coupures (7)' il y a une qui est extérieure à toutes les autres, de sorte qu'elle les sépare du centre du cercle [1]). Soit σ_r cette coupure bien déterminée et s_r l'arc correspondant de la circonférence C_r, et désignons, d'autre part, par τ_r la portion que σ_r retranche du cercle $|\zeta| < 1$ et qui admet ζ_0 comme point de contour, et par t_r la portion correspondante du domaine T.

Pour toute valeur de r inférieure à q nous avons ainsi défini un domaine partiel t_r de T, limité par un certain arc s_r de la circonférence $|z - z_0| = r$ et une portion de la frontière de T, auquel correspond dans le cercle $|\zeta| \leq 1$ un domaine τ_r limité par la coupure σ_r, correspondant à s_r, et un arc de la circonférence $|\zeta| = 1$ qui comprend le point ζ_0.

Si $r' < r$, le domaine $\tau_{r'}$ fait nécessairement partie de τ_r, d'où il suit que le domaine $t_{r'}$ fait partie de t_r. En effet, puisque la coupure $s_{r'}$ et le point O sont respectivement intérieure et extérieur à la circonférence $|z - z_0| = r$, il y a certainement un arc de cette circonférence qui sépare $s_{r'}$ de O (*voir* page 20). La coupure correspondante du cercle $|\zeta| \leq 1$ sépare $\sigma_{r'}$ et par suite aussi le point ζ_0 du centre $\zeta = 0$, d'où il suit qu'elle figure parmi les coupures (7)'. Puisque, par définition, σ_r est celle de ces coupures qui sépare toutes les autres du centre du cercle, elle séparera donc aussi la coupure $\sigma_{r'}$ de ce point, ce qui démontre l'exactitude de notre assertion.

Donc, lorsque r décroît, les domaines t_r et τ_r se rétrécissent constamment. Puisque la coupure s_r tend vers le point z_0 lorsque r tend vers zéro, la coupure σ_r, d'après les théorèmes des n°s 8 et 9, tendra vers le point ζ_0, de sorte que le domaine τ_r se réduira à la limite à ce seul point. Comme plus haut (page 23) on en conclut que, pour $r = 0$, le domaine t_r se réduit à l'ensemble E_{ζ_0} des points ayant pour affixes les différentes valeurs-limites de la fonction $\varphi(\zeta)$ au point ζ_0, ou, en d'autres termes, au domaine d'indétermination de la fonction $\varphi(\zeta)$ relatif à ce point. Puisque cette fonction est, par hypothèse, indéterminée au point ζ_0, E_{ζ_0} est un ensemble infini, nécessairement continu.

L'ensemble E_{ζ_0} comprend évidemment le point z_0, puisque la coupure s_r tend vers ce point lorsque r décroît vers zéro. D'après ce qui précède, le point z_0 jouit de la propriété suivante:

Quelque petit qu'on se donne le rayon r, il existe toujours au moins un arc de la circonférence $|z - z_0| = r$ auquel corresponde, dans le cercle $|\zeta| \leq 1$, une coupure séparant le point ζ_0 du centre de ce cercle.

Appelons avec M. Carathéodory *points principaux* de E_{ζ_0} les points de cet ensemble qui partagent avec z_0 la propriété en question. Les autres points de E_{ζ_0} seront appelés *points accessoires.*

[1]) Ceci est évident s'il n'y a qu'un nombre fini de coupures (7)', puisqu'elles ne se coupent pas à l'intérieur du cercle, et résulte, dans le cas où le nombre de ces coupures est infini, des théorèmes des n°s 8 et 9, qui font voir que $\sigma_r^{(n)}$ tend vers le point ζ_0 lorsque n croît indéfiniment.

Les résultats obtenus ci-dessus pour le point z_0 s'appliquent évidemment à tout point principal de E_{ζ_0}, et nous pouvons donc adjoindre à chacun de ces points un domaine jouissant des mêmes propriétés que le domaine t_r défini ci-dessus.

17. Soit $\zeta = \zeta_0$ un point de la circonférence $|\zeta| = 1$ qui ne figure pas dans l'ensemble $\{\alpha\}$, et soit z_0 l'affixe d'un point principal quelconque de l'ensemble E_{ζ_0}. D'après les propriétés des points principaux, il existe dans un voisinage arbitrairement restreint du point ζ_0 des coupures qui le séparent du centre $\zeta = 0$ et sur lesquelles la différence $\varphi(\zeta) - z_0$ est inférieure en valeur absolue à telle quantité qu'on voudra. On en tire cette conclusion:

Sur un chemin continu quelconque du cercle $|\zeta| < 1$ qui aboutit au point ζ_0, la fonction $\varphi(\zeta)$ admet comme valeurs-limites les affixes de tous les points principaux de l'ensemble E_{ζ_0}.

M. CARATHÉODORY a démontré [1]) qu'il existe des chemins sur lesquels la fonction $\varphi(\zeta)$ n'admet d'autres valeurs-limites que celles-là, mais il n'est pas arrivé à définir ces chemins d'une manière précise. M. STUDY a émis la supposition [2]) que la propriété en question appartient au rayon aboutissant au point ζ_0. Enfin M. KOEBE a démontré [3]) que, si la supposition de M. STUDY est exacte, toute corde issue du point ζ_0 jouit de cette même propriété.

La méthode dont nous nous sommes servi systématiquement dans ce Mémoire va nous permettre de trancher cette question, en démontrant le théorème que voici:

Sur un chemin qui tend vers le point ζ_0 de telle manière qu'il reste, à partir d'un certain point, compris entre deux cordes issues de ζ_0, la fonction $\varphi(\zeta)$ ne saurait admettre comme valeur-limite l'affixe d'aucun point accessoire de l'ensemble E_{ζ_0}.

Au lieu de deux cordes issues du point ζ_0, envisageons deux arcs de cercle, Γ_1 et Γ_2, joignant ce point avec le point diamétralement opposé ζ_0' (*voir* la figure page 29). Si notre théorème n'était pas vrai, il existerait dans l'aire limitée par Γ_1 et Γ_2 une suite de points

$$(8) \qquad \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$$

tendant vers ζ_0, tels que les valeurs de la fonction $\varphi(\zeta)$ en ces points tendraient vers l'affixe z' d'un point accessoire de E_{ζ_0}. Les points correspondants

$$(8)' \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

du domaine T tendraient donc vers le point $z = z'$, qui est situé sur la frontière de ce domaine.

De z' comme centre traçons une circonférence de rayon $r (< q)$, et désignons par (s) les arcs de cette circonférence intérieurs au domaine T, et par (σ) les coupures correspondantes du cercle $|\zeta| \leq 1$. D'après la définition des points accessoires de E_{ζ_0}, il arrivera pour une certaine valeur r_0 de r qu'aucune des coupures (σ) ne sépare le point ζ_0 du point

[1]) *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Chapitre III.

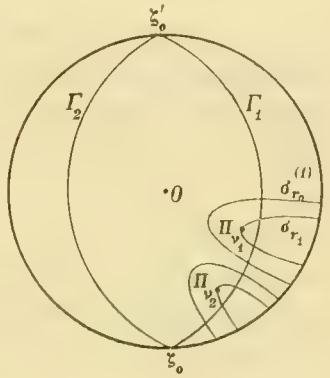
[2]) *Voir* le § 8 du travail cité au début.

[3]) *Ibidem*, page 127.

$\zeta = 0$. Cette même circonstance se présentera alors aussi pour toute valeur r inférieure à r_0, comme on le voit par un raisonnement répété déjà plusieurs fois.

Puisque les points (8)′ tendent vers le point z', ils seront, à partir d'un certain d'entre eux, P_{ν_1}, tous intérieurs au cercle $|z - z'| < r_0$. Soit r_1 la distance de P_{ν_1} au point z', et soit s_{r_1} celui parmi les arcs de la circonférence $|z - z'| = r_1$ interceptés par le domaine T qui contient le point P_{ν_1}. A s_{r_1} correspond dans le cercle $|\zeta| \leq 1$ une coupure, σ_{r_1}, qui passe par le point Π_{ν_1} et laisse du même côté les points $\zeta = \zeta_0$ et $\zeta = 0$.

Le point P_{ν_1} étant intérieur à la circonférence $|z - z'| = r_0$, il se trouvera nécessairement des arcs de cette circonférence qui séparent P_{ν_1} du point O. Les coupures correspondantes du cercle $|\zeta| \leq 1$ sépareront le point Π_{ν_1}, et par suite aussi σ_{r_1}, du centre du cercle, d'où l'on conclut, d'après les n°s 8 et 9, que leur nombre est nécessairement fini. Comme d'ailleurs ces coupures ne se rencontrent pas à l'intérieur du cercle, l'une d'elles sera extérieure à toutes les autres. Nous désignerons cette coupure bien déterminée par $\sigma^{(1)}_{r_0}$, et par $s^{(1)}_{r_0}$ l'arc correspondant de la circonférence $|z - z'| = r_0$.



Parmi les points (8) qui suivent Π_{ν_1}, soit Π_{ν_2} le premier situé du même côté de la coupure $\sigma^{(1)}_{r_0}$ que le centre du cercle, et soit r_2 la distance du point correspondant P_{ν_2} au point z'. En partant du point P_{ν_2}, définissons l'arc s_{r_2} de la circonférence $|z - z'| = r_2$ et l'arc $s^{(2)}_{r_0}$ de la circonférence $|z - z'| = r_0$ comme nous avions défini s_{r_1} et $s^{(1)}_{r_0}$ en partant du point P_{ν_1}. A s_{r_2} correspondra dans le cercle $|\zeta| \leq 1$ une coupure σ_{r_2} passant par le point Π_{ν_2}, à $s^{(2)}_{r_0}$ une coupure $\sigma^{(2)}_{r_0}$ séparant Π_{ν_2} et σ_{r_2} du centre $\zeta = 0$. Puisque $\sigma^{(1)}_{r_0}$ ne sépare pas Π_{ν_2} de ce point, les coupures $\sigma^{(1)}_{r_0}$ et $\sigma^{(2)}_{r_0}$ seront nécessairement distinctes, d'où il suit que l'arc $s^{(2)}_{r_0}$ est distinct de l'arc $s^{(1)}_{r_0}$, ce qui est essentiel pour la suite.

Choisissons maintenant, parmi les points qui suivent Π_{ν_2} dans la suite (8), le premier point Π_{ν_3} qui soit extérieur aux coupures $\sigma^{(1)}_{r_0}$ et $\sigma^{(2)}_{r_0}$. En suivant les mêmes principes que ci-dessus, nous trouverons une coupure σ_{r_3} passant par Π_{ν_3}, et une coupure $\sigma^{(3)}_{r_0}$ qui sépare Π_{ν_3} et σ_{r_3} du point $\zeta = 0$ et à laquelle correspond un arc $s^{(3)}_{r_0}$ de la circonférence $|z - z'| = r_0$ qui est distinct des arcs $s^{(1)}_{r_0}$ et $s^{(2)}_{r_0}$.

Ce procédé peut se poursuivre indéfiniment.

Puisque les arcs $s^{(1)}_{r_0}, s^{(2)}_{r_0}, \ldots$ de la circonférence $|z - z'| = r_0$ sont tous distincts entre eux, leurs longueurs tendent vers zéro. En désignant par z_n l'affixe du milieu de l'arc $s^{(n)}_{r_0}$, on voit donc que, quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, on pourra trouver un entier positif n_ε tel qu'on ait

$$(9) \qquad |\varphi(\zeta) - z_n| < \varepsilon \text{ sur la coupure } \sigma^{(n)}_{r_0} \text{ dès que } n > n_\varepsilon.$$

Puisque les arcs $s_{r_1}, s_{r_2}, \ldots$ tendent vers le point z', il existe d'autre part un entier positif n'_ε tel que l'on ait

(10) $$|\varphi(\zeta)-z'|<\varepsilon \text{ sur la coupure } \sigma_{r_n} \text{ dès que } n>n'_\varepsilon.$$

D'après le théorème établi au n° 9, les longueurs des arcs que les coupures σ_{r_n} et $\sigma^{(n)}_{r_n}$ interceptent de la circonférence $|\zeta|=1$ tendent vers zéro lorsque n augmente. D'autre part, comme σ_{r_n} passe par le point H_{ν_n} qui tend vers ζ_0 lorsque n croît, le même théorème nous apprend que les extrémités de la coupure σ_{r_n} tendront vers le point ζ_0. Il en sera donc de même des extrémités de la coupure $\sigma^{(n)}_{r_0}$ qui comprennent entre elles celles de σ_{r_n}. Puisque d'ailleurs aucune de ces coupures ne sépare le point ζ_0 du centre $\zeta=0$, nous pouvons de tout cela tirer cette conclusion que, à partir d'une certaine valeur de n, les extrémités des deux coupures σ_{r_n} et $\sigma^{(n)}_{r_0}$ feront toujours partie du même arc $\zeta_0\zeta'_0$ de la circonférence $|\zeta|=1$.

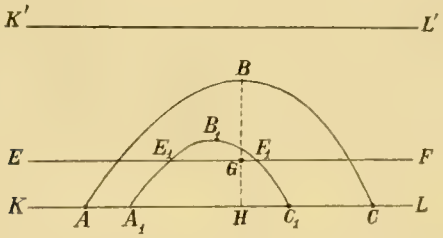
Après ces préliminaires, nous allons appliquer à la fonction $\varphi(\zeta)$ les considérations développées au n° 3. Afin de simplifier la discussion, effectuons d'abord un changement de variable en posant

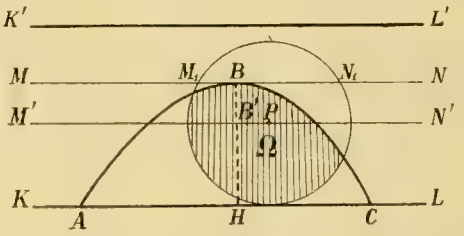
(11) $$u=\log\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\zeta'_0}.$$

Au cercle $|\zeta|\leq 1$ il correspondra, dans le plan des u, une bande de largeur π, limitée par deux parallèles KL et $K'L'$ à l'axe réel qui correspondent aux moitiés de la circonférence $|\zeta|=1$ situées respectivement à droite et à gauche du diamètre $\zeta_0\zeta'_0$ (*Cf.* la figure page 29). La fonction $\varphi(\zeta)$ se transformera en une fonction de u,

$$\varphi(\zeta)=\psi(u),$$

qui est régulière dans cette bande. Aux arcs Γ_1 et Γ_2 correspondront des parallèles à l'axe réel. Enfin les coupures $\sigma^{(n)}_{r_n}$ et σ_{r_n}, en admettant que leurs extrémités fassent partie de l'arc $\zeta_0\zeta'_0$ situé à droite du diamètre $\zeta_0\zeta'_0$, seront transformées en des lignes ABC et $A_1B_1C_1$





disposées comme l'indique la première des figures ci-dessus, où la droite EF correspond à l'arc Γ_1.

D'après les résultats (9) et (10) on a, en supposant que n est supérieur aux entiers n_ε et n'_ε,

(9)' $$|\psi(u)-z_n|<\varepsilon \text{ sur la ligne } ABC$$

et d'autre part

(10)' $$|\psi(u)-z'|<\varepsilon \text{ sur la ligne } A_1B_1C_1.$$

Or on peut conclure de la première de ces inégalités que, en tout point de la droite EF qui est intérieur au domaine U limité par la ligne ABC et le segment rectiligne AC, l'expression $|\psi(u)-z_n|$ reste inférieure à une certaine expression qui tend vers zéro avec ε et qui ne dépend pas de n.

Portons en effet, sur la plus grande ordonnée HB de la ligne ABC par rapport à l'axe KL, un segment HB' égal à $\frac{2}{3}\overline{HB}$, et menons par les points B et B' des parallèles MN et $M'N'$ à l'axe réel (*voir* la seconde figure ci-dessus). Puis choisissons dans le domaine U un point quelconque P situé sur la droite $M'N'$ ou au-dessus d'elle, et, de ce point comme centre, traçons un cercle tangent à la droite KL. Soit Ω la portion commune de ce cercle et du domaine U qui renferme le point P, et désignons enfin par M_1 et N_1 les points où le cercle en question coupe la droite MN.

La fonction $\psi(u)-z_n$ est régulière dans Ω, et son module est inférieur à K en tout point de ce domaine et inférieur à ε sur les arcs de son contour qui font partie de la ligne ABC. Puisque, d'après notre construction, l'arc M_1N_1 du cercle considéré, qui est extérieur au domaine Ω, comprend au moins un tiers de sa circonférence, nous pouvons en conclure, d'après le n° 3, qu'on a au point P

$$|\psi(u)-z_n| < K^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{12}$$

Cette inégalité subsiste donc en tout point du domaine U situé sur $M'N'$ ou au-dessus de cette droite.

Désignons par U' la portion du domaine U située au-dessous de la droite $M'N'$. En admettant que $\varepsilon < K$, d'où l'on tire $K^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}} > \varepsilon$, l'inégalité (12) sera vérifiée sur le contour de U', excepté le segment rectiligne AC. Dès lors, si l'on mène une parallèle $M''N''$ à l'axe réel à la distance $\frac{2}{3}HB' = \left(\frac{2}{3}\right)^2 HB$ de la droite KL, on conclut par le même raisonnement que ci-dessus que l'inégalité

$$|\psi(u)-z_n| < K^{\frac{2}{3}}\left(K^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = K^{2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)}\varepsilon^{\frac{1}{3^2}} \tag{12'}$$

est vérifiée en tout point du domaine U qui est situé sur $M''N''$ ou au-dessus de cette droite.

En poursuivant le même raisonnement on trouve que, quel que soit l'entier p, l'inégalité

$$|\psi(u)-z_n| < K'\varepsilon^{\frac{1}{3^p}} \tag{12''}$$

aura lieu pour tout point du domaine U dont la distance à la droite KL est supérieure ou égale à $\left(\frac{2}{3}\right)^p \overline{HB}$, K' désignant une constante positive qu'on peut égaler à K si $K \geq 1$, et à $K^{\frac{2}{3}}$ si $K < 1$.

La distance $\overline{HG}$ des droites EF et KL vérifie l'inégalité $\pi > H\overline{B} > H\overline{G}$. En déterminant l'entier p_0 par la condition

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p_0}\pi < HG,$$

on aura donc pour tout point de la droite EF compris dans le domaine U

$$|\psi(u)-z_n|<K'\varepsilon^{\frac{1}{3^{p_0}}}. \tag{13}$$

C'est l'inégalité que nous avions annoncée ci-dessus.

La ligne $A_1B_1C_1$ aura au moins deux points communs avec la droite EF (les points E_1 et F_1 dans la première figure page 30). En ces points les inégalités (10)′ et (13) auront donc lieu en même temps, d'où l'on déduit

$$|z_n-z'|<\varepsilon+K'\varepsilon^{\frac{1}{3^{p_0}}}.$$

Mais on a $|z_n-z'|=r_0$ pour toute valeur de n, de sorte qu'il vient

$$r_0<\varepsilon+K'\varepsilon^{\frac{1}{3^{p_0}}}.$$

Or cette conclusion implique une contradiction si l'on a choisi le nombre ε suffisamment petit, et notre théorème est donc exact.

D'après ce théorème, l'ensemble des points principaux de E_{ζ_0} se confond avec le domaine d'indétermination de la fonction $\varphi(\zeta)$ au point ζ_0 relatif à la portion du cercle $|\zeta|<1$ comprise entre deux arcs de cercles tels que Γ_1 et Γ_2 (*voir* la figure page 29). Il en résulte que les points principaux de E_{ζ_0} forment un ensemble continu, résultat qui avait déjà été obtenu par M. CARATHÉODORY par une autre voie (*Cf.* la première note page 28).

18. En terminant ce Mémoire nous allons enfin, ne fût-ce que pour prouver l'efficacité de notre méthode, établir un théorème nouveau relatif aux propriétés de la fonction $\varphi(\zeta)$ dans le voisinage d'un point de la circonférence $|\zeta|=1$ qui ne figure pas dans l'ensemble $\{\alpha\}$.

Soit ζ_0 un tel point, et soient z_0 et z_0' les affixes de deux points principaux distincts de l'ensemble E_{ζ_0}. Il existe alors dans le cercle $|\zeta|\leq 1$ deux suites de coupures tendant vers le point ζ_0:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots \tag{14}$$

et

$$\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_n', \ldots, \tag{14}'$$

qui vérifient les conditions suivantes:

1° Chacune de ces coupures sépare le point ζ_0 du point $\zeta=0$.

2° Chaque coupure sépare celle qui la suit du point $\zeta=0$.

3° Entre les coupures σ_n et σ_{n+1} de la suite (14) est toujours comprise la coupure σ_n' de la suite (14)′.

4° Sur σ_n la fonction $\varphi(\zeta)$ tend vers la limite z_0 et sur σ_n' vers la limite z_0' lorsque n augmente indéfiniment.

Traçons dans le cercle $|\zeta|<1$ un arc de cercle Γ joignant le point ζ_0 avec le point diamétralement opposé ζ_0', et désignons par γ_n le *dernier* point où cet arc rencontre la cou-

pure σ_n, et par γ_{n+1} le *premier* point où il rencontre la coupure σ_{n+1}, en allant de ζ_0 à ζ_0'. Nous allons démontrer ce théorème:

Le nombre M étant donné aussi grand qu'on voudra, on aura, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\left|\frac{\gamma_n-\zeta_0}{\gamma_{n+1}-\zeta_0}\right|>M,$$

quel que soit l'arc Γ.

En particulier, les rapports

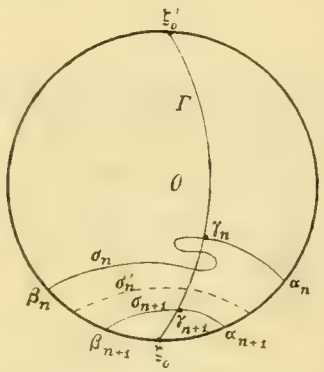
$$\left|\frac{\alpha_n-\zeta_0}{\alpha_{n+1}-\zeta_0}\right| \quad et \quad \left|\frac{\beta_n-\zeta_0}{\beta_{n+1}-\zeta_0}\right|,$$

où α_n et β_n désignent les extrémités de la coupure σ_n, tendront vers l'infini lorsque n croît indéfiniment.

En admettant que ce théorème n'est pas vrai, il existera un nombre positif M_0 tel que, quelque grand qu'on se donne l'entier n_0, on puisse trouver un entier n supérieur à n_0 et un arc Γ pour lesquels l'inégalité

$$\left|\frac{\gamma_n-\zeta_0}{\gamma_{n+1}-\zeta_0}\right|<M_0. \tag{15}$$

soit vérifiée.



Cette fois encore nous nous servirons de la substitution (11). A la portion du cercle $|\zeta|\leq 1$ comprise entre les coupures σ_n et σ_{n+1} il correspondra, dans le plan des u, une aire limitée par deux parallèles KL et $K'L'$ à l'axe réel à la distance π l'une de l'autre, et par deux lignes A_nB_n et $A_{n+1}B_{n+1}$ qui les réunissent, et qui correspondent respectivement aux coupures σ_n et σ_{n+1}. L'arc Γ sera transformé en une parallèle EF à l'axe réel, laquelle, en allant de gauche à droite, rencontrera la ligne $A_{n+1}B_{n+1}$ pour la première fois au point G_{n+1}, correspondant à γ_{n+1}, et la ligne A_nB_n pour la dernière fois au point G_n qui correspond à γ_n (*voir* la première figure page 34).

La longueur du segment rectiligne G_nG_{n+1} est égale à

$$\log\left|\frac{\gamma_n-\zeta_0}{\gamma_{n+1}-\zeta_0}\cdot\frac{\gamma_{n+1}-\zeta_0'}{\gamma_n-\zeta_0'}\right|.$$

Puisque le rapport

$$\left|\frac{\gamma_{n+1}-\zeta_0'}{\gamma_n-\zeta_0'}\right|$$

tend vers l'unité lorsque n augmente, on aura donc d'après (15), en désignant par l une constante supérieure à $\log M_0$,

$$\overline{G_nG_{n+1}}<l,$$

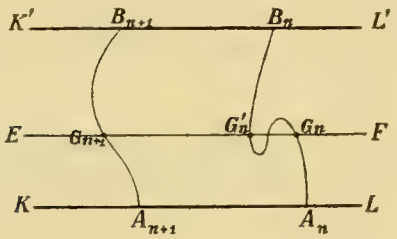
pourvu qu'on ait choisi n_0 suffisamment grand.

En admettant que la distance des droites EF et $K'L'$ soit $\geq \frac{\pi}{2}$, désignons par G'_n et G'_{n+1} les premiers points, à partir de B_n et B_{n+1}, où les lignes B_nA_n et $B_{n+1}A_{n+1}$ rencontrent EF (dans la figure le point G'_{n+1} se confond avec G_{n+1}). On aura

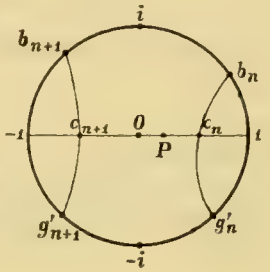
$$\overline{G'_nG'_{n+1}} < l. \tag{16}$$

Faisons maintenant la représentation conforme de la bande comprise entre les droites EF et $K'L'$ sur le cercle $|v|<1$, de façon que ces droites correspondent respectivement aux moitiés inférieure et supérieure de la circonférence $|v|=1$ et que le milieu du segment

Plan des u



Plan des v



$G'_nG'_{n+1}$ corresponde au point $v=-i$. Soient $b_ng'_n$ et $b_{n+1}g'_{n+1}$ les lignes du cercle $|v|<1$ correspondant à $B_nG'_n$ et $B_{n+1}G'_{n+1}$. En tenant compte de l'inégalité (16) et de ce que la distance des droites EF et $K'L'$ est $\geq \frac{\pi}{2}$, on conclut aisément que la longueur de l'arc $g'_ng'_{n+1}$, lequel admet comme milieu le point $-i$, est inférieure à $\theta\pi$, où θ désigne un nombre positif plus petit que l'unité qui reste le même quelque grand que soit n_0 (*voir* la seconde figure ci-dessus).

Posons $\varphi(\zeta)=\psi(u)=\chi(v)$ et considérons la fonction $\chi(v)-z_0$. Elle est régulière dans le cercle $|v|<1$, et son module est inférieur à K en tout point de ce cercle et inférieur à tel nombre ε qu'on voudra sur les lignes $b_ng'_n$ et $b_{n+1}g'_{n+1}$ si l'on a choisi l'entier n_0 suffisamment grand. Or chacune de ces lignes retranche de la circonférence $|v|=1$ un arc dont la longueur est $\geq \frac{\pi}{2}(1-\theta)$. En déterminant l'entier p par la condition

$$\frac{2\pi}{p} < \frac{\pi}{2}(1-\theta),$$

on peut en conclure que l'inégalité

$$|\chi(v)-z_0| < K^{\frac{p-1}{p}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

a lieu pour tout point P de l'axe réel compris entre le dernier point, c_{n+1}, où l'on rencontre la ligne $b_{n+1}g'_{n+1}$ et le premier point, c_n, où l'on rencontre la ligne $b_ng'_n$ en suivant l'axe réel depuis $v=-1$ à $v=1$. En effet, en faisant la représentation conforme du cercle $|v|<1$ sur lui-même de telle façon que les points -1 et 1 restent invariants tandis que le point P soit transféré au centre du cercle, on constate aisément, à l'aide des propriétés bien con-

nues des substitutions linéaires, que l'une au moins des lignes qui correspondront à $b_n g'_n$ et $b_{n+1} g'_{n+1}$ retranchera de la circonférence du cercle un arc de longueur supérieure à $\frac{\pi}{2}(1-\theta)$, et l'exactitude de notre assertion résulte donc du n° 3.

Au segment $c_n c_{n+1}$ de l'axe réel du plan des v correspond, dans le plan des u, un segment rectiligne parallèle à l'axe réel qui joint les lignes $A_n B_n$ et $A_{n+1} B_{n+1}$, et par suite, dans le plan des z (*voir* la figure page 33), un arc de cercle joignant les coupures σ_n et σ_{n+1}. D'après ce qui précède, l'inégalité

$$|\varphi(\zeta) - z_0| < K^{\frac{p-1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

est donc vérifiée en tout point de cet arc. Mais celui-ci rencontrera nécessairement la coupure σ'_n, sur laquelle est vérifiée l'inégalité

$$|\varphi(\zeta) - z'_0| < \varepsilon$$

si l'on a choisi l'entier n_0 suffisamment grand. Aux points d'intersection de ces lignes les deux inégalités ci-dessus auront donc lieu à la fois, d'où l'on tire

$$|z_0 - z'_0| < \varepsilon + K^{\frac{p-1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

Or cette conclusion implique une contradiction si l'on a pris ε suffisamment petit, d'où suit l'exactitude de notre théorème.

(ACHEVÉ D'IMPRIMER LE 17 JUILLET 1915)

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM XLVI. N:o 5.

OM

KVARTSENS TERMISKA DILATATION

AF

KARL F. LINDMAN.

HELSINGFORS 1916,
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

Innehållsförteckning.

I. Inledande översikt 5

a) Den optiska interferensmetoden för dilatometriska undersökningar . . . . . „

b) Resultaten av tidigare undersökningar av kvartsens termiska dilatation och ändamålet med den föreliggande undersökningen 9

II. Försöksanordning I 14

a) Interferensapparaten (kvartsarrangemanget) . . . . . „

b) Abbes dilatometer 16

c) Upphettningsapparaten 19

III. Försöksanordning II 21

a) Upphettningsapparaten och temperaturmätningen . . . . . „

b) Interferensapparaten 25

c) Pulfrichs interferensmätningsapparat 26

IV. Bestämning av den till interferensapparaten hörande kvartsringens medelhöjd före och efter en starkare upphettning samt revision av de vid försöken använda gula kvicksilverlinjernas våglängder 28

a) Metod . . . . . „

b) Observationer, utförda enligt försöksanordning II 33

c) Observationer, utförda enligt försöksanordning I 46

V. Undersökning av kvartsens termiska dilatation i optiska axelns riktning 48

a) Beräkningsmetod . . . . . „

b) Observationer, utförda enligt försöksanordning II 52

c) Observationer, utförda enligt försöksanordning I 64

d) Jämförelse med andra observatörers resultat 66

VI. Undersökning av kvartsens termiska dilation i en mot optiska axeln vinkelrät riktning . . . 69

VII. Sammanfattning av resultaten (Zusammenfassung der Ergebnisse) 80

Rättelser och tillägg.

På sid. 9 bör i stället för *Mallard* och *Le Chatelier* stå endast det senare namnet.

På sid. 13, rad. 3 uppifrån avses med ordet „bestämningar" sådana, som utförts enligt interferensmetoden (*Le Chatelier's* på sid. 9 nämnda approximativa mätningar hänförde sig även till utvidgningen ⊥ mot axeln).

På sid. 24, rad. 11 uppifrån, bör stå $-3{,}3°$ i stället för $-3{,}0°$.

„ „ 44, „ 9 „ „ „ förekomna i st. f. förkomna.

I. Inledande översikt.

a) Den optiska interferensmetoden för dilatometriska undersökningar.

1. Vid mätning av fasta kroppars lineära utvidning genom värme hava huvudsakligen tvenne principiellt olika förfaringssätt kommit till användning. Enligt det ena av dessa förstoras utvidgningen i möjligast hög grad medelst ett system av hävstänger (dels mekaniska, dels optiska), varvid den verkliga utvidgningen beräknas med kännedom om hävstångsarmarnas (resp. ljusvisarnas) längd. Enligt det andra förfarandet mätes längdutvidgningen direkt med tillhjälp av något precisionsinstrumeut, som tillåter en möjligast noggrann bestämning av små längder. Den förstnämnda metoden lider av olägenheten, att det icke är möjligt att med någon synnerligen stor noggrannhet bestämma den genom hävstängerna alstrade förstoringen. Med tillhjälp av ett mikroskop, kombinerat med en mikrometerskruv, eller medelst instrument, som grunda sig på användning av optisk interferens, har man däremot enligt det senare nämnda förfarandet uppnått en väsentligt större noggrannhet vid dilationsmätningar. Indirekt kan man även bestämma en isotrop fast kropps lineära utvidgning ganska noggrant, om man först — genom vägning av kroppen i en vätska av bekant utvidgning (destillerat vatten) — bestämmer dess kubiska utvidgning.

Om substansen kan erhållas endast i form av små stycken eller om den är av anisotrop karaktär, kan någon annan metod för bestämning av dess lineära utvidgning i avseende å noggrannhet icke tävla med den av JERICHAU [1]) härrörande och sedermera förnämligast av FIZEAU [2]) och BENOÎT [3]) tillämpade optiska interferensmetoden. Principen för densamma är som

[1]) E. B. JERICHAU, Forhandlinger ved de skandinaviske naturforskeres andet möde i Kjöbenhavn 1840, pag. 234. — Pogg. Ann. Bd. *54*, pg. 139; 1841. Sin enligt interferensprincipen konstruerade dilatometer benämnde JERICHAU „termomikrometer".

[2]) Resultaten av FIZEAU's mätningar äro nedlagda i talrika avhandlingar i Annales de chimie et de physique och Comptes rendus under åren 1862—1869. Den ifrågavarande interferensmetoden tillskrifves vanligen FIZEAU och någon hänvisning till några föregångare har jag icke heller påträffat i FIZEAU's arbeten. Utom af JERICHAU har metoden dock före FIZEAU blivit använd även av A. J. ÅNGSTRÖM (Pogg. Ann. *86*, p. 228; 1851).

[3]) J. R. BENOÎT, „Études sur l'appareil de Fizeau pour la mesure des dilatations", Travaux et mémoires du bureau intern. des poids et mesures, *1.*, 1881 och „Nouvelles études etc." ibid. *6*, 1888.

bekant följande. Ett luftskikt, begränsat av tvenne speglande ytor, belyses med monokromatiskt ljus, varvid alstras genom ljusvågornas interferens det under namn av *Newtons ringar* bekanta optiska fenomenet. Förändras luftskiktets tjocklek, inträder en vandring av interferensstrimmorna på det sätt, att en tjockleksförändring, lika med en halv våglängd av det använda ljuset, motsvaras av en så stor förskjutning av interferensfransarna, att var och en av dem nu komma att intaga den plats, som den närmast föregående förut innehade. Storleken av denna förskjutning sammanfaller med vad man benämner en *strimbredd* („Streifenbreite" = avståndet mellan motsvarande punkter hos två närbelägna mörka linjer). Genom räkning av det antal strimmor, som vandrat förbi ett på den ena speglande ytan anbragt märke, kan man sålunda med kännedom om det vid försöket använda ljusets våglängd med stor noggrannhet bestämma den förändring, luftskiktets tjocklek undergått.

Huvudbeståndsdelen av FIZEAU's dilatometer utgjordes av en av tre lika långa stålskruvar uppburen planparallell skiva av stål med polerad yta *(„Fizeau's bord")*. De genom den horisontellt ställda skivan gående vertikalt riktade skruvarna uppburo vidare en glasskifva, vars övre yta var plan och undre yta svagt konvex. Den sistnämda ytan och stålskivans övre yta begränsade då ett luftskikt, som vid belysning ovanifrån med natriumljus visade ett system av Newton'ska ringar, vilkas läge bestämdes med tillhjälp av ett system i den konvexa glasytan ingraverade märken. (JERICHAU hade för samma ändamål, d. v. s. för fixeringen av ringarnas läge, betjänat sig av ett förskjutbart mikroskop). Varje temperaturvariation medförde en förändring av skrufvarnas längd och således även av luftskiktets tjocklek, vilken kunde bestämmas genom observation av interferensstrimmornas förskjutning. Sedan stålskruvarnas utvidgningskoefficient på detta sätt blivit bestämd, erbjöd det icke någon svårighet att bestämma andra ämnens utvidgning relativt stålets och på grund därav även deras absoluta utvidgning. Ett planslipat och polerat stycke av det ämne, som var föremål för undersökning, placerades på det „FIZEAU'ska bordet" mitt emellan stålskruvarna, varvid luftskiktet mellan dess övre plana yta och glaslinsen tjänade såsom interferensskikt. Genom vridning av skruvarna kunde detta skikt göras mycket tunt, vilket var av fördel för interferensbildens tydlighet.

Med tillhjälp av sin dilatometer utförde FIZEAU själv ett stort antal mätningar av fasta kroppars (speciellt kristallers) termiska utvidning. Dessa försök återupptogos senare av BENOÎT (l. c.), som i „Bureau international des poids et mesures" i Breteuil med en i tekniskt avseende förbättrad apparat utförde en stor mängd dilationsbestämningar. FIZEAU's stålbord (stålskivan jämte skruvarna), vilket på grund av stålets termiska efterverkan icke var fullt tillförlitligt, ersattes av BENOÎT med ett dylikt av platinairidium. Upphettningskärlet, som inneslöt interferensapparaten, förbättrades även av BENOÎT, så att regleringen och mätningen av temperaturen kunde ske betydligt noggrannare än förut. BENOÎT's klassiska undersökningar bilda, såsom SCHEEL[1]) framhållit, en väsentlig beståndsdel av vår kännedom om fasta kroppars termiska utvidgning.

2. Metoden har sedermera i flere väsentliga punkter ytterligare fullkomnats. Emedan de skilda interferenslinjerna, som vandra genom synfältet förbi de i täckglaset inristade mär-

[1]) K. SCHEEL, Naturw. Rundschau, p. 157; 1907.

kena, icke skilja sig från varandra i något avseende, är det vid den FIZEAU-BENOÎT'ska anordningen nödigt att direkt räkna dem, vilket åter oftast är mycket mödosamt och stundom till och med omöjligt[1]). Förtjänsten av att genom tillämpning av en sinnrik idé hava gjort det direkta räknandet av de rörliga interferensstrimmorna åtminstone till en viss grad överflödigt tillkommer ABBE. I stället för att använda ljus av en enda våglängd använder man enligt ABBE's metod monokromatiskt ljus av två eller flere våglängder, varvid de till de olika färgade interferensbilderna hörande mörka linjernas läge i varje särskilt fall bestämmes genom mikrometrisk mätning. För möjliggörande härav måste interferensstrimmorna hava en rätlinig form, vilket är fallet, om luftskiktets båda begränsningsytor (således även täckglasets undre yta) äro plana och hava en ringa lutning mot varandra. Betecknas antalet av de till de olika färgade interferensbilderna hörande mörka linjer, som vandrat förbi ett i synfältet befintligt märke med $m_1 + r_1$, $m_2 + r_2$, o. s. v., varvid m_1, $m_2, \cdots$ äro hela tal och r_1, $r_2, \cdots$ egentliga bråk, samt de motsvarande färgernas våglängder med λ_1, $\lambda_2, \cdots$, har man, alldenstund luftskiktets tjockleksförändring Δd är oberoende av den använda spektralfärgen:

$$(m_1 + r_1)\frac{\lambda_1}{2} = (m_2 + r_2)\frac{\lambda_2}{2} = \cdots = \Delta d.$$

Genom den mikrometriska mätningen kunna bråken r_1, r_2, o. s. v. bestämmas med stor noggrannhet. Man kan då i de flesta fall och särskilt, om tjockleksförändringen på förhand är *närmelsevis* bekant (vilket den vanligen är), utan svårighet finna de hela tal m_1, m_2, o. s. v., som satisfiera de nyssnämnda likheterna. Denna idé förverkligade ABBE genom en av den av honom ledda optiska verkstaden CARL ZEISS i Jena år 1884 förfärdigad dilatometer med därtill hörande interferensmätningsapparat[2]), vilken sedermera modifierats av PULFRICH, så att den blivit användbar även för andra ändamål än för dilatometriska försök. Till en beskrivning av dessa apparater skola vi senare återkomma.

Utom mätningsmetoden har även den egentliga interferensapparaten undergått förbättring. Icke ens det av BENOÎT använda platinairidiumbordet visade sig nämligen såsom fullt homogent, på grund varav detta av PULFRICH (vetenskaplig medarbetare i firman CARL ZEISS) ersattes med en ring och en bottenplatta av *kvarts* — alltså av ett ämne med (såsom man antog) möjligast konstanta fysikaliska egenskaper och ringa termisk utvidgning, vilket sedermera även av Fysikalisk-tekniska riksanstalten i Charlottenburg antagits till normalsubstans för dilatometriska bestämningar. En närmare beskrivning av PULFRICH's kvartsarran-

[1]) Utom att vid långsam uppvärmning, sådan man vid dessa försök städse måste använda, strimmornas vandring i allmänhet sker mycket långsamt, förekommer det, att termiska efterverkningar helt och hållet omöjliggöra en till dessa verkningars upphörande fortsatt observation av interferensbilden.

[2]) Det första av ABBE konstruerade försöksinstrumentet av detta slag jämte några därmed utförda mätningar har beskrivits av WEIDMANN i Wiedem. Ann., *38*, p. 453; 1889. En utförlig beskrivning av apparaten i dess definitiva form och av den ifrågavarande mätningsmetoden har givits av PULFRICH i Zeitschr. f. Instrumentenkunde, *13*, p. 365; 1893. — Oberoende av ABBE synes även MACÉ DE LÉPINAY (Journal de physique, p. 405; 1886) hava funnit idén, att genom samtidig användning av monokromatiskt ljus av olika våglängder bestämma genomskinliga lamellers tjocklek. Utan beaktande af ABBE's prioritet har BENOÎT i ett senare arbete (Journ. de Physique, 7, p. 57; 1898) beskrivit ett med ABBE's metod fullständigt överensstämmande, för dilatometriska försök avsett, förfarande.

gemang, vilket första gången användes av REIMERDES [1]), följer senare (p. 14). I stället för att på tidigare antydt sätt bestämma andra ämnens utvidgning relativt normalsubstansens kan man även, såsom PULFRICH [2]) framhållit — särskilt om det gäller metaller — förfärdiga ringformiga stycken av dessa ämnen och bestämma dessas absoluta utvidgning genom interferensförsök på alldeles samma sätt som kvartsringens eller de av FIZEAU använda stålskruvarnas [3]).

Slutligen har även en s. k. *kompensationsinterferensdilatometer* blivit konstruerad och använd af TUTTON [4]) (i Oxford). Kompensationen åstadkoms genom användning av en aluminiumcylinder av bestämd tjocklek, vilken jämte den ovanom eller under densamma placerade kristallskiva, som skulle undersökas, lades mellan de av platinairidium bestående skruvarna hos ett interferensbord av samma konstruktion som det av BENOÎT använda. Aluminiumcylindern var av sådan höjd, att dess termiska utvidgning i det allra närmaste överensstämde med de ovanom bordskivan stående (närmare 3 gånger så höga) skruvdelarnas, tillföljd varav interferensstrimmornas vid en temperaturändring inträdande förskjutning [5]) åtminstone i huvudsak åstadkoms av kristallskivan ensam. På grund av den jämförelsevis stora förändring av luftskiktets tjocklek, som kristallskivans utvidgning medförde, trodde sig TUTTON härigenom hava vunnit en betydande ökning av dilatationsbestämningens noggrannhet, vilket han ansåg vara av vikt, emedan kristallskivor av större tjocklek än c:a 5 mm i många fall icke stå att erhålla. Denna kompensationsmetod underkastades emellertid en ingående kritik av PULFRICH [6]), varvid denne kom till det resultat, att den ifrågavarande kompensationen, som för övrigt utan vidare även kan tillämpas vid användning av de tidigare nämnda interferensdilatometrarna, i stället för att öka noggrannheten minskar densamma [7]) och följaktligen endast innebär en onödig komplikation av försöksanordningen. Anspråken på en genom kompensationen alstrad större noggrannhet uppgavs sedermera även av TUTTON själv [8]), varvid han dock förtfarande ansåg kompensationsmetoden för den enda möjliga i sådana fall, då kristallpreparatet är mycket litet eller då dess yta på grund av ämnets natur icke kan givas en nödig polityr. Det är dock tydligt, att man även i dessa sistnämnda fall mycket väl kan komma till rätta

---

[1]) F. REIMERDES, Unters. über die Ausdehnung des Quarzes durch die Wärme (Inaug. Dissert., Jena 1896).

[2]) Se det i not 2, p. 7 citerade arbetet av PULFRICH (p. 368).

[3]) Detta förfarande har använts av AYRES (Physical review, p. 38; 1905) för bestämning av silvrets och aluminiumets utvidgning vid låga temperaturer. Ehuru denne i sin publikation i ett annat sammanhang hänvisar till det arbete av PULFRICH, i vilket det ifrågavarande förfarandet beskrives, utgiver han dock detta förfarande såsom en av honom själv införd fullkomligt ny metod.

[4]) A. E. TUTTON, Phil. Trans., *191*, p. 313; 1898 och Zeitschr. f. Krystallographie etc., *30*, p. 529; 1899.

[5]) Beträffande bestämningen av denna, inskränkte sig TUTTON till ett direkt räknande av antalet förskjutna strimmor.

[6]) C. PULFRICH, Zeitschr. f. Kryst etc. *31*, p. 372; 1899.

[7]) Användningen av aluminiumkompensatorn inför i försöksanordningen en ny felkälla, som enligt vad PULFRICH fann, åstadkommer, att det värde, som erhålles för det undersökta ämnets dilatationskoefficient, blir behäftat med ett åtminstone dubbelt så stort fel som det utan kompensation under för öfrigt lika förhållanden erhållna värdet (antalet genom synfältet vandrande interferensstrimmor invorkar icke i det av PULFRICH betraktade fallet på noggrannheten, emedan icke de procentuella, utan endast de absoluta felen här göra sig gällande).

[8]) A. E. TUTTON, Zeitschr. f. Kryst. etc, *31*, p. 383; 1899.

utan kompensation. Använder man t. ex. den av PULFRICH införda kvartsringen, vars geometriska axel är parallell med optiska axeln hos kristallen, kan man genom kombination av den kristallskiva, som skall undersökas, med en vinkelrätt mot optiska axeln skuren kvartsskiva av lämplig tjocklek, utan svårighet erhålla ett tillräckligt tunt och av speglande ytor begränsat interferensskikt (ifall kristallpreparatets yta saknar den nödiga polituren, placeras kvartsskivan — på samma sätt som TUTTON i dylika fall förfor med aluminiumskivan — *på* kristallpreparatet). Då, såsom här förutsatts, hjälpplattan (kvartsskivan) består av samma ämne som den täckglaset uppbärande ringen (båda böra helst vara skurna av samma stycke), införes härigenom icke någon inhomogenitet hos interferensapparaten.

b) Resultaten av tidigare undersökningar av kvartsens termiska dilatation och ändamålet med den föreliggande undersökningen.

3. På grund av kvartsens redan tidigare nämnda antagande till normalsubstans för dilatometriska bestämningar och dess under senare tid allt allmännare vordna användning för flere såväl vetenskapliga som tekniska ändamål är det av stor vikt att med största möjliga noggrannhet och inom en möjligast vid temperaturintervall känna dess termiska utvidgning.

En undersökning av kvartsens dilatation från rumtemperatur ända upp till c:a 1000° C har utförts av MALLARD och LE CHATELIER[1]) år 1889, men detta enligt en fotografisk metod, som icke tillät att på långt när uppnå en för precisionsmätningar erforderlig grad av noggrannhet[2]). Deras försök ledde emellertid till den viktiga upptäckten, att kvartsen vid en temperatur av c:a 570° utvidgas diskontinuerligt, i det att utvidgningen, som särskilt från och med 400° hastigt tillväxer, vid nyssnämnda temperatur byter om förtecken, d. v. s. övergår i kontraktion. Detta resultat har sedermera bekräftats av v. SAHMEN och TAMMANN[3]) genom försök med tillhjälp av en självregistrerande dilatograf, vilka försök likaledes blott hade till ändamål att påvisa det karaktäristiska hos kvartsens (och några andra kristallers) dilatation. Inflexionspunkten utgör enligt dessa forskare den temperatur, vid vilken kvartsen övergår i ett annat tillstånd (polymorfismen är som bekant en mycket allmänt förekommande egenskap hos ämnen i kristalliniskt tillstånd). Olika stycken bergkristall visade en något större olikhet i avseende a „omvandlingstemperaturen" ävensom den kontinuerliga utvidgningens storlek, än vad observationsmetodens felgränser tillåto, vilket bevisar, att kvartsens dilatation icke är så oberoende av härstamningen, som man vid dess införande såsom normalsubstans för dilatometriska bestämningar förutsatt. I hvarje händelse synes en dylik användning av kvarts såsom normalkropp icke kunna ifrågakomma vid dilatationsförsök i närheten av detta ämnes omvandlingstemperatur.

De noggrannaste mätningarna äro självfallet de, vilka utförts enligt den optiska interferensmetoden och vilkas resultat enklast kunna sammanfattas genom anförande av de

---

[1]) MALLARD och LE CHATELIER, Comptes rendus, *108*, p. 1046.

[2]) Längdförändringen hos en parallellt med optiska axeln skuren kvartsstav av 10 cm:s längd bestämdes direkt med tillhjälp av tvenne på stavens ändor inställda fotografiska apparater, vilkas ljuskänsliga plåtar voro försedda med $^1/_{10}$ mm-skalor.

[3]) R. v. SAHMEN och G. TAMMANN. Ann. d. Phys., *10*, p. 879; 1903.

värden, som genom dem erhållits för de i de allmänna dilationsformlerna ingående konstanterna.

Betecknas längden av en fast kropp (resp. avståndet mellan tvenne punkter hos denna) vid 0° med L_0 och vid $t°$ med L, kan man som bekant uttrycka sambandet mellan dessa kvantiteter genom formeln

$$L = L_0 (1 + at + bt^2 + ct^3 + \cdots).$$

Den s. k. sanna lineära utvidgningskoefficienten (α) vid $t°$ bestämmes då genom likheten

$$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dt} = a + 2bt + 3ct^2 + \cdots,$$

medan medelutvidgningskoefficienten (α') mellan tvenne temperaturer t_1 och t_2 definieras genom formeln

$$\alpha' = \frac{1}{L_0}\frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1},$$

i hvilken L_1 och L_2 beteckna de värden på L, som motsvara temperaturerna t_1 och t_2.

Inom icke alltför vida temperaturintervaller kan, enligt vad erfarenheten visat, sambandet mellan L, L_0 och t med tillräcklig noggrannhet uttryckas genom en kvadratisk interpalationsformel av ovan angiven form, d. v. s. de två första i formeln för L ingående temperaturkoefficienterna (a och b) äro då tillräckliga. Medelutvidgningskoefficienten mellan två temperaturer, vilkas medelvärde är $t°$, är i detta fall $= a + 2bt$ och således även lika med den sanna utvidgningskoefficienten för temperaturen $t°$. Genom att experimentellt bestämma medelutvidgningskoefficienterna för särskilda temperaturintervaller kan man sålunda lätt erhålla värdena på a och b.

För kvartsens dilatation *parallellt med optiska* axeln hava de till en kvadrisk formel för L hörande konstanterna a och b enligt de tidigare (p. 5 o. 8) nämnda undersökningarna af FIZEAU, BENOÎT och REIMERDES följande värden [1]):

FIZEAU:	$a = 6{,}99 \cdot 10^{-6}$,	$b = 0{,}01025 \cdot 10^{-6}$,	gällande från + 10° till c:a + 80° C
BENOÎT:	$a = 7{,}161 \cdot 10^{-6}$,	$b = 0{,}00801 \cdot 10^{-6}$,	„ „ + 6° „ „ „ „ „
REIMERDES:	$a = 6{,}925 \cdot 10^{-6}$,	$b = 0{,}00845 \cdot 10^{-6}$,	„ „ + 5° „ „ + 220° „

Såsom härav framgår, är REIMERDES' värde på a icke oväsentligt mindre än FIZEAU's och BENOÎTS motsvarande värden. Denna differens kan enligt REIMERDES icke gärna bero

[1]) De av BENOÎT funna värdena äro här (i enlighet med uppgifterna i Recueil de constantes physiques, p. 185; 1913) hänförda till normaltermometern. I avsaknad av tillräckligt noggranna data angående de av FIZEAU använda termometrarna, har jag ansett det ändamålslöst att söka utföra en reducering av FIZEAU's värden (anförda här enligt Recueil de const. phys., p. 181) till av normaltermometern angivna temperaturer (tillförlitligast äro dessa värden för en temperatur av c:a 40°). Vad REIMERDES och andra observatörers (bland dem även förf:s) i detta arbete anförda värden på dilatationskonstanterna beträffar, erfordra dessa icke någon dylik reducering, emedan de grunda sig på observationer, som gjorts med termometrar, komparerade med gastermometern.

på en felaktig justering av begränsningsytornas ställning till optiska axeln hos de undersökta kvartsstyckena, ity att ett fel av denna art av cirka 15°, som då vore erforderligt, väl måste anses uteslutet (i motsats till REIMERDES giva FIZEAU och BENOÎT dock icke några uppgifter angående noggrannheten av optiska axelns överensstämmelse med kristallskivans ytnormal). Någon förklaring av den ifrågavarande differensen mellan värdena på a ser sig REIMERDES icke i stånd att giva. Såvida denna avvikelse icke beror på en av den olika härstamningen härrörande specifik olikhet hos de undersökta kvartsstyckena — vilket REIMERDES icke ansåg sannolikt — återstår såsom enda möjliga förklaringsgrund en av de olika försöksanordningarna (temperaturbestämningarna m. m.) betingad olika grad av noggrannhet.

Då man vid riksanstalten i Charlottenburg beslöt sig för att införa kvarts såsom normalsubstans för dilatationsbestämningar, var det av nyss anförda grunder nödvändigt att göra kvartsens dilatation i optiska axelns riktning till föremål för en ny, möjligast omsorgsfull undersökning. En sådan utfördes av SCHEEL[1]) år 1902. I likhet med REIMERDES begagnade sig även SCHEEL av en av firman ZEISS förfärdigad ring av kvarts, vars utvidgning mättes enligt den optiska interferensmetoden (emedan det vid användning av denna c:a 15 mm höga ring erbjöd svårigheter att erhalla tydliga interferensbilder med andra ljussorter än den gröna kvicksilverlinjen, begagnade sig SCHEEL vid denna absoluta dilatationsbestämning endast av sistnämnda spektrallinje, varvid antalet förskjutna interferensstrimmor bestämdes genom direkt observation). Emedan det visade sig, att luftskikt kvarstodo på beröringsställena mellan kvartsringen och dess underlag resp. täckglaset, och att dessa luftrester alstrade märkbara störingar, belastades täckglaset med en mindre ringformig vikt. De långsamma, av luftresterna alstrande förskjutningarna bragtes visserligen härigenom att upphöra, men någon garanti för att beröringen nu verkligen skulle varit direkt synes mig denna anordning dock icke erbjuda[2]). En särskild omsorg ägnades upphettningskärlet och temperaturmätningen. I stället för den ett vätskebad (linolja) innehållande termoregulator av D'ARSONVAL's konstruktion, varav REIMERDES betjänat sig för kvartsarrangemangets upphettning, använde SCHEEL ett cylindriskt metallkärl med dubbla väggar, mellan vilka strömmade ånga (vatten- resp. acetonånga) av konstant temperatur. Ångbildningen skedde i särskilda genom packning mot värmeförlust skyddade kärl, i vilka ångan återfördes efter utträdet ur det nyssnämnda upphettningskärlet. Termometrarna, som utgjordes av noga undersökta kvicksilvertermometrar, voro förlagda till det rum, i vilket ångan bildades. Försök med termoelement gåvo vid handen, att temperaturskillnaden mellan detta rum och det hålrum, i vilket kvatsringen befann sig, utgjorde endast några få hundradedelsgrader[3]). Dilatationsmätningarna, som grunda sig på försök med tre olika höga temperaturer — vanlig rumperatur (15 à 19°), vattnets ävensom acetons kokpunkter (den sistnämnda 56 à 57°) — gåvo till resultat följande värden:

[1]) K. SCHEEL, Ann. d. Phys., *9*, p. 837; 1902.

[2]) Beträffande de s. k. NEWTON'ska färgglasen, säger JERICHAU (l. c.), att man, enligt vad han konstaterat, icke ens genom användning av tryck kan få de båda på varandra ställda glasen att direkt beröra varandra.

[3]) Några försök för utrönande av en eventuell temperaturskillnad mellan det rum, i vilket kvartsringen befann sig vid REIMERDES försök, och det omgivande vätskebadet, vars temperatur uteslutande observerades, synes REIMERDES icke hava utfört.

$$a = 7{,}144 \cdot 10^{-6}, \quad b = 0{,}00815 \cdot 10^{-6}.$$

Som man finner, överensstämma båda dessa värden ganska nära med de motsvarande av BENOÎT erhållna värdena.

Senare har SCHEEL[1]) undersökt kvartsens utvidgning i optiska axelns riktning även vid låga temperatur och därvid funnit, att utvidgningen mellan $-190°$ och $+16°$ bestämmes genom konstanterna

$$a = 6{,}946 \cdot 10^{-6} \text{ och } b = 0{,}00996 \cdot 10^{-6},$$

vilka värden, jämförda med de för temperaturintervallen $+16°$ till $+100°$ tidigare funna värdena, visa, att vid låga temperaturer utvidgningskurvans krökning ökas vid sjunkande temperatur. Utvidgningen inom hela temperaturintervallen $-190°$ till $+100°$ kan enligt SCHEEL framställas genom en kubisk likhet av den vanliga formen, i vilken de tre i densamma ingående konstanterna hava följande värden:

$$a = 7{,}085 \cdot 10^{-6}; \quad b = 0{,}009386 \cdot 10^{-6}; \quad c = -0{,}00000720 \cdot 10^{-6}.$$

En undersökning av kvartsens dilatation parallellt med optiska axeln vid uppvärmning från rumtemperatur ända upp till c:a 500° har slutligen enligt den optiska interferensmetoden med användning av en kvartsring utförts av RANDALL[2]) i universitetets i Michigan fysikaliska laboratorium. Upphettningen verkställdes med tillhjälp av en elektrisk ugn, varvid temperaturmätningarna gjordes dels med kvicksilvertermometrar och dels med en platinamotståndstermometer. Ända till temperaturer af c:a 250° kan utvidgningen enligt dessa försök framställas genom en kvadratisk formel med konstanterna

$$a = 7{,}170 \cdot 10^{-6} \text{ och } b = 0{,}00810 \cdot 10^{-6},$$

vilka ganska nära överensstämma med de av SCHEEL och BENOIT erhållna. Mellan 250° och 470° kan enligt RANDALL den sanna utvidgningskoefficienten (α) beräknas med tillhjälp av formeln

$$\alpha = [11{,}250 + 0{,}0165\,(t-250) + 0{,}0000566\,(t-250)^2 + 0{,}000000134\,(t-250)^3] \times 10^{-6}.$$

Gentemdt det av RANDALL tillämpade förfaringssättet att städse beräkna värdena på α såsom medelutvidgningskoefficienter för vissa temperaturintervaller och utan vidare betrakta dessa såsom de sanna utvidgningskoefficienterna för medeltemperaturerna måste dock anmärkas, att detta är berättigat, endast så länge α är en lineär funktion av temperaturen, d. v. s. ända upp till temperaturen av c:a 250° eller något däröver. Vid högre temperaturer uppstå härigenom, såsom senare skall visas, fel, vilka — särskilt, om temperaturintervallerna äro stora (vid RANDALL's försök stundom ända till c:a 70°) — icke kunna försummas. — Några åtgärder för förebyggande av de störingar, som eventuellt förorsakades av luftresterna mellan kvartsringen och dess underlag resp. täckglaset, synes RANDALL icke hava vidtagit.

[1]) K. SCHEEL, Verh. d. deutsch. phys. Ges., 5, p. 3; 1907.

[2]) H. RANDALL, Physical review, p. 10; 1905. — Interferensstrimmornas förskjutning bestämdes i vissa fall medelst den ABBE'ska metoden, i andra fall genom direkt observation.

4. Alla hittills nämnda undersökningar hänföra sig till kvartsens utvidgning i optiska axelns riktning. Angående utvidgningen *vinkelrätt mot axeln* föreligga mig veterligen icke några andra bestämningar än de av FIZEAU och BENOÎT härrörande, enligt vilka man för denna utvidgning har:

enligt FIZEAU: $a = 13{,}24 \cdot 10^{-6}$, $b = 0{,}0119 \cdot 10^{-6}$, gällande från rumtemp. till c:a 80°.

„ BENOÎT: $a = 13{,}255 \cdot 10^{-6}$, $b = 0{,}01163 \cdot 10^{-6}$, „ „ „ „ „ „ .

Som man ser, överensstämma de av dessa forskare erhållna värdena ganska nära med varandra. Bådas undersökningar omfatta dock endast en relativt trång temperaturintervall, och då för många ändamål en möjligast noggrann kännedom om kvartsens utvidgning jämväl vinkelrätt mot axeln (resp den kubiska utvidgningen) vid högre temperatur är av nöden, synes en en betydligt vidare temperaturintervall omfattande undersökning härav i ganska hög grad önskvärd.

5. Under vintern 1898—99 — alltså icke långt efter det REIMERDES slutfört sin ovannämnda undersökning — utförde jag i universitetets i Jena fysikaliska laboratorium med välvilligt understöd av firman ZEISS (genom förmedling av Dr PULFRICH) en undersökning av kvartsens jämte några andra kristallers termiska utvidgning, ehuru mitt observationsmaterial på grund av särskilda omständigheter tyvärr hittills förblivit till stor del obearbetat [1]). Vad speciellt min undersökning av kvartsen vidkommer, hänförde sig denna till utvidgningen såväl i optiska axelns riktning som vinkelrätt mot denna — i förra fallet från rumtemperatur till + 434° och i det senare från rumtemperatur till + 334°. Ehuru jag numera i fråga om kvartsens utvidgning i axelns riktning på sätt och vis blivit förekommen genom RANDALL's ovannämnda undersökning, synes mig dock ett, om ock sentida, offentliggörande av mina denna utvidgning rörande försök vara tillfyllest motiverat redan genom önskvärdheten av att genom upprepade och under olika omständigheter utförda bestämningar erhålla en möjligast noggrann kännedom av de för denna dilatation karakteristiska konstanterna. Emedan den av mig undersökta kvartsringen var densamma som den av REIMERDES använda, kan en del av mina försök tillika tjäna såsom kontroll av dennes och följaktligen giva ett svar på frågan, huruvida hans från andra observatörers avvikande resultat kan anses bero på en specifik egendomlighet hos det kvartsstycke, varav ringen var förfärdigad. Då vidare denna ring tjänade såsom standardkropp vid mina försök angående kvartsens utvidgning vinkelrätt mot optiska axeln ävensom vid mina övriga dilationsförsök, vilka alla utsträcktes till högre temperaturer än de vid REIMERDES

[1]) Sedan jag slutfört försöken, var jag icke i tillfälle att omedelbart därpå utföra de ganska omständliga räkningar, som för de slutliga resultatens ernående voro erforderliga; och då jag en tid därefter sökte bilda mig en uppfattning om huru pass väl de värden, som erhöllos av de skilda försöksserierna, överensstämde med varandra, kom jag till så stora avvikelser, att en fortsatt bearbetning av mina observationer knappast syntes mödan värd. För en tid sedan föllo de ifrågavarande observationsjournalerna händelsevis åter i mina händer, och fann jag nu vid närmare efterseende, att jag vid mina tidigare uträkningar icke beaktat en viss, av en förändrad försöksanordning betingad, teckenförändring. Med iakttagande av denna har jag nu, såsom av den följande redogörelsen skall framgå, kommit till användbara resultat. Det långa uppskovet med observationsmaterialets bearbetande har i varje fall medfört den fördelen, att jag nu haft att tillgå vida noggrannare värden på de använda spektrallinjernas våglängder än vad tidigare skulle varit fallet.

undersökning förekomma, är det i varje fall nödvändigt att först ingå på en undersökning av kvartsringens utvidgning. Jag har härvid även med stöd av mina observationer försökt besvara frågan, huruvida kvartsen verkligen är så fullständigt fri från termisk efterverkan, som man hittills vanligen antagit[1]). I betraktande av den hos detta ämne förekommande tvillingbildningen, synes mig en dylik verkan, särskilt efter upphettning till en relativt hög temperatur, a priori alls icke utesluten. Av RANDALL's försök, vilka (i likhet med SCHEEL's) uteslutande hänföra sig till stigande temperaturer, kan man icke draga någon som helst slutsats i detta avseende.

Efter att under en längre tid först hava arbetat med en interferensdilatometer av äldre typ (den av ABBE konstruerade dilatometern) såg jag mig för erhållande av tillräckligt konstanta högre temperaturer nödsakad att utföra de slutliga mätningarna med tillhjälp av en av PULFRICH nyss förut konstruerad fristående „interferensmätningsapparat", vilken då för första gången blev använd för dilatometriska mätningar (ett av de rätt många olika ändamål, för vilka denna apparat kan användas). Emedan den förstnämnda apparaten var identisk med den av REIMERDES använda och dessutom vissa med densamma utförda försök icke upprepades med tillhjälp av den senare nämnda apparaten, har jag sett mig föranlåten att vid efterföljande redogörelse i någon mån beakta även de med det förra mätningsinstrumentet utförda försöken — detta så mycket mer, som ett klargörande av hela undersökningens gång eljest icke vore möjligt. Enär såväl den egentliga interferensapparatens (kvartsarrangemangets) som mätningsinstrumentens handhavande och justering förutsatte en viss teknisk färdighet, utförde jag till att börja med några övningsarbeten, vid hvilka några glassorters dilatation undersöktes med användning av FIZEAU's interferensbord (stålskiva med skruvar). Dessa förberedande försök förbigår jag dock självfallet här.

II. Försöksanordning I.

a) Interferensapparaten (kvartsarrangemanget).

6. Den av mig använda interferensapparaten (se fig. 1), den första av detta slag, som enligt anvisning af Dr C. PULFRICH förfärdigats i ZEISS' optiska verkstad i Jena, bestod av en ring R, en bottenplatta G och täckplatta D, alla tre av kvarts. Den viktigaste av dessa delar, nämligen ringen R, hade enligt vad REIMERDES (l. c.) uppgiver, erhållits sålunda, att en c:a 10 mm tjock planparallell skiva först utskars ur ett i avseende dess homogenitet omsorgsfullt prövat stycke kristalliserad kvarts så, att skivans parallella begränsningsytor voro vinkelräta mot kristallens optiska axel. Vid ytornas slipning prövades deras ställning till optiska axeln medelst ställvinkel och polarisationsmikro-

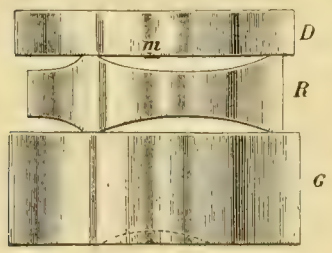


Fig. 1.

[1]) Kvartsens införande såsom normalsubstans vid dilatometriska mätningar bygger enligt REIMERDES (l. c., p. 6) till väsentlig del på förutsättningen, att detta ämne vore „fullkomligt fritt från termiska efterverkningar".

skop. Ur skivan utborrades sedan en massiv cylinder, varvid återstod en hålcylinder eller ring *(R)*, vars yttre diameter var 34 mm och inre diameter 25 mm. Den övre och den undre randen av denna ring bortskars därefter så när som på tre symmetriskt belägna, till de ursprungliga ytorna hörande, små triangelformiga delar.

Medels en ABBE's kontaktmikrometer [1]), vilken tillåter att mäta kroppars tjocklek på c:a $^1/_{1000}$ mm när, hade REIMERDES bestämt medelvärdet av kvartsringens axellängd (avståndet mellan de över varandra belägna kvarstående plana ytelementen), vilken mätning sedan även upprepades af mig. Denna mätning utfördes så, att en planparallell skiva av bekant tjocklek lades över ringens tre utsprång, varvid den sammanlagda tjockleken av skivan och ringen mättes över mitten av ringen. Från det sålunda erhållna värdet hade man att subtrahera skivans tjocklek. För ringens medeltjocklek (vid 15° C) erhöll såväl REIMERDES som jag värdet 10,117 mm (tre av mig utförda mätningar gåvo värdena 10,116, 10,116 och 10,118 mm resp.). För kontrollens skull hade REIMERDES dessutom utfört direkta mätningar över de tre utsprången skilt för sig, varvid han fann, att tjockleken på vart och ett av dessa ställen skilde sig från det nyssnämnda medelvärdet med mindre än 0,001 mm. Parallellismen mellan ringens ursprungliga begränsningsytor var sålunda mycket nära uppnådd, i det att lutningsvinkeln mellan dem var mindre än 8″. Det fel i bestämningen av utvidgningen parallellt med axeln, som alstras genom en så ringa lutning mellan begränsningsytorna, kan, såsom REIMERDES påvisat, helt och hållet försummas.

Den massiva kvartscylinder, som utskurits ur ringen *R*, tillät att undersöka begränsningsytornas ställning till optiska axeln. Med tillhjälp av en PULFRICH's refraktometer hade REIMERDES funnit, att den vinkel, som optiska axeln bildade med ytornas normal i varje fall var mindre än $1\,^2/_3°$. Med användning av BENOÎT's värden för kvartsens utvidgning $\parallel$ med och $\perp$ mot optiska axeln, fann REIMERDES, att ett justeringsfel av ringens axel av sistnämnda storlek medförde ett fel hos de på sid. 10 definierade konstanterna *a* och *b* av storleken $0{,}3 \times 10^{-8}$, resp. $0{,}00035 \times 10^{-8}$, vilka fel även vid den högsta vid hans försök uppnådda temperaturen (230°) obetingat föllo inom observationsfelens gränser.

Täckplatan *(D)* utgjordes av en mot optiska axeln vinkelrätt skuren cirkelrund kvartsskiva av 35 mm:s diameter och 6 mm:s medeltjocklek. För att de från den övre plana ytan reflekterade strålarna icke skulle verka störande vid observationen av interferensfenomenet, var den nämnda ytan icke fullkomligt parallell med den undre begränsningsytan utan bildade en 20′ stor vinkel med denna. Såsom märke för iakttagande av interferensstrimmornas förskjutning tjänade en liten, c:a $^3/_4$ mm vid, cirkelrund silverskiva *m*, anbragt vid mitten av den undre plana begränsningsytan.

Bottenplattan *(G)*, på hvilken kvartsringen placerades, utgjordes av en mot axeln vinkelrätt skuren planparallell kvartsskiva av 15 mm:s tjocklek och 39 mm:s diameter. På ett ställe i närheten av randen var den övre planslipade ytan i mycket ringa mån snett avslipad. Då kvartsringen ställdes så, att en av dess fötter (ett av dess undre utsprång) befann sig på detta ställe av ytan, erhöll täckglasets undre yta en för interferensbildens upp-

[1]) C. PULFRICH, Über einige v. Prof. ABBE konstruierte Messapparate für Physiker, Zeitsch. f. Instr., p. 307; 1892.

komst erforderlig ringa lutning mot bottenplattans övre yta. Genom en ringa förskjutning eller vridning av kvartsringen kunde man vid justering av inställningen giva denna lutningsvinkel en lämplig storlek. Om det luftskikt, som gav upphof till interferensfenomenet, icke, såsom vi här antagit, på undre sidan begränsades av bottenplattan utan av den övre ytan av en inom ringen på bottenplattan placerad kristall, reglerades luftkilens vinkel på enahanda sätt som nyss. För avlägsnande av den reflex, som härrörde av bottenplattans eller av en på denna platta ställd kristalls undre yta, voro dessa ytor i ett för ändamålet tillräckligt omfång urholkade och svärtade.

7. Interferensapparatens justering verkställdes med tillhjälp av en vertikalt ställd tub av den beskaffenhet, som i fig. 2 antydes. Denna tub var inrättad för autokollimation, d. v. s. den tjänade icke blott till observation utan även till belysning av interferensapparaten. För detta ändamål var ett litet totalreflekterande prisma p anbragt i objektivets (O) fokalplan. Genom en på den mot objektivet vända prismaytan anbragt rektangulär spalt s inträngde ljusstrålar från en bredvid tuben uppställd lampa. De från den under objektivet ställda interferensapparatens plana ytor reflekterade strålarna sammanbrötos i objektivets fokalplan vid sidan av prismat p, där de gåvo upphov till tre reella bilder av spalten s, vilka betraktades medelst luppen l. Genom reglering av interferensapparaten uppnåddes, att de genom reflexioner från det kilformiga luftskiktets begränsningsytor uppkomna bilderna till en viss del täckte varandra, medan den av täckglasets övre yta alstrade bilden föll ett gott stycke på sidan om de förra, men i jämnhöjd med dem (täckglasets och luftskiktets kilkanter voro därvid riktade åt motsatta håll). Justeringen var då fullbordad och interferensapparaten färdig att införas i dilatometern.

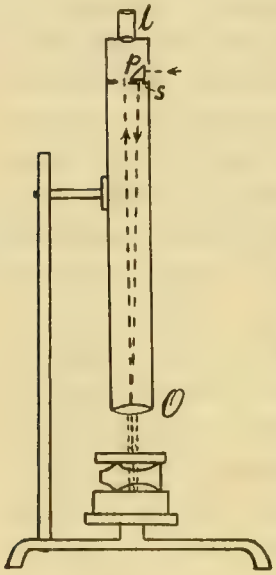


Fig. 2.

b) Abbes dilatometer.

8. Under hänvisning till den uttömmande beskrivning av denna apparat, som givits av PULFRICH (se inledningen p. 7, not 2), anföres här — för klargörande av försöksanordningen — endast det väsentliga av dess konstruktion och verkningssätt[1]). Den av mig använda apparaten var för övrigt i avseende å sin montering icke fullt så utarbetad som den av PULFRICH beskrivna definitiva modellen.

Huvudbeståndsdelarna jämte ljusstrålarnas gång äro framställda i fig. 3, som visar apparaten, sedd från sidan, ävensom dess mot observatorn vända del, sedd ovanifrån. De från en vågrätt ställd kapillär del av ett geisslerrör kommande ljusstrålarna koncentreras medelst linsen L på det i observationstubens fokalplan befintliga totalreflekterande prismat p, vars

[1]) Med hänsyn till att såväl denna apparat som den av PULFRICH härrörande modifikationen av densamma hos oss torde vara föga bekanta har jag icke ansett mig kunna här undvara en kort beskrivning av vardera.

mot objektivet O vända yta — i likhet med den motsvarande prismaytan i den tidigare beskrivna justeringstuben (fig. 2) — är delvis betäckt, så att endast en rektangulär öppning, som för apparaten utgör den egentliga ljuskällan, återstår. Det akromatiska objektivet O sänder de från prismat p genom ett runt diafragma J kommande strålarna i form av ett parallellt strålknippe till prismerna P_1 och P_2, hvilka ombesörja den spektroskopiska färgspridningen och samtidigt alstra en avlänkning av strålarna, vilken för strålar av medelbrytbarhet (natriumljus) utgör i det närmaste 90°. Genom en medelst skruven S verkställd höjning eller sänkning av den mot observatorn vända delen av den kombinerade kollimatorn och observationstuben kan vart och ett av de genom färgspridningen uppkomna olika färgade

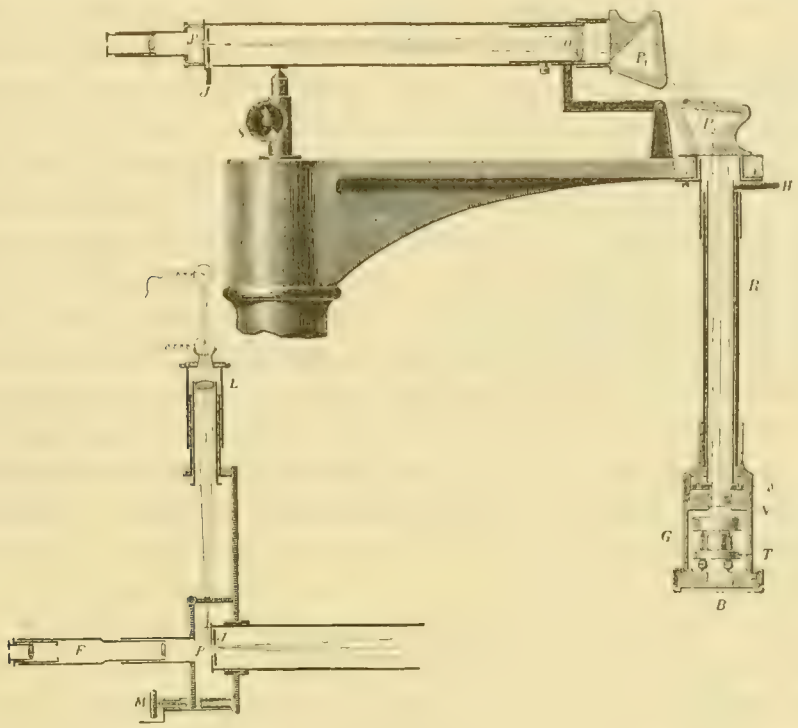


Fig. 3.

ljusstrålknippena i tur och ordning bringas att efter utträdet ur prismat P_2 erhålla en lodrät riktning, varvid de — efter att hava genomgått den något litet snett ställda glasskivan V — träffa interferensapparaten T (i fig. 3 utgöres denna av ett „FIZEAU's bord"), som införts i det av porslinsröret R uppburna mässingskärlet G. Efter reflexionen från interferensapparatens speglande ytor genomlöpa dessa strålar de båda prismerna samt observationstuben i motsatt riktning mot nyss och alstra därvid tre medelst en lupp iakttagbara monokromatiska bilder av den vid p befintliga ljusspalten, vilka om apparaten (inclusive prismerna P_1 och P_2) är rätt justerad, falla i synfältet i jämnhöjd med varandra på sidan om prismat p så, att de två varandra delvis täckande bilderna äro belägna tätt invid prismats kant. Genom att göra

irisbländarens (*J*) öppning tillräckligt tränga avlägsnar man den tredje, obehöriga bilden ur synfältet (bilderna, som tidigare varit rektangulära, antaga nu formen av halvcirklar, motsvarande den av bländaren icke avskärmade delen av ljusspringan).

Om den lupp, med tillhjälp varav dubbelbildens inställning verkställts, avlägsnas från tuben, kan man vanligen redan med blotta ögat iakttaga interferensstrimmorna och den på interferensapparatens täckglas anbragta cirkelformiga silverskivan, vilken nu framträder med ett ganska intensivt sken. De egentliga observationerna utföras med tillhjälp av en tub *F* (fig. 3), som införes i stället för luppen och inställes så, att silvermärket och intenferensbilden framträda möjligast skarpa. För att interferensstrimmmorna skola hava en vertikal riktning, måste luftkilens kant vara parallell med det genom observationstubens axel gående vertikalplanet, vilket efter en tidigare ungefärlig inställning uppnås genom vridning av den metallskiva *B*, som uppbär interferensapparaten. Om i enlighet med vad tidigare fastställts täckglasets kilkant är riktad åt motsatt håll mot luftkilens, måste för att de tre reflexbilderna skola falla på nyss angivet sätt luftkilens kant befinna sig på samma sida om det nämnda vertikalplanet som belysningsprismat *p*. En ökning av luftskiktets tjocklek alstrar då en förskjutning åt venster av de i tuben *F:s* synfält synliga inteferensstrimmorna. Tuben *F* inställes först så, att en i dess objektivs fokalplan anbragt vertikal dubbeltråd, interferensstrimmorna samt silvermärket framträda möjligast skarpa. Medelst en i fig. 3 icke synlig justeringsskruv vrides tuben *F* därefter kring en horisontell axel, tills en mot den nämnda dubbeltråden vinkelrät tredje tråd tangera silverskivans bild vid dess undre rand. Fig. 4 giver en ungefärlig bild av den i kikarens synfält då synliga interferensbilden. Den rektangulära begränsningen av densamma härrör av en ovanom interferensapparaten i närheten av denna anbragt metallbländare *s*, vilken utifrån kan öppnas och slutas medelst en hävstång *H* och i främsta rummet tjänar till att skydda interferensapparaten för den varaktiga värmeförlust, som vid högre temperaturer skulle alstras genom värmestrålning uppåt. Genom vridning av mikrometerskruven *M* kan dubbeltråden i tuben *F:s* synfält bringas att successivt koincidera med de enskilda mörka interferenslinjerna eller med silvermärket. Av avläsningarna på trommelskalan erhåller man ett i trommeldelar uttryckt numeriskt värde såväl för den av luftskiktets kilvinkel beroende strimbredden som för silvermärkets avstånd från den närmast belägna mörka interferenslinjen. Emedan man vid beräkningarna städse uttrycker det senare avståndet såsom en bråkdel av strimbredden, är det icke nödvändigt, att denna för en och samma färg vid olika försök är precis lika stor (för en färg av mindre våglängd är strimbredden under för övrigt lika förhållanden självfallet mindre än för en färg av större våglängd).

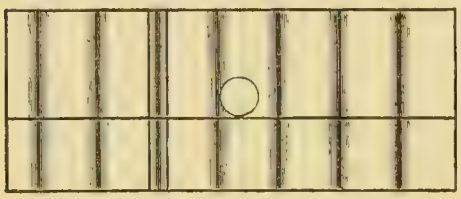


Fig. 4.

9. Det geisslerrör, som vid mina försök tjänade såsom yttre belysningskälla, var förfärdigat av HAACK i Jena och bestod av två något vidare, vertikalt ställda rör, förbundna med varandra genom ett horisontellt kapillarrör (fig. 5) och innehållande vätgas (2 à 3 mm:s tryck) samt något litet kvicksilver. En induktionsström, som sändes genom tvenne aluminiumelektroder, bragte vätgasen och kvicksilverångan att lysa. Så länge rörets temperatur

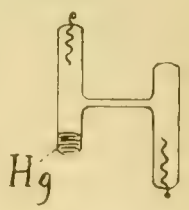


Fig. 5.

icke var högre än vanlig rumtemperatur, framträdde *Hg*-linjerna endast mycket svagt i jämförelse med *H*-linjerna. Genom att uppvärma den del av röret, som innehöll kvicksilverdropparna, samt kapillarröret medelst en spritlåga ernådde man, att den gula dubbellinjen och isynnerhet den gröna linjen i *Hg*-spektret framträdde synnerligen ljusstarka, varvid *H*-linjerna samtidigt (sålänge rörets uppvärmning pågick) förlorade i intensitet. Av *H*-linjerna voro endast H_α (*C*) och H_β (*F*) användbara, den sistnämnda dock endast i sådana fall, då interferensskiktets tjocklek var några få mm (vid relativa mätningar). Vid mätning av kvartsringens absoluta utvidgning (luftskiktet c:a 10 mm) användes i de flesta fall den gröna *Hg*-linjen, som var alla andra överlägsen i ljusstyrka, samt den av de båda gula *Hg*-linjerna, som motsvarades av den större våglängden ($\lambda = 0{,}5791\ \mu$). På grund av sin närhet till varandra alstrade de båda gula *Hg*-linjerna var sitt system av interferenslinjer, vilka delvis täckte varandra. I övre och undre randen av synfältet voro dock tvenne smala strimmor synliga, i vilka dessa båda system av interferensfransar framträdde skilt för sig, och som tillåto att med tillräcklig noggrannhet inställa visirtubens dubbeltråd på ettdera av dem. Genom minskning av springan *s*:s bredd kunde man öka deras tydlighet. Användningen av dubbellinjen såsom sådan (motsvarande en våglängd = medelvärdet av komponenternas våglängder) medför olägenheten, att vid den fortsatta ökningen av interferensskiktets tjocklek det s. k. Fizeau'ska fenomenet (ett periodiskt försvinnande och återuppträdande av interferensfransarna) gör sig gällande.

10. Den av mig använda dilatometern var medelst en horisontell järnarm vid manshöjd stadigt fäst vid en av arbetsrummets väggar. Interferensapparatens införande i mässingskärlet *G* verkställdes med tillhjälp av ett med lyftinrättning försett stativ, varvid mässingskärlets bottenskiva jämte den på densamma ställda interferensapparaten med undvikande av alla skakningar småningom lyftes, tills bottenskivans koniska rand trycke mot den mot densamma svarande randen av kärlets öppning. Medelst en gängad ring förbands bottenskivan sedan med metallkärlet. Genom en liten i glasskivan *V*:*s* metallfattning befintlig öppning kommunicerade luften i metallkärlet med den i porslinsröret (resp. yttre luften).

C. Upphettningsapparaten.

11. Såsom upphettningsapparat användes ett på sidorna med asbest beklätt cylindriskt metallkärl med dubbla sidoväggar, vilket upphettades medelst en gasbrännare, varvid förbränningsprodukterna till en del uppstego mellan kärlets båda väggar, uppvärmande därvid dessa och luften i kärlets inre. I det med ett lock tillslutna hålrummet av denna termostat befann sig det till dilatometern hörande metallkärl (*G* i fig. 3), som inneslöt interferensapparaten. Termometern (en kvicksilvertermometer) var genom locket införd i det några cm vida mellanrummet mellan de båda metallkärlens sidoväggar och angav sålunda temperaturen hos det yttre luftbadet. Den korrektion, som betingades av den utom upphettningsapparaten befintliga delen av kvicksilvertråden bestämdes på sedvanligt sätt (se nedan p. 23) med tillhjälp av en liten hjälptermometer, vars kvicksilverkula befann sig vid mitten av den nämnda kvicksilvertråden. För mätning av temperaturer under 100° C använde jag en termometer, vars skala tillät att bestämma hundradedelsgrader, och för mätning av högre temperaturer (ända upp till 500° C) en annan, medelst vilken tiondedels grader kunde med säkerhet bestämmas.

Båda dessa av normalglas förfärdigade termometrar hade kort före mina försök jämförts med normaltermometern i Riksanstalten i Charlottenburg och försetts med var sin korrektionstabell. Nollpunkternas läge undersöktes av mig talrika gånger under arbetets lopp, utan att någon som helst förändring av dessa kunde iakttagas. Hjälptermometern komparerade jag dessutom med den förra av de båda nyssnämnda termometrarna.

För att interferensstrimmorna icke skulle märkbart förskjutas, var det nödigt, att temperaturen förblev på några hundradedels grader när konstant. Ända till temperaturer av 100° C och något däröver visade sig den nämnda upphettningsapparaten något så när kunna uppfylla denna fordran, vid högre temperaturer däremot endast undantagsvis. För att interferensapparatens temperatur överhuvudtaget alls skulle kunna antagas överensstämma med det yttre luftbadets, var det dessutom nödigt, att sistnämnda temperatur icke blott en kortare stund, utan under en längre tid (under några timmar eller mera) skulle förbliva konstant, ett villkor, som särskilt vid de högre temperaturerna icke i tillräcklig grad uppfylldes. Vid undersökning av den för upphettningen använda lysgasens tryck med tillhjälp av en känslig vattenmanometer, visade det sig, att de långsamma temperaturvariationerna till icke ringa del berodde på förändringar i gastrycket, och något medel att hålla detta konstant fann jag tillsvidare ej. Ifall temperaturen under en längre tid varierat endast några få grader och intervallen mellan denna icke fullt konstanta temperatur och utgångstemperaturen var stor, kunde man dock utan att begå något synnerligen stort fel gå så tillväga, att man afläste interferenslinjernas lägen, så snart vandringen av dem — om ock blott för en kortare stund — upphörde. Emedan det framför allt gällde att mäta kvartsringens utvidgning vid höga temperaturer och interferensstrimmorna vid dessa försök — på grund av luftskicktets relativt stora tjocklek — voro mycket känsliga för varje temperaturförändring hos ringen, var det emellertid ganska sällan dylika pauser i interferensstrimmornas vandring inträffade. Någon garanti för att interferensapparaters temperatur ens under stationära förhållanden skulle i tillräcklig grad överensstämt med den med termometrarna uppmätta temperaturen syntes mig för övrigt den ifrågavarande upphettningsapparaten icke erbjuda.

Efter att under en längre tid hava arbetat med denna apparat kom jag sålunda till det resultat, att den särskildt vid höga temperaturer icke motsvarade de krav, som vid precisionsmätningar måste ställas på en dylik, och då någon annan ändamålsenligare, som skulle lämpat sig för den ABBE'ska dilatometern, icke heller stod mig till buds [1]), vände jag mig till dr PULFRICH med en anhållan om att få göra försök med en av firman ZEISS något år förut tillverkad och samma firma tillhörig upphettningskropp av koppar, vilken, enligt vad jag funnit av en av REED [2]) publicerad avhandling, av denne med gott resultat hade använts för undersökning av temperaturens inflytande på olika glassorters ljusbrytningsförmåga. Denna upp-

[1]) För mätningar ända till 200° C eller något däröver skulle visserligen någon termostat med vätskebad kunnat med fördel användas, men då det vid mina försök gällde att komma upp till 400° C eller mera, kunde detta medel icke gärna anlitas. En användning av något lämpligt mineralbad eller elektrisk upphettning skulle möjligen lett till målet, men syntes mig dessa (numera ganska ofta anlitade) utvägar, om vilka jag saknade erfarenhet, alltför osäkra.

[2]) J. O. REED, Wiedem. Ann. *65*, p. 707; 1898.

hettningskropp kunde visserligen icke användas vid försök med Abbe's dilatometer i dess nyss beskrivna form, men hade Dr Pulfrich kort förut med användning av principen för detta instrument konstruerat en fristående interferensmätningsapparat, vilken, såsom även i inledningen redan antytts, utom för särskilda andra ändamål även var avsedd för dilatometriska mätningar och tillät att vid sådana göra bruk av den nyssnämnda upphettningskroppen, såvida även interferensapparaten i vissa avseenden förändrades. Genom förmedling av Dr Pulfrich, som med största beredvillighet tillmötesgick min anhållan, ställde firman Zeiss till mitt förfogande alla de nämnda apparaterna ävensom vissa av mina försök betingade nya apparatdelar.

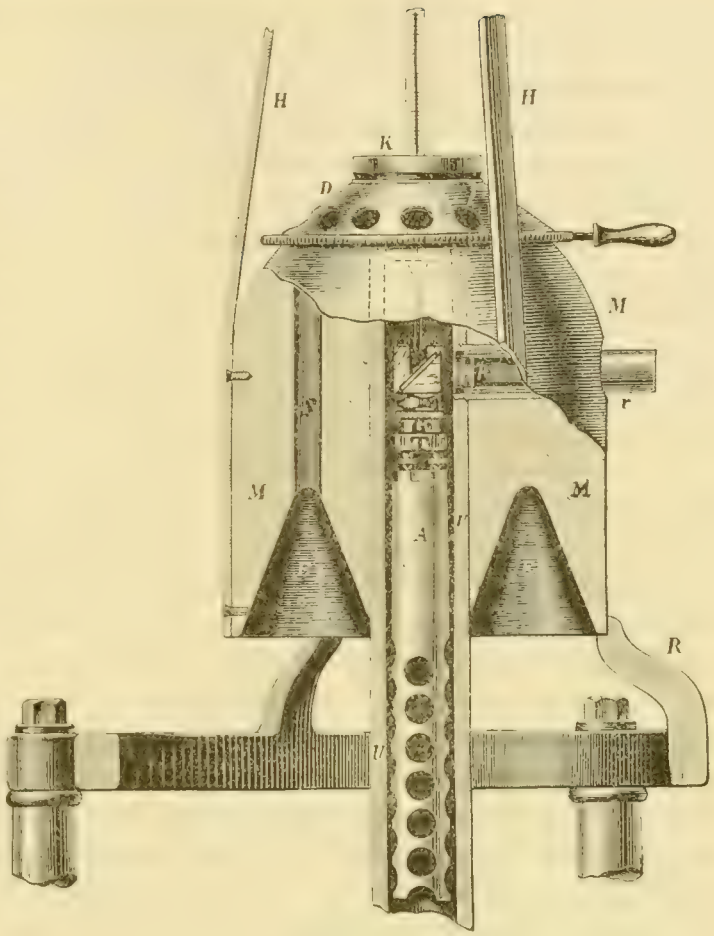


Fig. 6.

III. Försöksanordning II.

a) Upphettningsapparaten och temperaturmätningen.

12. Upphettningskroppen (fig. 6), som inneslöt den egentliga interferensapparaten (kvartsarrangemanget), bestod av en c:a 50 kg vägande kopparmantel, som uppbars av en ring R och tre starka järnpelare. Dess vertikala cylindriska hålrum tillslöts upptill genom en metallkon K och den genom dess mitt införda termometern. I den undre delen av samma hålrum befann sig ett av ett särskilt underlag uppburet c:a 25 cm högt och upptill slutet järnrör, som uppbar den med ett totalreflekterande prisma slutande interferensapparaten. I jämnhöjd med prismat var kopparmanteln genomborrad i horisontell riktning. Det i borrhålet införda observationsröret r var i vardera ändan tillslutet medelst en 2 mm tjock planparallell glasskiva. De för upphettningen använda bunsenbrännarna befunno sig under en i kopparmantelns undre del förekommande uppåt avsmalnande ringformig urholkning E, vilken

genom talrika på lika avstånd från varandra varande vertikala „skorstenar“ *S* av c:a 1 cm:s vidd stod i förbindelse med den yttre luften ovanom upphettningskroppen. Medelst en med ett handtag försedd vridbar ring *D* av tjock kopparplåt kunde skorstenarna öppnas eller tillslutas mer eller mindre och kopparmantelns uppvärmning sålunda delvis regleras. Emedan det vid apparatens konstruktion hade visat sig, att förbränningsprodukterna till någon del diffunderade genom kopparmanteln, var det hålrum, i vilket interferensapparaten befann sig, beklätt med ett mässingsrör *U'* (med 8 mm:s tjock vägg), som förhindrade den nämnda diffusionen. För förhindrande av de störingar, som eventuellt skulle alstrats genom oxidation, voro mässingsröret *U*, konen *K* och den övre delen av det rör, som uppbar interferensapparaten, förnicklade. För motverkande av värmestrålningen till omgivningen voro kopparmanteln, den yttre delen av observationsröret och den undre delen av mässingsröret *U* beklädda med asbest.

Medelst tre järnarmar, vilka i sin i fig. 6 icke synliga föreningspunkt uppburo en stor, nedåt konkav, metallskärm, samt tvenne block (det ena fästat vid arbetsrummets tak) och en motvikt kunde upphettningskroppen höjas och sänkas, sedan den genom skruvar åstadkomna fasta förbindelsen med de tre järnpelare, på vilka den eljes vilade, först upphävts. För att metallröret *U* icke på något sätt skulle rubba interferensapparaten vid upphettningskroppens sänkning, vilket i början ofta inträffade, begagnade jag mig av särskilda hjälpmedel och konstgrepp (sänkning av upphettningskroppen med tillhjälp av en trampinrättning m. m.), vilka här må förbigås.

Såsom underlag för interferensapparaten (se närmare härom på sid. 25) tjänade ett litet av tre ställskruvar uppburet förnicklat metallbord *T* ävensom en på detta ställd glasring *G*. Enligt vad *Reed* (l. c.) konstaterat, var en direkt på metallbordet *T* ställd glaskropps temperatur vid uppvärmning genomgående något högre än den omgivande luftens. Införandet av glasringen *G* upphävde däremot enligt REED (t. o. m. vid temperaturer av c:a 450° C) fullständigt denna genom värmeledning från metallunderlaget alstrade avvikelse.

På den sida om upphettningsapparaten, där observationsinstrumentet befann sig, och på några dm:s avstånd från denna var för oskadliggörande av de genom rörelse i arbetsrummet alstrade luftströmmarna uppställd en c:a 1 m hög och $1\,^1/_2$ m bred cylindriskt böjd skärm av tjock papp, försedd med en mitt emot observationsröret *r* anbragt öppning. För skyddande av observationstuben, vars okular befann sig i närheten av nämnda öppning, var pappskivan i omgivningen av denna förstärkt med en större skiva av asbest.

13. Vid prövning av den här beskrivna upphettningsapparaten i avseende å dess förmåga att under en längre tid hålla temperaturen konstant kom jag visserligen till resultat, som voro avgjort gynnsammare än de med den tidigare använda apparaten uppnådda, men dock ännu långt ifrån tillfredsställande, i det att variationerna i gastrycket fortfarande alstrade temperaturförändringar av t. o. m. flere grader. Huru det varit möjligt för REED att utan användning av någon gastrycksregulator med denna upphettningsapparat uppnå på c:a 0,1° när konstanta temperaturer av ända till 400 graders höjd, var mig svårt att förstå, såvida icke trycket i gasledningen under föregående år, då han (i Jena) utförde sina försök, var betydligt mindre variabelt än det nu var. Efter flere fåfänga på annat sätt gjorda försök lyckades jag

slutligen på följande (visserligen icke synnerligen tilltalande) sätt ernå en för det avsedda ändamålet fullt tillräcklig konstans hos den för bunsenbrännarnas matning använda gasens tryck.

Ett från gasslangen utgående icke alltför smalt sidorör av glas var infört i en med vatten delvis fylld större glasflaska till ett sådant djup, att då gastrycket var som minst, gasen inom röret nådde randen av röröppningen. Vid minsta tillväxt av gastrycket uppstego gasblasor, vilka genom ett i flaskmynningen infört afloppsrör leddes ut från rummet (glasflaskan befann sig i ett dragskåp). Några i gasledningens fortsättning införda av konformigt utdragna glasrörstycken bestående motstånd bidrogo till att trycket, som kontrollerades medelst en känslig lutande vattenmanometer, nu var så konstant, man gärna kunde önska sig. Medan avståndet mellan vattenytorna i det *U*-formiga manometerröret förut varierat med ända till 10 cm eller mera (beroende på lutningen), förblev detta avstånd nu under hela den tid försöket varade konstant, så när som på de små momentana variationer, som åtföljde gasblåsornas frigörande från mynningen av det i flaskan nedstående glasröret.

Tack vare denna reglering av gastrycket, som visserligen skedde på bekostnad av en icke så alldeles ringa mängd gas, ernådde jag även, att temperaturen i upphettningskroppens inre nu under timtal förblev på åtminstone 0,1° när konstant, vilket för de ifrågavarande dilatationsmätningarna var tillfyllest (under den stund den mikroskopiska bestämningen av interferensstrimmornas lägen utfördes var temperaturen konstant på någon hundradedels grad när).

14. För temperaturmätningarna användes de på sid. 19 redan omnämnda tvenne termometrarna, vilkas skalor gingo till 100° resp. 500° (den förra användes blott för mätning av de lägsta och den senare för mätning av de högsta temperaturerna) ävensom en ny av Fysikalisk-tekniska riksanstalten med gastermometern kort förut jämförd större termometer, användbar för temperaturer mellan 0° och 350° och försedd med en i femtedelsgrader indelad skala. Under den tid av c:a tre månader denna termometer var i nästan ständigt bruk förändrades dess nollpunkt småningom från $+5{,}0°$ till $+6{,}0°$, vilka förändringar självfallet beaktades vid temperaturbestämningarna. De båda andra termometrarna bibehöllo däremot som förut sina nollpunkters lägen oförändrade. Medelst en liten hjälptermometer bestämdes åter den utom upphettningskroppen stående kvicksilvertrådens medeltemperatur. Den tidigare nämnda ovanom upphettningskroppen befintliga metallkupan åstadkom en betydligt jämnare fördelning av temperaturen ovanom upphettningskroppen än vad fallet var i frånvaro av densamma. Temperaturen i närheten av metallkonen *K* i fig. 6 var sålunda t. o. m. vid stark uppvärmning visserligen något, men icke heller synnerligen mycket, högre än vid den ofta ganska höga kvicksilvertrådens ändpunkt i huvudtermometern, varför även medelvärdet av dessa båda temperaturer ganska väl överensstämde med den temperatur, som hjälptermometern visade, medan dess kula befann sig vid mitten av den nämnda kvicksilvertråden.

Då det var av vikt att erhålla en uppfattning om noggrannheten av den temperaturkorrektion, som uträknades med kännedom om den utstående kvicksilvertrådens längd och medeltemperatur, gjorde jag försök med tvenne av de tidigare nämnda olika långa termometrarna, vilka samtidigt voro införda i upphettningskroppen så, att deras kvicksilverkulor befunno sig i närheten av varandra inom kopparmantelns hålrum. Resultaten av tre dylika försök må anföras här, varvid vi beteckna den på någondera huvudtermometern direkt avlästa

temperaturen med T, den i grader uttryckta längden av den utstående kvicksilvertråden med n och medeltemperaturen hos den sistnämnda med t samt beräkna den ifrågavarande trådkorrektionen ΔT med tillhjälp av den för kvicksilvertermometrar av normalglas (Jena glas 59^{III}) gällande formeln

$$\Delta T = \frac{n(T-t)}{6100}.$$

Beteckna vi ännu den enligt de av Riksanstalten utfärdade prövningsintygen samt på grund av nollpunktsbestämningarna erhållna korrektionen med $\Delta_0 T$. kunna resultaten av de nämnda försöken sammanfattas på följande sätt:

		T	n	t	ΔT	$\Delta_0 T$	$T+\Delta T+\Delta_0 T$	Differens
I	Termom. n:r 1 (0° – 500°)	199,0°	1	—	—	– 4,5°	194,5°	+0,6° = 0,31 %
	„ „ 2 (0° – 350°)	194,6°	153	90,0°	+ 2,6°	– 3,0°	193,9°	
II	„ „ 1	320,4°	122	81,6°	+ 4,8°	– 4,4°	320,8°	+0,8° = 0,25 %
	„ „ 2	311,5°	273,5	76,5°	+ 10,5°	– 2,0°	320,0°	
III	„ „ 1	347,3°	147	40,1°	+ 7,2°	– 4,3°	350,2°	+1,1 = 0,31 %
	„ „ 2	336,1°	298	36,0°	+ 14,7°	– 1,7°	349,1°	

Med hänsyn till den stora olikheten i kvicksilvertrådarnas längd (n) hos de båda termometrarna äro differenserna mellan de korrigerade temperaturerna ($T + \Delta T + \Delta_0 T$), vilka alla utgöra vidpass 0,3 %, ganska små. Av försöket I, vid vilket termometern n:r 1 icke betingade någon trådkorrektion, framgår, att den för termometern n:r 2 på angivet sätt beräknade korrektionen ΔT i allmänhet var något för liten, vilket åtminstone delvis torde kunna förklaras därigenom, att den av ett ganska tjockt yttre glasrör omgivna kvicksilvertråden hos den sistnämnda termometern i verkligheten hade en något lägre temperatur än den av hjälptermometern angivna[1]). Emedan avvikelserna vid samtliga försök (utom de ovan nämnda utfördes ännu flera andra dylika) gingo i samma riktning och voro av i det närmaste samma procentuella storlek (0,3 %), har jag för undvikande av det systematiska fel hos temperaturbestämningarna, som härigenom eljes skulle uppstått, ökat den för termometern n:r 2 beräknade korrektionstermen ΔT med 0,3 % av den ifrågavarande temperaturen. Oaktadt huvudfelkällan hos dilatationsförsöken utan tvivel står att söka i temperaturmätningarna, förekommo vid dessa försök endast så stora temperaturintervaller (ofta betydligt över 100°), att de genom onoggrannheten i temperaturkorrektionerna uppkomna felen hos dilatationskoefficienterna knappast torde överstiga $^1/_2$ procent.

Frågan, hurvida de erhållna temperaturvärdena fullständigt överensstämde med den undersökta kristallens temperatur, kan tyvärr icke besvaras med absolut säkerhet. Framom

[1]) Termometern n:r 1 var icke blott betydligt kortare, utan även mycket klenare än termometern n:r 2, på grund varav korrektionerna för den utstående tråden hos den förra i allmänhet torde kunna anses för ganska tillförlitliga.

den förra försöksanordningen (p. 19) har dock den här beskrivna det företrädet, att termometerns kvicksilverreservoar här befann sig inom samma kärl som interferensapparaten, möjligast nära till denna. En hos termometern iakttagen temperaturvariation av c:a 0,1° var även tillräcklig för att åstadkomma en med mikrometerinrättningen konstaterbar förskjutning av interferensstrimmorna. Något skäl till en märkbar differens mellan det undersökta objektets och det omgivande luftbadets temperaturer synes därför knappast föreligga, ehuru förekomsten av en, om ock ringa, sådan å andra sidan icke är fullkomligt utesluten (en variation hos den ena temperaturen kan tänkas åtföljd av en motsvarande variation hos den andra). Sin slutsats, att ett på den ovannämnda glasringen *G* (fig. 6) vilande glasprismas temperatur verkligen överensstämde med den, som angavs av den vid försöket använda termometern, stödde Reed på iakttagelse, att de värden, han enligt denna försöksanordning erhöll för temperaturens inverkan på prismats brytningsförmåga, genomgående överensstämde med dem, som han erhöll vid användning av en på annat sätt konstruerad upphettningsapparat.

b) Interferensapparaten.

15. Emedan observationsröret hos den nyss beskrivna upphettningsapparaten (*r* i fig. 6) hade en horisontell ställning, var det nödigt att ersätta det svagt kilformiga täckglaset (*D* i fig. 1) hos den förut använda interferensapparaten med ett totalreflekterande prisma. På den omsorgsfullt planslipade yta hos det av mig använda prismat (*P* i fig. 7), som vid dilatationsförsöken upptill begränsade interferensskiktet (luftkilen), ingraverades till märke för interferensbildernas fixering en cirkellinje av ungefär $^3/_4$ mm:s diameter, vilken visade sig fylla sitt ändamål lika väl som den på det tidigare använda täckglaset anbragta silverskivan. För att prismats tyngd icke skulle bliva ojämnt fördelad på kvartsringens tre utspång, upphängdes på prismat över dess hypotenusayta en aluminiumkropp *A* av sådana dimensioner, att lodlinjen genom prismats och aluminiumkroppens gemensamma tyngdpunkt vid riktig inställning närmelsevis sammanföll med kvartsringens axel.

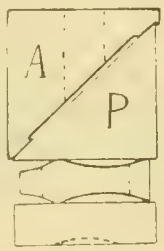


Fig. 7.

Interferensapparaten justerades såsom förut med användning av det nyssnämnda täckglaset och den på sid. 16 beskrivna justeringstuben, varefter täckglaset avlägsnades och prismat jämte aluminiumtyngden placerades i stället så, att prismats brytande kant blev i det närmaste vinkelrät mot luftkilens kant. Det återstod därefter endast att med undvikande av varje rubbning flytta interferensapparaten på det för denna avsedda underlaget (glasringen *G* i fig. 6) i upphettningsapparaten och att därefter nedsänka och fastskruva dennas kopparmantel. — Den vid användning av det totalreflekterande prismat erhållna interferensbilden var betydligt skarpare och klarare än den enligt den tidigare försöksanordningen erhållna, vilket självfallet utgjorde en väsentlig fördel hos den nya anordningen.

16. Tidigare (p. 11) har nämnts, att Scheel för motverkande av de störingar, som, enligt vad han fann, alstrades av luftresterna på de ställen, där bottenplattan och täckglaset berörde kvartsringens plana ytelement, belastade täckglaset med en liten ringformig tyngd (av vilket ämne och av huru stor vikt denna var, nämner han icke). Även under loppet av

mitt arbete — och således oberoende av hvad SCHEEL flere år senare konstaterade — uppstod frågan, huruvida icke de nämnda luftresterna kunde giva upphov till störingar vid interferensförsöken. Oaktadt redan prismats och aluminiumkroppens sammanlagda tyngd (vilken, att döma av en i SCHEEL's avhandling förekommande figur, sannolikt icke var mindre, utan snarare större än den av honom använda belastningen) kunde antagas i väsentlig grad paralysera dessa störingar, vidtogs för säkerhets skull ytterligare den åtgärd, att de plana ytelementen hos kvartsringen, som förut varit blankpolerade, nu slipades till matta. Kvartsringen kunde därefter endast i enstaka punkter beröra såväl bottenplattan som prismat, varför någon störande inverkan av på beröringsställena förefintliga resterande luftskikt icke mera behövde befaras. Mattslipningen, som gjordes i ZEISS' optiska verkstad, utfördes så, att någon märkbar förändring av interferensskiktets kilvinkel därigenom icke uppstod. Kvartsringens axellängd, som förut vid rumtemperatur varit 10,117 mm (jmf. p. 15), minskades genom mattslipningen något litet, så att den nu var = c:a *10,098 mm* (tre med ABBES kontaktmikrometer utförda mätningar gåvo värdena 10,099, 10,097 och 10,098 mm; en med tillhjälp av interferensförsöken gjord bestämning av kvartsringens axelllängd vid en given temperatur, som tillåtit att angiva denna längd i milliondedels mm, skall beskrivas längre fram).

c) Pulfrichs interferensmätningsapparat.

17. Denna i fig. 8 avbildade apparat har, enligt vad tidigare nämnts, framgått ur en strävan att göra det för ABBES dilatometer karaktäristiska mätningsförfarandet användbart även för andra ändamål än för dilatometriska mätningar ävensom att vid mätningar av sistnämnda slag kunna uppställa interferensapparaten jämte den kropp, som undersökes, utan hänsyn till observationsapparaten. De båda prismerna P_1 och P_2 i ABBES dilatometer (se fig. 3), som hade till ändamål, dels att åstadkomma en spektral upplösning av ljuset, dels att avlänka ljusstrålarna om en rät vinkel, äro i PULFRICH's apparat ersatta med ett i observationstubens (A) ögonpunkt anbragt prisma för direkt seende (Amiciprisma) och ett framför objektivet O_1 befintligt totalreflekterande prisma P. Om, såsom vid mina försök var fallet, en genom prismat P åstadkommen avlänkning av ljusstrålarna icke är erforderlig, kan detta prisma jämte fattning utan vidare avlägsnas (det till interferensapparaten hörande totalreflekterande prismat [P i fig. 7] hade vid mina försök övertagit det ifrågavarande prismats funktion). De olika färgade interferensbilderna uppträda till följd av denna anordning samtidigt ovanom varandra. Synfältets rektangulära begränsning åstadkommes genom en i observationstubens bildplan anbragt horisontell spalt, vilken kan genom vridning av skivan S antingen fullständigt öppnas (fritt synfält för osönderdelat ljus) eller ock minskas till en godtyckligt liten bredd. De båda mätningstrådarna äro, såsom i ABBES dilatometer, vertikala och befinna sig omedelbart bakom den nyssnämnda spalten. Emedan färgspridningen efter riktig inställning av Amici-prismat (inställningen verkställes genom vridning av A) sker i trådarnas riktning, kunna dessa trådar användas på samma sätt för alla färger. Genom avlägsnande av prismat kan man utan vidare övergå från det spektralt sönderdelade ljuset till det osönderdelade. Genom vridning av ett mellan belysningsprismat p och tuben O_2C infogat DOVE's reflexionsprisma D för direkt seende kan man förändra interferensfransarnas riktning och således även utan någon svårighet inställa dem ver-

tikalt. Storleken av den med tillhjälp av spakhjulet r verkställda vridningen kan avläsas på gradskivan T. Belysningsröret L, genom vars objektiv det från ett geisslerrör G utgående ljuset koncentreras på belysningsprismat p, samt mikrometerinrättningen M, medelst vilken tuben O_2C vrides kring en vertikal axel så, att den tidigare nämnda dubbeltraden efter hand koinciderar med interferensbildens skilda delar, äro av samma beskaffenhet som de motsvarande inrättningarna hos ABBES dilatometer.

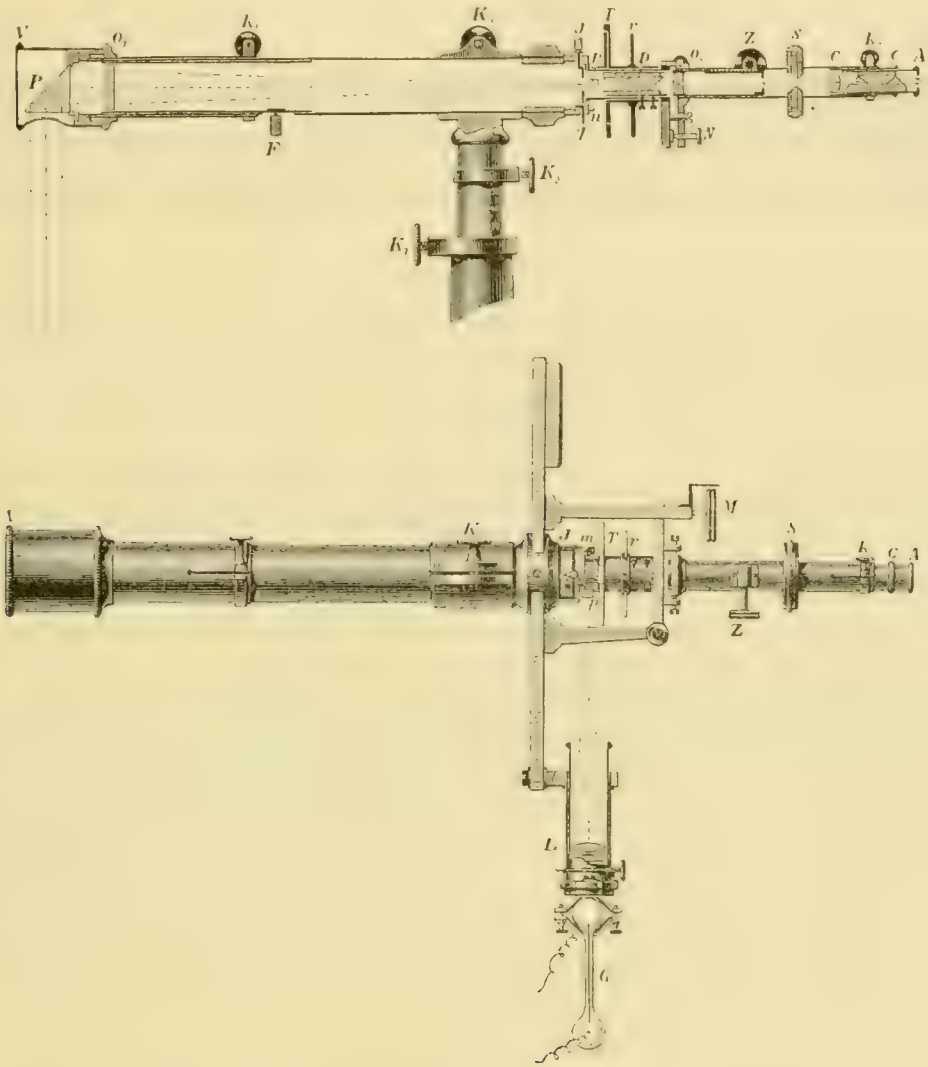


Fig. 8.

Det objekt, som undersökes (interferensapparaten), bör egentligen befinna sig i objektivet O_1:s brännplan eller på c:a 27 cm:s avstånd från O_1, i vilket fall de från en punkt av objektet utgående strålarna efter genomgången av O_1 bliva parallella med varandra och passera irisbländaren J:s fria öppning såsom ett vanligt diafragma samt alstra i den på oändligt

avstånd inställda tuben O_2C:s bildplan (spalten S) en reell bild av objektet och de hos detta uppträdande interferensstrimmorna. Även om objektet befinner sig på ett annat avstånd från O_2 än det nyssnämnda, kan man dock genom en medelst det tandade hjulet Z åstadkommen axial förskjutning av linsen O_2 inställa bilden i spalten S:s plan. Beträffande övriga konstruktiva detaljer ävensom apparatens handhavande och justering, må här hänvisas till FULFRICH's egen i Zeitschrift für Instrumentenkunde 1898 (p. 261—267) givna beskrivning av denna apparat.

IV. Bestämning av den till interferensapparaten hörande kvartsringens medelhöjd före och efter en starkare upphettning samt revision av de vid försöken använda gula kvicksilverlinjernas våglängder.

a) Metod.

18. Genom en medelst interferensförsök utförd möjligast noggrann bestämning av den till inteferensapparaten hörande kvartsringens medelhöjd (interferensskiktets absoluta medeltjocklek före och efter en starkare upphettning skola vi till att börja med söka besvara den i inledningen framkastade frågan, huruvida kvartsen verkligen kan anses fullständigt fri från termiska efterverkningar. Utom det intresse, en dylik möjligast noggrann absolut längdmätning i och för sig erbjuder, giver den tillika ett medel att pröva och, om så erfordras, korrigera värdena på vissa av de använda spektrallinjernas våglängder. Emedan det vid dessa undersökningar använda förfarandet, som till sin princip härrör av ABBE och senare närmare utarbetats av PULFRICH (l. c.), utgör grundvalen för de senare beskrivna dilatometriska mätningarna, skall jag här relativt utförligt redogöra för detsamma.

19. Vid den mikrometriska bestämningen av en interferensbild gäller det att i trommeldelar bestämma det lineära avståndet mellan två närbelägna mörka interferenslinjer, den s. k. *strimbredden b*, ävensom det lineära avståndet mellan det cirkelrunda märkets medelpunkt O (fig. 9) och den närmast belägna mörka linjen S. Kvoten $\delta = SO/b$ angiver då den bråkdel av den ifrågavarande spektralfärgens halva våglängd, varmed tjockleken av luftskiktets under märket O skiljer sig från tjockleken av luftskiktet under S. Kvantiteten δ:s förtecken rättar sig därvid efter förtecknet för avståndet SO. Om interferensapparaten är så uppställd, att de interferenslinjer, som äro närmast till luftkilens kant, synas mest till venster inom observationstubens (F) synfält (kilkanten befinner sig då även på venstra sidan om det genom tubens axel gående vertikalplanet), ökas interferenslinjens ordningsnummer i riktning från venster mot höger. Avståndet SO bör alltså i detta fall räknas såsom positivt eller negativt, allt efter som S befinner sig på venstra eller högra sidan om O. Är däremot luftkilens kant vänd åt motsatt håll mot nyss, förhåller det sig i detta avseende tvärtom. Kvantiteten δ är tydligen alltid belägen mellan gränserna $+{}^1/_2$ och $-{}^1/_2$. Emedan dubbeltrådens inställning på märket O i allmänhet är noggrannare än dess inställning på en

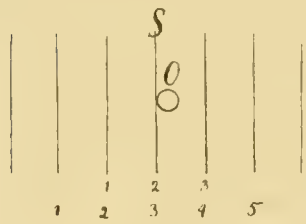


Fig. 9.

interferenslinje, inställer man den icke blott på en, utan på ett udda antal dylika linjer, ordnade symmetriskt kring O, d. v. s. lägebestämningen av S går sålunda ut på en bestämning av det använda interferenslinjesystemets tyngdpunkt. Äro linjerna tydliga och strimbredden jämförelsevis stor, kan man nöja sig med en inställning på tre linjer, i annat fall gör man bruk av t. ex. 5 sådana. I fig. 9 äro de linjer, som antagas använda för inställningen, betecknade med 1—3 resp. 1—5. Numreringen, som står i överensstämmelse med sifferföljden på mikrometerskruvens trommeldelning, antages motsvara även interferenslinjernas ordningsföljd (luftkilens kant på venstra sidan). Betecknas de vid inställningen på de enskilda linjerna gjorda mikrometeravläsningarna med l_1, l_2, l_3 resp. $l_1 \ldots l_5$ samt avläsningen vid inställningen på märket O med l_0, varvid de hela varven vid mikrometerskruvens kringvridning tänkas medräknade, är vid beaktande av de av varandra oberoende kombinationerna strimbredden

$$b = \frac{1}{2}(l_3 - l_1) \text{ resp. } \frac{1}{6}[(l_5 + l_4) - (l_2 + l_1)].$$

Betecknas tyngdpunkten S:s genom trommeldelar angivna läge med l_s, har man:

$$l_s = \frac{1}{3}(l_1 + l_2 + l_3) \text{ resp. } \frac{2}{10}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5)$$

och

$$SO = l_o - l_s.$$

Om, såsom vid en del av mina försök var fallet, de i riktning från luftkilens kant räknade interferenslinjernas ordningsföljd är den motsatta till vad vi nyss antogo, är, i fall beteckningssättet i fig. 9 på grund av dess överensstämmelse med trommeldelningen bibehålles oförändrat,

$$SO = l_s - l_o.$$

20. Enligt vad tidigare (p. 5) nämnts, kan luftskiktets medeltjocklek d (kvartsningens höjd) med tillhjälp av ABBE's kontaktmikrometer bestämmas på 0,001 à 0,002 mm när [1]). Med stöd av den sålunda vunna approximativa kännedomen om d och de genom interferensförsök på nyss angivet sätt erhållna värdena på δ för två eller tre spektralfärger kan man sedan med tillämpning av ett redan i inledningen (p. 7) antytt förfarande härleda ett vida noggrannare värde på d.

Betecknas den från luftskiktets kilkant räknade (mörka) interferenslinjes ordningstal, som befinner sig närmast till märket O (alltså ordningstalet för linjen S i fig. 9) med M, är tydligen

$$d = (M + \delta)\frac{\lambda}{2},$$

då λ betecknar den använda spektralfärgens våglängd. För beräkning af M måste man känna värdet på δ för åtminstone två färger. Kännetecknar man de för den ena af dessa

[1]) Ehuru det av de skilda avläsningarna framgående felet icke överstiger 0,001 mm, synes det dock möjligt, att även mikrometerns längdskala (på grund av temperaturvationer m. m.) icke är fullkomligt exakt, vilket, särskilt vid mätning av längder av storleksordningen 10 mm, kan medföra en märkbar ökning av felet. Till större än $\pm 0{,}002$ mm torde det totala felet vid dylika mätningar dock knappast kunna uppskattas.

färger gällande värdena på M, δ och λ genom en till dessa kvantiteter fogad index 0, medan man för den andra färgen bibehåller den förra beteckningen, har man

$$(M_0 + \delta_0)\frac{\lambda_0}{2} = (M + \delta)\frac{\lambda}{2}$$

eller

$$M_0 \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda} = M + \delta - \delta_0 \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

vilken likhet efter införande av beteckningarna $\frac{\lambda_0}{\lambda} = \mu$ och $\delta - \delta_0 \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda} = r$ kan skrivas:

$$M_0 \mu = M + r$$

I det följande hänför sig beteckningen M_0, δ_0 och λ_0 städse till den gröna kvicksilverlinjen, medan den tidigare beteckningen (M, δ, λ) avser någon, likgiltigt vilken, av de övriga använda spektrallinjerna. För att med tillhjälp av den nyss uppställda relationen kunna bestämma värdena på M_0 och M måste man först uträkna en tabell, i vilken M_0 sättes i ordningsföljd = 1, 2, 3 o. s. v. och i vilken en annan kolumn jämsides med dessa värden innehåller produkterna $M_0 \cdot \mu$ i form av decimaltal. Den hela delen av ett dylikt decimaltal är då lika betydande med M, medan talet efter decimalkommat angiver det motsvarande värdet på r. Sedan man av de i ett givet fall genom observation erhållna värdena δ_0 och δ beräknat r, som vi här tillsvidare antaga vara ett positivt bråk < 1, har man att i tabellen uppsöka alla de (inom vissa gränser fallande) värden på denna kvantitet, som inom försöksfelens gränser (c:a $\pm$ 0,02) överensstämma med det empiriskt bestämda värdet, och därvid uppteckna de motsvarande värdena på M_0. Den intervall, varmed de sålunda erhållna värdena på M_0 följa på varandra, beror av förhållandet mellan de använda spektrallinjernas våglängder (alltså av $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ eller μ), i det att denna intervall växer, då $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ närmar sig värdet ett. Användbara äro dock endast sådana spektrallinjer, för vilka differenserna mellan de enskilda på varandra följande värdena på r, äro större än felet hos det empiriskt bestämda värdet på r (alltså större än c:a 0,02). Användningen av mycket närbelägna spektrallinjer har sålunda en viss gräns. Med kännedom om den gröna kvicksilverlinjens våglängd och det medelst kontaktmikrometern erhållna approximativa värdet på luftskiktets tjocklek kan man närmelsevis beräkna M_0 (man har $M_0 = d : \frac{\lambda_0}{2}$). Om nu felet hos detta approximativa värde på M_0 är mindre än intervallen mellan de ur tabellen erhållna möjliga värdena på denna kvantitet, stannar man icke i någon villrådighet om vilket av dessa sistnämnda värden är det riktiga, varjämte tabellens omfattning (början och slut) äfven bestämmes av det nyssnämnda approximativa värdets felgränser.

Om man genom försök bestämt r för tvenne färger utom den gröna (λ_0) och i överensstämmelse därmed upprättat en av tre kolumner bestående tabell av nyssnämnda art, har man att uppsöka det erhållna värdet på r i tvenne kolumner, i vilka detta värde förekommer med olika intervaller. Man har därvid endast att beakta de motsvarande värden på M_0, som framgå samstämmigt av dessa båda kolumner, och vilka följa på varandra med en intervall, lika med minsta gemensamma multipeln till intervallerna mellan de värden på M_0, som erhållas av de båda kolumnerna särskilt.

Ifall det enligt formeln $\delta - \delta_0 \cdot \mu = r$ erhållna värdet på r icke, såsom vi här förutsatt, är beläget mellan 0 och $+1$, måste man addera till r ett helt tal a, sådant att summan $r + a$ blir mindre än ett. Emedan i de flesta dylika fall talet r är beläget mellan 0 och -1, utgöres a vanligen av talet $+1$ (andra värden på a förekomma dock även stundom). Man har då att i tabellen uppsöka alla med $r + 1$ överensstämmande värden. Det sökta talet M_0 påverkas icke av denna omformning, varemot kvantiteten $M_0 \cdot \mu$ är lika betydande med $(M - 1) + (r + 1)$. Genom att till det vid sidan av $(r + 1)$ stående talet $(M - 1)$ addera 1, erhåller man talet M. På analogt sätt förfar man, om a har ett annat värde än $+1$.

21. För att den nyssnämnda användningen av en tabell skall leda till tillförlitliga resultat, är det nödigt, att värdet på $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ eller μ är känt med en tillräcklig grad av noggrannhet. Om M_0 är ett litet tal, motsvarande t. ex. en genom en temperaturvariation alstrad förändring av luftskiktets tjocklek, är, enligt vad PULFRICH konstaterat, redan den noggrannhet vanligen tillfyllest, varmed $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ är bekant på grund av föreliggande våglängdsbestämningar. För större värden på M_0 — t. ex. sådana, som motsvara den tidigare nämnda kvartsringens tjocklek — är denna noggrannhet däremot ofta för liten, varför värdet på μ i dylika fall vanligen måste underkastas en sorgfällig revision eller nybestämning. Det för en bestämd tjocklek (d) av luftskiktet funna värdet på $M + \delta$ står tydligen i det förhållande till våglängderna, som uttryckes genom likheten

$$\mu = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{(M + \delta)}{(M_0 + \delta_0)}.$$

Med tillhjälp av de värden, som man med användning av ett approximativt värde på μ erhållit för $M + \delta$ och $M_0 + \delta_0$, kan man enligt denna likhet korrigera värdet på μ, varvid det sålunda erhållna nya värdets noggrannhet ökas med luftskiktets tjocklek och lätt kan fås att överträffa den genom vanliga våglängdsbestämningar (medelst diffraktionsspektra) ernådda noggrannheten. Genom att efterhand överga från en mindre tjocklek av luftskiktet till en allt större sådan kan man sålunda efter behag öka denna noggrannhet.

De förändringar, som våglängderna (i luft) undergå vid varje temperatur- och tryckförändring hos luftskiktet, måste självfallet i någon mån inverka på förhållandet $\frac{\lambda_0}{\lambda}$. Enligt vad PULFRICH (l. c., p. 441) teoretiskt visat, äro dock dessa variationer av $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ så utomordentligt små, att de i praktiken i allmänhet icke behöva beaktas. För ett luftfyllt och ett lufttomt rum skilja sig nämligen värdena på denna kvantitet från varandra med högst två miliondedelar av värdena själva.

Förutom den gröna kvicksilverlinjen (*Hg* grön) använde jag vid mina absoluta längdmätningar i de flesta fall den ena av de båda gula kvicksilverlinjerna (*Hg* gul_1). De båda tidigare nämnda vätelinjerna H_α och H_β (isynnerhet den sistnämnda) kunde på grund av deras med växande tjocklek hos luftskiktet hastigt avtagande interferensförmåga i allmänhet icke användas, i fall luftskiktets tjocklek översteg några få mm. I Receueil de constantes physiques av år 1913 uppgiva FABRY och BUISSON följande värden på de nyssnämnda *Hg*-lin-

jernas våglängder, vilka såsom erhållna genom interferensförsök, av dem betecknas såsom fullt tillförlitliga:

$$\lambda_{Hg\ \text{grön}} = \lambda_0 = 5460{,}740\ \text{Å};\quad \lambda_{Hg\ \text{gul}_1} = \lambda = 5790{,}657\ \text{Å}.$$

Dessa värden gälla för torr luft av temperaturen + 15° C och 760 mm:s tryck och äro hänförda till $\lambda_{\text{kadmium röd}} = 6438{,}4698\ \text{Å}$. Vi erhålla härav

$$\mu = \lambda_0 : \lambda_{Hg\ \text{gul}_1} = 0{,}9430260.$$

De anförda våglängdernas noggrannhetsgrad finnes dock icke angiven i tabellerna och någon litteraturhänvisning angående dem gives icke heller. Förmodligen stöda de sig dock, åtminstone delvis, på en av PEROT och FABRY [1]) enligt en interferensmetod utförd bestämning av dessa våglängder relativt MICHELSONS gröna *Cd*-linje, varvid erhölls (för torr luft vid 15° C och 760 mm:s tryck) $\lambda_{Hg\ \text{grön}} = 5460{,}7424\ \text{Å}$ och $\lambda_{Hg\ \text{gul}_1} = 5790{,}6593\ \text{Å}$, vilka värden enligt de data, som av nämnda forskare meddelas, äro noggranna på c:a 3 tiomilliondedelar när av värdena själva, motsvarande resp. 16 och 17 enheter av de sista decimalerna. Man erhåller av dessa värden $\mu = 0{,}9430258$ med ett maximalt fel av c:a 6 enheter hos den sista decimalen. Noggrannheten hos det tidigare nämnda värdet på μ är sannolikt av samma storleksordning [2]).

22. För att man med användning av de nyssnämnda värdena på λ skall kunna beräkna luftskiktets absoluta tjocklek enligt formeln $d = (M + d)\frac{\lambda}{2}$, böra observationerna hänföra sig till luft av temperaturen + 15° C och av trycket 760 mm *Hg*. Hava temperaturen och trycket andra värden, måste till det funna värdet på $M + d$ adderas en korrektionsterm k, som kan beräknas med tillhjälp av den av BENOÎT och PULFRICH (l. c.) uppställda formeln

$$k = d\,(t_2 - t_1)\cdot\frac{h_1}{760}\cdot\frac{1}{1+\alpha t_1}\cdot\frac{1}{1+\alpha t_2}\cdot\frac{2\,(n-1)\,\alpha}{\lambda} - d\,(h_2 - h_1)\cdot\frac{1}{1+\alpha t_2}\cdot\frac{2\,(n-1)}{760\,\lambda}.$$

Kvantiteten k betecknar egentligen den korrektion, som måste fogas till det antal halva våglängder, som man genom observation funnit motsvara luftskiktets tjockleksförändring vid övergång från begynnelsetemperaturen t_1 och trycket h_1 (i mm *Hg*) till sluttemperaturen t_2 och trycket h_2. De övriga bokstavskvantiteternas betydelse är följande: d luftskiktets tjocklek (i mm), α luftens utvidgningskoefficient 0,00367 och n luftens brytningsexponent för den använda ljusvaglängden λ. Vi kunna tillämpa denna formel vid bestämningen av luftskiktets

---

[1]) A. PEROT och CH. FABRY, Comptes rendus, *130*, p. 492; 1900. — Enligt vad dessa forskare senare uttalat (jämf. Beibl. zu Ann. d. Phys. *27*, p. 152; 1902) skulle diskordansen mellan de av ROWLAND och de av dem funna värdena på olika spektrallinjers våglängder till en del bero på olikheten mellan de av dem använda ljuskällorna (solen resp. ljusbåge i vakuum).

[2]) I ett arbete av år 1908 (Journ. d. Phys., t. VII, p. 169) hava BUISSON och FABRY med tillhjälp av en ny interferensapparat ånyo bestämt den gröna *Hg*-linjens våglängd och för denna då erhållit värdet 5460,741 Å. Det i Receuil de const. phys. av dem anförda värdet på denna våglängd utgör sålunda sannolikt ett medelvärde av det sistnämnda och det av PEROT och FABRY tidigare funna värdet. — Enligt vad H. KAYSER (Handbuch d. Spectroscopie, V, p. 549; 1910) uppgiver, har EVERSHEIM enligt en interferensmetod av liknande art som den av PEROT och FABRY använda erhållit $\lambda_{Hg\ \text{gul}_1} = 5790{,}664\ \text{Å}$ och $\lambda_{Hg\ \text{gul}_2} = 5769{,}603\ \text{Å}$.

absoluta tjocklek vid temperaturen t_2 och barometerståndet h_2, om vi i densamma sätta $t_1 = 15°$ och $h_1 = 760$ mm.

För torkning av den i interferensapparaten befintliga luften var vid mina försök (vid vardera försöksanordningen) ett litet kärl med fosforsyreanhydrid placerat under interferensapparaten. Huruvida den från arbetsrummet härstammande luften var tillräckligt ren, är svårt att med säkerhet avgöra. Men även om föroreningar i någon mindre grad voro förhanden, inverka de (såsom även SCHEEL påpekat) endast i den proportion, de förekommo, på korrektionstermen k. Vad speciellt den vattenånga beträffar, som oaktat torkningen av luften ännu förefanns (andra främmande beståndsdelar förekommo sannolikt i betydligt mindre proportion), är att märka, att dennas brytningsexponent så litet skiljer sig från luftens, att någon inverkan av densamma knappast behöver befaras.

23. För att vid den undersökning angående en termisk efterverkans eventuella förekomst hos kvartsringen, vartill vi nu övergå, icke behöva befara någon störande inverkan av luftrester på de ställen, varest kvartsringens utspräng berörde bottenplattan och täckglaset, skola vi till grund för denna undersökning lägga endast sådana försök, som utfördes med denna ring vid rumtemperatur efter det de plana ytelementen hos dess utspräng blivit mattslipade, alltså försök, som utfördes med användning av den senare beskrivna försöksanordningen (II). Emedan denna undersökning givit anledning till en revision av värdet på den ena gula kvicksilverlinjens vaglängd, skall senare även anföras några enligt försöksanordningen I utförda absoluta längdmätningar, medelst vilka en prövning av jämväl den andra gula kvicksilverlinjens våglängd kunnat verkställas. Emedan de i Recueil de const. phys. upptagna värdena på dessa våglängder även grunda sig på interferensförsök, kunna vi a priori icke vänta oss, att genom nämnda här företagna revision av dessa värden ernå någon väsentligt större noggrannhet, varför den ifrågavarande revisionen huvudsakligen är avsedd att utgöra en kontroll av dessa värden.

b) Observationer, utförda enligt försöksanordning II.

24. De avläsningar, som gjordes vid det första med tillhjälp av försöksanordningen II utförda försöket, äro återgivna i följande tabell, i vilken t betecknar interferensapparatens (luftskiktets) temperatur (medelvärdet av tvenne, endast några få hundradelsgrader från varandra avvikande temperaturavläsningar, den ena före och den andra efter mikrometeravläsningarna), h det medelst en i arbetsrummet upphängd kvicksilverbarometer bestämda lufttrycket (reducerat till en temperatur av 0° hos såväl kvicksilvret som barometerskalan) och d det med ABBE's kontaktmikrometer funna värdet på kvartsringens medelhöjd eller axellängd (den över bokstaven d utsatta pilen angiver, åt vilket håll, från observatorn sett, luftkilens kant var riktad). De övriga i tabellen förekommande bokstavskvantiteternas betydelse har tidigare angivits. Såsom av tabellen framgår, användes vid försöket endast den gröna och den ena gula *Hg*-linjen (*Hg* gul_1, jämf. ovan p. 32) varvid observationerna med den sistnämnda för kontrollens skull utfördes såväl före som efter dem med den gröna linjen. För vardera spektralfärgen utfördes inställningen av observationstubens dubbeltråd på de mörka linjerna först från venster till höger och därefter i motsatt riktning.

$h = 757{,}5$ mm; $\overleftarrow{d} = 10{,}098$ mm; $t = 10{,}2°$ C.

	Hg gul$_1$		*Hg* grön		*Hg* gul$_1$	
l_1	96	90	48	50	88	95
l_2	229	225	173	178	219	218
l_3 och l_0	359	357	359,8	362,9	356	358
	361,0	362,1	312	313	360,0	362,2
l_4	507	506	441	443	502	504
l_5	646	647	577	578	649	651
l_s	367,4	365,0	310,2	312,4	362,8	367,2
$OS = l_0 - l_s$	− 6,4	− 2,9	+ 49,6	+ 50,5	− 2,8	− 5,0
b	138,0	139,7	132,8	132,2	140,7	140,3
δ	− 0,046	− 0,021	+ 0,373	+ 0,382	− 0,019	− 0,036
	− 0,034		+ 0,378		− 0,028	

Enligt det tidigare fastställda beteckningssättet är alltså:

$$\delta_0 = +0{,}378 \text{ och } \delta = -\frac{0{,}034 + 0{,}028}{2} = -0{,}031,$$

varav vi med användning av värdet $\mu = 0{,}943026$ erhålla:

$$r = \delta - \delta_0 \cdot \mu = -0{,}387;\ r + 1 = 0{,}613.$$

Innan vi gå att söka de motsvarande värdena på M_0 och M, skola vi undersöka noggrannheten av värdena på δ_0 och δ. De av de enskilda observationerna erhållna värdenas avvikelser ($\Delta\delta$ och $\Delta\delta_0$) från medelvärdena framgå av följande sammanställning.

$\Delta\delta$	Medelv. av $\lvert\Delta\delta\rvert$	$\lvert\Delta\rvert_{max.}$	$\Delta\delta_0$	Medelv. av $\lvert\Delta\delta_0\rvert$	$\lvert\Delta\delta_0\rvert_{max.}$
− 0,015	0,011	0,015	− 0,005	0,005	0,005
+ 0,010			+ 0,004		
+ 0,012					
− 0,005					

Den större noggrannheten hos δ_0 beror tydligen på den större skärpa, varmed den gröna interferensbilden framträdde i jämförelse med den gula. Emedan åtminstone de tre första decimalerna i det ovan använda värdet på μ med säkerhet kunna anses för riktiga och det vid den på observationerna baserade beräkningen av r icke kommer an på någon större noggrann-

het hos μ, kunna vi anse det ovan erhållna värdet på r resp. $r+1$ noggrant på cirka två enheter av den andra decimalen när (vid flere av de senare anförda avläsningarna uppnåddes en ännu större noggrannhet).

Med användning av det mikrometriskt funna värdet $d = 10{,}098$ mm hava vi approximativt:

$$M_0 + \delta_0 = \frac{d}{\lambda_{0/2}} = \frac{10{,}098}{0{,}000273037} = 36985,$$

$$M + \delta = \frac{d}{\lambda/_2} = \frac{10{,}098}{0{,}000289533} = 34877.$$

De exakta värdena på M_0 och M erhålla vi nu ur följande tabell, i vilken gränsvärdena $M_0 = 36977$ och 36992 motsvara värdena $d = 10{,}096$ mm och 10,100 mm resp. (värdet $d = 10{,}098$ mm är, enligt vad tidigare [p. 29, not. 1] framhållits, noggrant på atminstone $\pm 0{,}002$ mm när) och μ antagits $= 0{,}943026$.

M_0	$M_0 \cdot \mu = M + r$
36977	34870,272
— — —	— — — —
36983	34875,931
36984	34876,874
36985	34877,817
36986	34878,760
36987	34879,703
36988	34880,646
36989	34881,589
36990	34882,532
36991	34883,475
36992	34884,418

Vi finna, att värdet $r + 1 = 0{,}613$ närmast överenstämmer med det i tabellen förekommande värdet 0,589, ehuru avvikelsen 0,024 något litet överskjuter gränsen 0,02. Vi erhålla på grund härav:

$$M_0 = 36989; \qquad M = 34881 + 1 = 34882;$$

och således

$$M_0 + \delta_0 = 36989{,}378; \quad M + \delta = 34881{,}969.$$

För den på sid. 32 nämnda korrektionstermen erhålla vi värdena

$$k_0 = -0{,}143 \text{ och } k = -0{,}135,$$

av vilka k_0 hänför sig till den gröna och k till den gula kvicksilverlinjen [1]). För ett luftskikt av den ifrågavarande tjockleken (d) vid temperaturen + 15° C och 760 mm:s barometerstånd gälla sålunda värdena

$$M_0 + \delta_0 + k_0 = 36989{,}235 \text{ och } M + \delta + k = 34881{,}834,$$

varav vi slutligen erhålla:

$$d = \begin{cases} (M_0 + \delta_0 + k_0)\,\lambda_0/_2 = 10{,}099430 \text{ mm} \\ (M + \delta + k)\,\lambda/_2 \quad = 10{,}099442 \quad \text{„} \end{cases}$$

Om vi bortse från onoggrannheten hos värdet på k_0, vilken i själva verket knappast torde beröra de tre angivna decimalerna, och antaga, att det ovan använda värdet på λ_0 är riktigt, finna vi med beaktande av felet hos δ_0, att värdet $d = (M_0 + \delta_0 + k_0)\frac{\lambda_0}{2} = 10{,}099430$ mm är riktigt, så när som på icke fullt 2 enheter av den 6:tte decimalen, motsvarande alltså en noggrannhet av c:a *2 tiomiliondedelar av hela värdet.*

Detta mot kvartsringens medelhöjd vid temperaturen 10,2° svarande värde på d är c:a $1{,}4.10^{-3}$ mm större än det medelst kontaktmikrometern vid en temperatur av c:a 14° erhållna medelvärdet 10,098 mm. Ehuru denna differens faller inom gränserna för de vid den sistnämnda bestämningen möjliga felen, synes den även till någon del kunna bero på en, om ock ytterst ringa, konkavitet hos de luftkilen begränsande ytorna. Oaktat interferensstrimmorna, åtminstone till den del de framträdde i synfältet, voro fullständigt rätliniga och parallella, finner man nämligen vid en närmare undersökning, såsom av följande sammanställning framgår, en viss olikhet i de enskilda strimmornas bredd.

	Hg gul_1		*Hg* grön		*Hg* gul_1	
$l_2 - l_1$	133	135	125	128	131	123
$l_3 - l_2$	130	132	139	135	137	140
$l_4 - l_3$	148	149	139	130	146	146
$l_5 - l_4$	139	141	136	135	147	146

Ehuruväl de vid de enskilda inställningarna begångna felen icke voro så alldeles små, synes det dock knappast kunna bero på en tillfällighet, att värdena på $l_2 - l_1$ genomgående äro något litet mindre än de motsvarande värdena på $l_5 - l_4$. En, om ock mycket svag, cylindrisk krökning synes sålunda hava förekommit hos åtminstone den ena av de båda speglande ytorna.

[1]) Vid dessa liksom även vid alla följande beräkningar av korrektionstermen har d antagits = 10,1 mm. Beträffande de övriga i formeln för k ingående kvantiteterna, har gjorts bruk av de värden på dessa, som funnits att tillgå i LANDOLT-BÖRNSTEIN's tabeller.

25. Differensen mellan de värden på d, som vi beräknat med tillhjälp av de båda använda spektrallinjernas våglängder (λ_0 och λ), ävensom det observerade värdets på $r+1$ avvikelse från det därmed närmast överensstämmande värdet i tabellen för $m+r$ tyder på att det värde på förhållandet mellan de nyssnämnda våglängderna ($\mu = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 0{,}943026$), varav vi hittills gjort bruk, icke är fullt så noggrant, som för vårt ändamål är önskvärt, och skola vi därför med tillhjälp av de redan anförda observationsdata underkasta detta värde en revision resp. nybestämning.

Vi beteckna det nya värdet på μ med μ' och det motsvarande värdet på λ med λ' och erhålla då:

$$\mu' = \frac{\lambda_0}{\lambda'} = \begin{cases} \dfrac{m+\delta}{m_0+\delta_0} = \dfrac{34881{,}969}{36989{,}378} = 0{,}943026640; \\ \dfrac{m+\delta+k}{m_0+\delta_0+k_0} = \dfrac{34881{,}834}{36989{,}235} = 0{,}943026640. \end{cases}$$

Den fullständiga inbördes överensstämmelsen mellan de båda sålunda erhållna värdena på μ' utgör en bekräftelse av det tidigare nämnda sakförhållandet, att värdet på denna kvantitet icke är i märkbar grad beroende av luftskiktets temperatur eller tryck — åtminstone så länge temperatur- och tryckvariationerna äro små. Noggrannheten av ifrågavarande värde sträcker sig dock icke så långt som till den sist anförda decimalen. Med användning av de tidigare funna medelavvikelserna $\Delta\delta$ och $\Delta\delta_0$ erhåller man såsom övre gräns för felet hos μ':

$$\pm \frac{36990 \cdot 0{,}011 + 34882 \cdot 0{,}005}{(38989)^2} = \pm 4{,}2 \cdot 10^{-7},$$

vilket innebär, att det ifrågavarande värdet på μ' kan anses för riktigt åtminstone t. o. m. 6:te decimalen. På grund av de enskilda avvikelsernas ($\Delta\delta$ och $\Delta\delta_0$) fåtalighet kan något tillförlitligt värde på det sannolika felet icke angivas, men är detta förmodligen icke obetydligt mindre än det nyss härledda gränsvärdet. Om man med försummande av de två sista decimalerna i det ovan funna värdet sätter $\mu' = 0{,}9430266$, erhåller man för $M_0 = 36989$, $M+r = M_0 \cdot \mu' = 34881{,}612$, i vilket tal decimalerna så gott som fullständigt överensstämma med det observerade värdet $r = 0{,}613$.

Under förutsättning, att värdet $\lambda_0 = 5460{,}740\ \text{Å}$ (gällande för torr luft vid $+15°$ C och normalt tryck) är riktigt, erhålla vi med användning av värdet $\mu' = 0{,}9430266$:

$$\lambda' = \lambda_{Hg\ gul_1} = \frac{\lambda_0}{\mu'} = 5790{,}653_4\ \text{Å}$$

i stället för det på sid. 32 anförda värdet 5790,657 Å. Det nya värdet på den ifrågavarande gula kvicksilverlinjens våglängd giver för kvartsringens axellängd vid $+10{,}2°$ C värdet

$$d = (M+\delta+k)\frac{\lambda'}{2} = 10{,}099430_6\ \text{mm},$$

vilket fullständigt överensstämmer med det med tillhjälp av λ_0 tidigare beräknade värdet.

26. Sedan interferensapparaten gradvis upphettats till en temperatur av 350° och däretter stegvis fått avsvalna [1]), gjordes åter vid rumtemperatur en serie avläsningar, vilka jämte de därpå grundade beräkningarna anföras här (till de vid de högre temperaturerna gjorda observationerna skola vi återkomma senare):

$h = 752{,}5$ mm; $\overleftarrow{d} = 10{,}098$ mm; $t = 8{,}9°$ C.

		Hg gul_1		*Hg* grön		*Hg* gul_1	
l_1		43	42	90	93	45	44
l_2		192	185	217	219	184	188
l_3 och l_0		264,3	265,0	352	353	266,2	265,1
		327	326	366,2	364,9	324	323
l_4		464	465	484	486	461	464
l_5		613	614	628	627	612	614
l_s		327,8	326,4	354,2	355,6	325,2	326,6
$OS = l_0 - l_s$		− 63,5	− 61,4	+ 12,0	+ 9,3	− 59,0	− 61,5
b		140,3	142,0	134,2	133,5	140,7	141,7
δ		− 0,453	− 0,432	+ 0,089	+ 0,070	− 0,419	− 0,434
		− 0,443		+ 0,080		− 0,427	

$$\delta_0 = +0{,}080; \qquad \delta = -0{,}435;$$

$$r = \delta - \delta_0 \cdot \mu = -0{,}510 \quad (\mu = 0{,}943026);$$

$$r + 1 = +0{,}490 \text{ (i tabellen på sid. 35 } r = 0{,}475);$$

$$M_0 = 36991; \qquad M = 34884;$$

$$M_0 + \delta_0 = 36991{,}080; \quad M + \delta = 34883{,}565;$$

$$k_0 = -0{,}120; \qquad k = -0{,}113;$$

$$\mu' = \frac{\lambda_0}{\lambda'} = \frac{M + \delta}{M_0 + \delta_0} = \frac{M + \delta + k}{M_0 + \delta_0 + k_0} = 0{,}9430264;$$

$$\lambda_{Hg\ \text{gul}_1} = \lambda' = \frac{\lambda_0}{\mu'} = 5790{,}654_4\ \text{Å};$$

$$d = \left\{ \begin{array}{l} (M_0 + \delta_0 + k_0)\,\dfrac{\lambda_0}{2} = 10{,}099900_{75} \\ (M + \delta + k)\,\dfrac{\lambda'}{2} = 10{,}099900_{74} \end{array} \right\} = 10{,}099901 \text{ mm.}$$

[1]) Upphettningen och avsvalningen försiggingo under sammanlagt 5 dygn, varvid det sista steget i avsvalningsprocessen — från 116,5° till rumtemperatur — skedde under loppet av 15 à 20 timmar.

Jämföra vi de erhållna värdena på μ, λ och d med de motsvarande genom det förra försöket funna värdena, finna vi, att medan värdena på de två förstnämnda kvantiteterna fullständigt (inom felgränserna) överensstämma med varandra i de båda fallen, har för d i det senare fallet, d. v. s. vid temperaturen 8,9° C, erhållits ett värde, som med 470×10^{-6} mm *överskjuter* det för d tidigare eller vid en temperatur av 10,2° erhållna värdet. Enligt REIMERDES med samma kvartsring utförda försök är koefficienten för kvartsens utvidgning i optiska axelns riktning vid + 10° C lika med $7{,}0939 \times 10^{-6}$. En temperatursänkning av 1,3° bör sålunda medföra en c:a 94×10^{-6} mm stor minskning av den c:a 10,1 cm höga ringens axellängd. Emedan, såsom tidigare (p. 25) nämnts, en temperaturvariation av 0,1° var tillräcklig för att åstadkomma en tydlig förskjutning av interferensstrimmorna, men någon dylik förskjutning icke kunde observeras under den tid avläsningarna verkställdes (differenserna mellan de båda avläsningsserierna för *Hg* gul_1 falla fullständigt inom felgränserna) och temperaturavläsningarna före och efter vartdera försöket därjämte fullkomligt överensstämde med varandra, kan man icke gärna antaga, att kvartsringens temperatur vid dessa försök skulle märkbart avvikit från den omgivande luftens eller den av termometern angivna temperaturen (en temperarurdifferens av denna art av icke mindre än 8°, som i sådant fall skulle varit erforderlig för förklaring av den observerade avvikelsen hos värdena på d, maste i varje fall anses utesluten). Då vidare interferensapparaten icke på något sätt rubbats mellan de båda ifrågavarande försöken och ett eventuellt förorenande av luften inom upphettningskärlet genom spår av förbränningsprodukter knappast heller skulle förmått åstadkomma en så stor ökning av värdena på M_0 och M som den observerade[1]), måste väl den nämnda $(470 + 94) \times 10^{-6}$ mm stora inversionen hos ringens dilatation åtminstone i huvudsak anses härröra av en på upphettningen (till c:a 350°) följande *termisk efterverkan.*

27. Med användning av värdet $\mu = 0{,}9430265$ (medeltalet av de båda ovan erhållna värdena på denna kvantitet få vi följande korrigerade tabell för bestämning av m_0 och m:

M_0	$M_0 \cdot \mu = M + r$
36985	34877,835
36986	34878,778
36987	34879,721
36988	34880,664
36989	34881,607
36990	34882,550
36991	34883,493
36992	34884,436

[1]) Ett fullständigt ersättande av luften i interferensapparaten med kolsyra skulle medfört en blott c a 2,8 gånger så stor ökning av dessa värden som den observerade. Vattenångan skulle däremot verkat i motsatt riktning. Jämför för övrigt det på sid. 33 ävensom det längre fram i slutet av § 45 sagda.

Emedan, enligt vad tidigare (p. 14) nämnts, någon termisk efterverkan förut icke torde blivit påvisad hos kvarts och revisionen av den gula kvicksilverlinjens våglängd går ut på en möjligast noggrann bestämning av värdet på μ, anföras här ytterligare de vid begynnelse- och sluttemperaturerna vid den följande, av den föregående oberoende, försöksserien gjorda observationerna. Med uttrycket „oberoende" förstå vi här, att interferensapparaten före den nya försöksserien tagits i sär och omsorgsfullt rengjorts (ytorna polerats) samt ånyo inställts, varvid luften inom upphettningskroppen självfallet förnyats. Såsom i de följande tabellerna genom den över bokstaven d anbragta pilen antydes, var luftkilens kant nu vänd åt motsatt håll mot förut.

Vid en begynnelsetemperatur av + 12,0° C gjordes följande mätningar:

$h = 737{,}5$; $\vec{d} = 10{,}098$ mm; $t = 12{,}0°$ C.

	Hg gul$_1$		*Hg* grön		*Hg* gul$_1$	
l_1	98	97	53	55	0	1
l_2	227	226	173	175	130	129
l_3	351	351	296	297	253	254
l_0	410,5	410,9	310,0	309,9	309,2	310,0
l_4	475	473	411	408	378	378
l_5	600	596	521	519	495	494
l_s	350,2	348,6	290,8	290,8	251,2	251,2
$OS = l_s - l_0$	− 60,3	− 62,3	− 19,2	− 19,1	− 58,0	− 58,8
b	125,0	124,3	117,7	116,2	123,8	123,7
δ	− 0,482	− 0,501	− 0,162	− 0,173	− 0,468	− 0,475
	− 0,492		− 0,168		− 0,472	

$$\delta_0 = -0{,}168; \qquad \delta = -0{,}482;$$

$r = \delta - \delta_0 \cdot \mu = -0{,}324$; $r + 1 = +0{,}676$ (i tabellen på sid. 39 $r = 0{,}664$ [1])

$$M_0 = 36988; \qquad M = 34881;$$

$$M_0 + \delta_0 = 36987{,}833; \quad M + \delta = 34880{,}518;$$

$$k_0 = +0{,}192; \qquad k = +0{,}181;$$

$$\mu' = \frac{\lambda_0}{\lambda'} = \frac{M + \delta}{M_0 + \delta_0} = \frac{M + \delta + k}{M_0 + \delta_0 + k_0} = 0{,}9430268$$

$$\lambda_{Hg\ gul_1} = \lambda' = \frac{\lambda_0}{\mu'} = 5790{,}652_0\ \text{Å}.$$

[1]) Den ursprungliga tabellen på sid. 35 är i detta fall oanvändbar, i det att $r + 1 = 0{,}676$ ligger så gott som alldelss mitt emellan talen 0,646 och 0,703.

$$d = \left\{ \begin{array}{l} (M_0 + \delta_0 + k_0)\frac{\lambda_0}{2} = 10{,}099099 \\ (M + \delta + k)\ \frac{\lambda'}{2} = 10{,}099099 \end{array} \right\} = 10{,}099099 \text{ mm.}$$

Att värdet på d nu är något mindre än de av de tidigare försöken (vid några grader lägre temperatur) erhållna värdena kan till en del bero därpå, att det på luftkilens övre begränsningsyta befintliga märket intog ett något litet förändrat läge i förhållande till ringen, men synes även till en annan del härröra av den förändring de båda begränsningsytorna undergått i förhållande till varandra. Medan det totalreflekterande prismat och således även den övre begränsningsytan förblivit orienterade på samma sätt som förut, hade nämligen bottenplattan vid omsvängningen av luftkilens kant vridits ett halvt varv kring sin axel. Denna förändring av begränsningsytornas inbördes ställning framgår även av följande sammanställning av värdena på de enskilda interferensstrimmornas bredder:

	Hg gul$_1$		*Hg* grön		*Hg* gul$_1$	
$l_2 - l_1$	129	129	120	120	130	128
$l_3 - l_2$	124	125	123	122	123	125
$l_4 - l_3$	124	122	115	111	125	124
$l_5 - l_4$	125	123	110	111	117	116

Strimmorna $l_5 - l_4$ äro här genomgående något litet smalare än strimmorna $l_2 - l_1$, medan det vid båda de tidigare försöken förhöll sig omvänt (se p. 36).

28. Sedan interferensapparaten därefter stegvis upphettats till en temperatur av 320° och därefter åter stegvis fått avsvalna — allt under förloppet av c:a 4 dygn (sista steget i avsvalningen, från 90° till rumtemperatur, under c:a 1 dygn) — gjordes följande observationer:

$h = 759{,}3$ mm; $\vec{d} = 10{,}098$ mm $t = 13{,}0°$ *C.*

	Hg gul$_1$		*Hg* grön		*Hg* gul$_1$	
l_1	12	11	68	69	12	11
l_2	137	135	193	195	138	139
l_3 och l_0	263	260	307,5	307,0	261	263
	308,3	306,4	311	312	307,1	306,5
l_4	386	389	428	427	388	387
l_5	505	503	538	539	503	506
l_s	460,6	259,6	307,6	308,4	260,4	261,2
$OS = l_s - l_0$	− 47,7	− 46,8	+ 0,01	+ 1,4	− 46,7	− 45,3
b	123,7	124,3	117,5	117,0	123,5	123,8
δ	− 0,385	− 0,377	+ 0,001	+ 0,012	− 0,378	− 0,366
	− 0,381		+ 0,070		− 0,372	

$$\delta_0 = +0{,}007; \qquad \delta = -0{,}377;$$

$$r = \delta - \delta_0 \cdot \mu = -0{,}384; \quad r+1 = 0{,}616 \text{ (i tabellen på sid. 39 : } r\ 0{,}607);$$

$$M_0 = 36989; \qquad M = 34882;$$

$$k_0 = -0{,}063; \qquad k = -0{,}060;$$

$$\mu' = \frac{\lambda_0}{\lambda'} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{M+\delta}{M_0+\delta_0} = 0{,}9430267 \\ \dfrac{M+\delta+k}{M_0+\delta_0+k_0} = 0{,}9430267 \end{array} \right\} = 0{,}9430267;$$

$$\lambda_{Hg\ gul_1} = \lambda' = \frac{\lambda_0}{\mu'} = 5790{,}652_6\ \mathring{A};$$

$$d = \left\{ \begin{array}{l} (M_0+\delta_0+k_0)\dfrac{\lambda_0}{2} = 10{,}099350_3 \\ (M+\delta+k)\ \dfrac{\lambda'}{2} = 10{,}099350_7 \end{array} \right\} = 10{,}099351 \text{ mm.}$$

Det nu erhållna värdet på d är, såsom man finner, 252×10^{-6} mm större än det för den 1° lägre utgångstemperaturen tidigare funna värdet. Avdrager man från denna differens den längdtillväxt av 72×10^{-6} mm, som motsvarar temperaturskillnaden (se p. 39), återstår ett längdöverskott av 180×10^{-6} mm, som väl åter måste tillskrivas en termisk efterverkan. Att denna nu är något mindre än den vid den förra försöksserien konstaterade, finner sannolikt sin förklaring främst däri, att kvartsringen före den sista mätningen befunnit sig vid rumtemperatur en något längre tid än vad fallet var vid den föregående försöksserien samt till någon del möjligen även däri, att upphettningen nu icke varit fullt så stor som i föregående fall (320° mot 350°).

29. Sedan apparaten efter det sista försöket varit överlämnad åt sig själv under vidpass tre dagar gjordes åter en serie avläsningar vid rumtemperatur, vilka framgå av följande tabell.

$h = 756{,}5$ mm; $\quad \vec{d} = 10{,}098$ mm; $\quad t = 11{,}8°$ C.

	Hg gul_1		*Hg* grön		*Hg* gul_1	
l_1	92	90	17	19	90	93
l_2	220	223	141	142	221	223
l_3 och l_0	306,5	306,2	255	257	306,0	306,9
	346	347	305,8	306,7	346	347
l_4	461	463	375	377	465	464
l_5	582	582	484	486	580	583
l^s	340,2	341,0	254,4	256,2	340,4	342,0
$OS = l_s - l_0$	+33,7	+34,8	−51,4	−50,5	+34,4	+35,1
b	121,8	122,0	116,7	117,0	122,3	122,0
δ	+0,277	+0,285	−0,440	−0,432	+0,280	+0,288
	+0,281		−0,436		+0,284	

$$\delta_0 = -0{,}436;\ \delta = +0{,}283;\ r = \delta - \delta_0 \cdot \mu = +0{,}694.$$

Emedan r ligger ungefär mitt emellan värdena 0,721 och 0,664 i tabellen på sid. 39 (dock något litet närmare till det förra talet), kan man i detta fall icke ens medelst denna (korrigerade) tabell avgöra, huruvida M_0 är $= 36987$ eller en enhet större, vilket vittnar om att det till grund för denna tabell lagda värdet $\mu = 0{,}9430265$ icke tillräckligt väl överensstämmer med de senaste observationerna. Medelvärdet av samtliga ovan erhållna värden på μ är $= 0{,}9430266_4$. Upprättar man en ny tabell med användning av detta noggrannare värde, finner man

$$M_0 = 36988 \text{ och } M = 34880\ ^1).$$

Vi erhålla vidare $k_0 = -0{,}068$ och $k = -0{,}065$ samt

$$\mu' = \frac{\lambda_0}{\lambda'} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{M+\delta}{M_0+\delta_0} = 0{,}9430273 \\ \dfrac{M+\delta+k}{M_0+\delta_0+k_0} = 0{,}9430273 \end{array} \right\} = 0{,}9430273.$$

$$\lambda_{Hg\ gul_1} = \lambda' = \frac{\lambda_0}{\mu'} = 5790{,}648_9\ \text{Å};$$

$$d = \left\{ \begin{array}{ll} (M_0+\delta_0+k_0)\dfrac{\lambda_0}{2} = 10{,}098955 & \text{mm} \\ (M+\delta+k)\ \dfrac{\lambda'}{2} = 10{,}098955 & \text{„} \end{array} \right\} = 10{,}098955\ \text{mm}\ ^2).$$

I stället för den c:a 85×10^{-6} mm stora minskning av d, som skulle motsvarat temperatursänkningen från 13,0° till 11,8°, finna vi en 396×10^{-6} mm stor minskning under de dagar apparaten stått orörd. Det sist erhållna värdet på d är t. o. m. något, nämligen 144×10^{-6} mm, mindre än det mot den första utgångstemperaturen 12,0° svarande värdet (se sid. 41), ehuru denna temperatur med endast 0,2° överskjuter sluttempemperaturen, vilken temperaturdifferens skulle motsvaras av en endast c:a 14×10^{-6} mm stor minskning av d. Vid början av den ifrågavarande försöksserien torde kvartsningen i själva verket icke hava varit så fri från termisk efterverkan som vid slutet av densamma, alldenstund tiden mellan de två senaste ovan anförda försöken var åtminstone 3 gånger så lång som den mellan det sista försöket av föregående serie och det första av den senast betraktade. Ifall den vid de tidigare försöken konstaterade ökningen av d skulle varit endast skenbar, d. v. s. beroende på en

---

[1]) Att dessa värden på M_0 och M i själva verket äro de riktiga framgår även av en på sid. 52, not 1, omnämnd kontrollräkning.

[2]) Om man antoge $M_0 = 36987$ resp. $M = 34879$, erhölle man $\mu' = 0{,}9430258$, $\lambda' = 5790{,}658$ Å och $d = 10{,}098682$ mm. Emedan detta värde på d är ännu mindre än det ovan erhållna, skulle de slutsatser angående kvartsringens termiska efterverkan, som i det följande dragas, då gälla a fortiori.

förorening av luften inom upphettningskroppen, skulle man icke kunna förklara den minskning av d under dess mot utgångstemperaturen svarande värde, som framgått av det sista försöket.

De ovan anförda försöken leda sålunda samstämmigt till den slutsatsen, att *kvartsen icke är alldeles fri från termisk efterverkan*, i det att en, om ock mycket ringa, verkan av denna art kan påvisas hos detta ämne under någon dag efter det den efter en starkare upphettning avsvalnat till rumtemperatur. Att REIMERDES vid sina försök med den av mig använda kvartsringen icke konstaterat någon termisk efterverkan är förklarligt, då man beaktar, att uppvärmningen mellan begynnelse- och sluttemperaturerna vid hans försök var ganska liten i jämförelse med den vid de ovan beskrivna försöken förkomna (i medeltal endast c:a 23°).

30. För att med användning av monokromatiskt ljus av olika våglängder kunna utföra absoluta mätningar av kvartsringens axellängd vid olika temperaturer har det såsom vi sett, varit nödigt att med största möjliga grad av noggrannhet känna förhållandet mellan de använda spektrallinjernas våglängder. En sammanställning av de värden på $\frac{\lambda_0}{\lambda}$, till vilka vi i berörda avseende hittills kommit, och en uträkning av det sannolika felet hos medelvärdet giva till resultat:

$$\mu = \frac{\lambda_{Hg\ grön}}{\lambda_{Hg\ gul_1}} = \left\{\begin{array}{l} 0{,}9430264 \\ 0{,}9430266 \\ 0{,}9430268 \\ 0{,}9430267 \\ 0{,}9430273 \end{array}\right\} = 0{,}9430267_6 \pm 10 \times 10^{-8}.$$

Det ur Recueil de Constantes physiques erhållna värdets ($\mu = 0{,}9430260$) avvikelse från detta medelvärde utgör icke fullt en enhet av den sjätte decimalen. Av de ur LANDOLT'S tabeller hämtade värden på λ_0 och och $\lambda_{Hg\ gul_1}$, som REIMERDES vid sin undersökning hade att tillgå, erhölls $\mu = 0{,}94332$, medan REIMERDES genom en revision av detta värde kom till talet 0,94302, vars noggrannhet han synes uppskatta till c:a en enhet av den femte decimalen. Någon uppgift om de observationsdata, av vilka han härledde det nya värdet på μ, meddelar han dock icke (sannolikt gjorde han bruk av endast ett mycket tunnt luftskikt). Ehuru det sistnämnda värdet är tillräckligt noggrant för dilatationsbestämningar, är det dock, såsom vi sett, långt ifrån så noggrant, som för absoluta medelst interferensförsök utförda mätningar av c:a 1 cm stora längder är erforderligt.

Under antagande att det för torr luft av temperaturen + 15° C och 760 mm:s tryck gällande värdet $\lambda_0 = 5460{,}740$ Å är riktigt, erhålla vi av de ovanstående försöken (med angivande av medeltalets sannolika fel):

$$\lambda_{Hg\ gul_1} = \left\{\begin{array}{l} 5790{,}653_2\ \text{Å} \\ 5790{,}654_4\ \text{„} \\ 5790{,}652_0\ \text{„} \\ 5790{,}652_6\ \text{„} \\ 5790{,}648_9\ \text{„} \end{array}\right\} = (5790{,}6522 \pm 7{,}2 \times 10^{-4})\ \text{Å},$$

vilket värde är 0,005 Å mindre än det i de franska tabellerna upptagna värdet 5790,657 Å, från vilket vi ursprungligen utgått (se ovan pgg. 32, 34 och 35).

Det förtjänar måhända i sammanhang härmed anmärkas, att den på interferensförsök grundade metod för jämförelse av olika spektrallinjers våglängder, som här blivit använd, synes erbjuda ett medel att på ett relativt enkelt sätt och med uppnående av stor noggrannhet bestämma ljusvåglängder „absolut", d. v. s. relativt någon av de av MICHELSON med arkivmetern direkt jämförda kadmiumlinjernas våglängder.

31. Den av samtliga ovanstående försök erhållna bekräftelsen av PULFRICH's slutsats, att förhållandet $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ icke i märkbar grad är beroende av luftens temperatur, hänför sig i dessa försök till endast mycket små temperaturintervaller. Emedan det kan vara av intresse att pröva slutsatsens riktigheter även för större temperaturskillnader, anför jag här de observationer, som gjordes, då interferensapparaten efter det sista av de ovanstående försöken (utan rubbning av densamma) upphettats till en temperatur av 266,5°.

$h = 755{,}2$ mm; $\vec{d} = 10{,}098$ mm; $t = 266{,}5°$ C.

	Hg gul$_1$		*Hg* grön		*Hg* gul$_1$	
l_1	94	93	17	18	95	95
l_2	218	220	130	129	222	221
l_3 och l_0	303,3	302,9	248	250	303,0	303,1
	340	337	302,0	303,1	341	344
l_4	453	452	363	365	457	455
l_5	573	571	475	473	575	574
l_s	335,6	334,6	246,6	247,0	338,0	338.0
$OS = l_s - l_0$	+ 32,3	+ 31,7	− 55,4	− 56,1	+ 35,0	+ 34,9
b	119,0	118,3	115,2	115,2	119,2	118,7
δ	+ 0,271	+ 0,268	− 0,481	− 0,485	+ 0,294	+ 0,294
	+ 0,270		− 0,483		+ 0,294	

$\delta_0 = -0{,}483$; $\delta = +0{,}282$; $r = \delta - \delta_0 \cdot \mu = +0{,}737$.

Av de vid särskilda försöksserier gjorda direkta observationerna av det antal gröna interferensstrimmor, som vid olika höga uppvärmningar vandrade förbi märket i interferensapparaten, kan man sluta till att detta antal i föreliggande fall (vid uppvärmningen från 11,8 till 266,5°) var omkring 85. Emedan M_0 vid utgångstemperaturen hade värdet 36988 (se sid. 43), bör följaktligen denna kvantitet vid sluttemperaturen 266,5° hava ett värde i närheten av talet 37073. Om man till grund för beräkningen av M_0:s exakta värde lägger det vid begynnelsetemperaturen (11,8°) funna värdet på $\mu = 0{,}9430273$, erhåller man för $M_0 = 37075\ m + r$

$= M_0 \cdot \mu = 34962{,}737$, varvid r $(= 0{,}737)$ t. o. m. exakt överensstämmer med det observerade värdet $r = + 0{,}737$. Vi ha alltså

$$M_0 = 37075; \quad M = 34962$$

och erhålla på grund därav:

$$\mu = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{M + \delta}{M_0 + \delta_0} = 0{,}9430273,$$

vilket värde fullständigt överensstämmer med det vid utgångstemperaturen funna värdet[1]).

För korrektionstermerna k_0 och k få vi nu betydligt större värden än tidigare, nämligen $k_0 = + 4{,}871$ och $k = + 4{,}595$. Med användning av dessa värden erhålla vi

$$\mu = \frac{M + \delta + k}{M_0 + \delta_0 + k_0} = 0{,}9430273.$$

Detta värdes överensstämmelse med det nyss erhållna kan betraktas såsom en bekräftelse av den för beräkningen av k_0 och k använda formelns tillförlitlighet.

c) Observationer, utförda enligt försöksanordning I.

32. Emedan dubbeltråden i observationstuben vid dessa försök icke inställdes på någondera av de båda gula *Hg*-linjernas interferenslinjer skilt för sig, utan på de något bredare mörka linjer, som uppstodo i synfältet genom de båda nyssnämnda linjernas superposition, böra vi till grund för de av dessa försök gjorda beräkningarna lägga den våglängd ($\lambda_{Hg\ gul}$), som motsvarar medelvärdet av de båda ifrågavarande linjernas våglängder. Enligt Recueil de constantes physiques erhålla vi

$$\lambda_{Hg\ gul} = \frac{5790{,}657 + 5769{,}596}{2} = 5780{,}127\ \text{Å},$$

vilket värde giver

$$\mu = \frac{\lambda_0}{\lambda_{Hg\ gul}} = 0{,}9447439.$$

[1]) En liknande beräkning, utförd med stöd av de observationer, som gjordes vid den högsta vid denna försöksserie förekomna temperaturen, 334,7° (jämf. försöksserien III, p. 54), har givit till resultat $\mu = 0{,}9430264$, vilket värde även inom felgränserna överensstämmer med det vid begynnelsetemperaturen erhållna (med medelvärdet av de tidigare härledda värdena på μ är överensstämmelsen ännu bättre).

För prövning av detta värde anföras här följande observationer:

$h = 752$ mm; $d = 10{,}117$ mm; $t = 11{,}7°$ C.

		Hg grön		*Hg* gul		*Hg* grön	
	l_1	7	9	29	31	15	16
l_2 och l_0	l_2	203	205	167,8	171,2	212	216
	l_0	273,2	273,6	237	235	281,5	282,0
	l_3	405	404	450	452	417	416
	l_s	205,0	206,0	238,7	239,3	214,7	216,0
OS_2	$l_0 - l_s$	+ 68,2	+ 67,6	− 70,9	− 68,1	+ 66,9	+ 66,0
	b	199,0	197,5	210,5	210,5	201,0	200,0
	δ	+ 0,343	+ 0,342	− 0,337	− 0,324	+ 0,333	+ 0,330
		+ 0,343		− 0,332		+ 0,332	

$\delta_0 = + 0{,}337$; $\delta = - 0{,}332$; $r = \delta - \delta_0 \cdot \mu = - 0{,}650$; $r + 1 = 0{,}350$.

Värdet på M_0 måste tydligen stå att söka i närheten av $d : \frac{\lambda_0}{2} = 37053$. Med användning av det ovan angivna värdet på μ finna vi, för $M_0 = 37057$, $M + r = M_0 \cdot \mu = 35009{,}375$, varav följer:

$$M_0 = 37057\,; \quad M = 35010;$$

$$\mu' = \frac{\lambda_0}{\lambda'} = \frac{M + \delta}{M_0 + \delta_0} = 0{,}9447432\,;$$

$$\lambda'_{Hg\ gul} = \frac{\lambda_0}{\mu'} = 5780{,}132\ \text{Å}.$$

Differenserna mellan μ och μ' samt λ och λ' äro icke större än flere av de för *Hg* gul_1 tidigare funna motsvarande differenserna (jämf. ovan sid. 44). Göra vi bruk av den av de föregående försöken erhållna våglängden $\lambda_{Hg\ gul_1} = 5790{,}652$ Å, få vi för den andra gula kvicksilverlinjens våglängd värdet

$$\lambda_{Hg\ gul_2} = 2 \cdot \frac{\lambda_0}{\mu'} - \lambda_{Hg\ gul_1} = 5769{,}611\ \text{Å},$$

vilket med 0,015 Å överskjuter det i de franska tabellerna upptagna värdet på denna våglängd. Att den sistnämnda avvikelsen är något större än de för $\lambda_{Hg\ gul_1}$ erhållna avvikelserna (jmf. sid. 44) tyder på att det i nämnda tabeller upptagna värdet på $\lambda_{Hg\ gul_2}$ är i någon mån för litet. Med det av Eversheim (se ovan, sid. 32, not. 2) ävenledes genom interferensförsök funna värdet $\lambda_{Hg\ gul_2} = 5769{,}603$ Å överensstämmer det här erhållna tämligen väl. Ehuru de

av mig vid särskilda andra temperaturer med tillhjälp av försöksanordningen II gjorda observationerna skulle tillåta att kontrollera det här erhållna värdet resp. bestämma detta noggrannare, anser jag det icke för nödigt att här närmare ingå på denna uppgift, synnerligast som linjen *Hg* gul_2 icke direkt användes vid något av de i det följande beskrivna dilatationsförsöken.

I det här betraktade fallet hava vi vidare $k_0 = +0{,}011$ och $k_{(gul)} = +0{,}010$ och erhålla med användning härav

$$d = \left\{ \begin{array}{l} (M_0 + \delta_0 + k_0) \cdot \frac{\lambda_0}{2} = 10{,}118027_1 \text{ mm} \\ (M + \delta + k) \cdot \frac{\lambda'}{2} = 10{,}118028_0 \quad „ \end{array} \right\} = 10{,}118028 \text{ mm}.$$

Liksom vid de tidigare beskrivna (med tillhjälp av försöksanordningen II utförda) försöken är det medelst interferensmätningarna erhållna värdet på d (vid rumtemperatur) även här c:a 0,001 mm större än det med tillhjälp av ABBES kontaktmikrometer erhållna värdet, vilket synes bekräfta den tidigare uttalade förmodan, att denna mikrometer vid mätning av längder av storleksordningen 10 mm gav ett i någon mån för litet värde.

V. Undersökning av kvartsens termiska dilatation i optiska axelns riktning.

a) Beräkningsmetod.

33. Enligt RANDALL's i inledningen nämnda undersökning kan man icke vänta sig, att sambandet mellan kvartsringens höjd och temperatur inom den temperaturintervall från c:a $+9°$ till $+434°$, som mina hithörande dilatationsförsök omfattade, skall kunna med tillräcklig noggrannhet framställas genom en kvadratisk interpolationsformel. Emedan vid dessa försök de till en och samma serie hörande observationerna i de allra flesta fall hänföra sig till fyra olika temperaturer, giva dessa försöksserier var för sig tillräckligt många data för uppställandet av en kubisk interpolationsformel, varvid den slutliga formeln, som eventuellt är av ännu högre grad än den tredje, kan erhållas genom användning av de av de skilda försöksserierna erhållna kubiska formlerna. Såvida man icke inskränker sig till en beräkning av medelutvidgningskoefficienterna för de olika temperaturintervallerna jämte en av dessa härledd allmän formel, vilket förfarande dock, såsom i inledningen (sid. 12) påpekats, i föreliggande fall synes alltför approximativt och godtyckligt, äro de skilda försöksserierna i allmänhet icke direkt jämförbara med varandra, på grund varav en tillämpning av minsta kvadratmetoden här knappast kan komma i fråga. Då det därjämte för bedömandet av noggrannheten är av vikt att kunna jämföra de av de olika försöksserierna erhållna värdena på dilatationskonstanterna med varandra, synes det ändamålsenligast att i överensstämmelse med det nyss sagda med bortlämnande av de termer i den allmänna formeln, sid. 10, som äro av

högre grad än den tredje i avseende å t, bestämma värdena på konstanterna a, b och c ur varje försöksserie skilt för sig. Utom dessa konstanter är i den nämnda formeln även L_0 (kvartsringens axellängd vid 0°) obekant, medan t och L äro bekanta. De fyra sammanhörande paren av värden på t och L giva oss de fyra ekvationer, som för de obekantas beräkning äro av nöden.

Beteckna vi de nyssnämnda fyra temperaturerna med t_1, t_2, t_3, t_4 och de motsvarande värdena på L med resp. L_1, L_2, L_3, L_4, hava vi:

$$L_1 = L_0 (1 + at_1 + bt_1^2 + ct_1^3)$$
$$L_2 = L_0 (1 + at_2 + bt_2^2 + ct_2^3)$$
$$L_3 = L_0 (1 + at_3 + bt_3^2 + ct_3^3)$$
$$L_4 = L_0 (1 + at_4 + bt_4^2 + ct_4^3).$$

Med tillhjälp av determinanter kunna dessa ekvationer utan svårighet lösas, varvid lösningen lämpligen kan givas följande form:

$$a = \frac{1}{L_0}\left\{\frac{(L_2 - L_1)(t_3 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_4)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)} - \frac{(L_3 - L_1)(t_4 t_2 + t_1 t_4 + t_1 t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_3)}\right.$$
$$\left. + \frac{(L_4 - L_1)(t_2 t_3 + t_1 t_2 + t_1 t_3)}{(t_4 - t_1)(t_4 - t_3)(t_4 - t_2)}\right\} = \frac{A}{L_0};$$

$$b = \frac{1}{L_0}\left\{-\frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1} \times \frac{t_4 (t_4 + t_1) - t_3 (t_3 + t_1)}{(t_3 - t_2)(t_4 - t_3)(t_4 - t_2)} + \frac{L_3 - L_1}{t_3 - t_1} \times \frac{t_4 (t_4 + t_1) - t_2 (t_2 + t_1)}{(t_3 - t_2)(t_4 - t_3)(t_4 - t_2)}\right.$$
$$\left. - \frac{L_4 - L_1}{t_4 - t_1} \times \frac{t_3 (t_3 + t_1) - t_2 (t_2 + t_1)}{(t_3 - t_2)(t_4 - t_3)(t_4 - t_2)}\right\} = \frac{B}{L_0};$$

$$c = \frac{1}{L_0}\left\{\frac{L_2 - L_1}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)} - \frac{L_3 - L_1}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)} + \frac{L_4 - L_1}{(t_4 - t_1)(t_4 - t_3)(t_4 - t_2)}\right\}$$
$$= \frac{C}{L_0};$$

$$L_0 = L_1 - At_1 - Bt_1^2 - Ct_1^3.$$

Förutom kvartsringens absoluta axellängd L_1 vid utgångstemperaturen t_1 är det enligt dessa formler endast nödigt att känna de längdförändringar ($L_2 - L_1$, o. s. v.), som motsvara temperaturintervallerna. I stället för att, såsom ovan skedde, bestämma det absoluta värdet på axellängden eller interferensskiktets medeltjocklek (d) vid de högre temperaturerna inskränka vi oss därför till bestämning av dilatationerna, vilka direkt giva oss kvantiteterna $L_2 - L_1$, o. s. v. Detta medför även den fördelen, att man, såsom av det följande skall framgå, för bestämning av det antal halva våglängder, som motsvarar en dylik längdförändring, kommer till rätta med ett betydligt mindre noggrant värde på förhållandet mellan de

använda spektrallinjernas våglängder $\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)$ än det, som för den totala längdens bestämning är erforderligt.

34. De spektrallinjer, som användes vid de enligt försöksanordning II utförda försöken angående kvartsringens absoluta utvidgning — de försök, vilka här i främsta rummet komma i fråga — utgjordes av de tidigare nämnda *Hg* grön och *Hg* gul_1, för vilkas våglängder vi bibehålla de förut använda beteckningarna λ_0 och λ [1]). Beräkningen av det antal interferensstrimmor, som tillföljd av en tjockleksförändring hos luftskiktet vandrat förbi interferensapparatens märke, skiljer sig från det vid bestämningen av luftskiktets absoluta tjocklek använda räkneförfarandet endast däri, att medan man i sistnämnda fall utgår från ett luftskikt av tjockleken noll, man här har att utgå från ett luftskikt av ändlig tjocklek, för vilket de motsvarande värdena på δ och δ_0 (se sid. 28 o. 30) särskilt måste bestämmas. Man har därför nu att räkna med två par värden på dessa kvantiteter, vilka vi, under förutsättning att den lägre temperaturen är t_1 och den högre t_2, beteckna med resp. δ_{t_1}, $\delta_{0_{t_1}}$ och δ_{t_2}, $\delta_{0_{t_2}}$. I avseende å förtecknen bibehålla vi den tidigare (p. 28) träffade överenskommelsen. Antalet förbi märket förskjutna interferenslinjer är då:

$$f = m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1} \quad \text{för } Hg \text{ gul}_1 \text{ och}$$

$$f_0 = m_0 + \delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}} \quad \text{„ } Hg \text{ grön,}$$

varvid den tillföljd av kvartsringens uppvärmning inträdda förändringen av luftskiktets tjocklek bestämmes genom likheten:

$$L_2 - L_1 = \Delta d = f \cdot \frac{\lambda}{2} = f_0 \cdot \frac{\lambda_0}{2}.$$

Man har följaktligen:

$$(m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1}) \frac{\lambda}{2} = (m_0 + \delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}}) \frac{\lambda_0}{2},$$

vilken likhet även kan skrivas under formen

$$m_0 \cdot \mu = m + \varrho,$$

da

$$\varrho = (\delta_{t_2} - \delta_{t_1}) - (\delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}}) \mu.$$

Vi hava nu att uppställa en tabell för $m = 1, 2, 3 \cdots$ och de motsvarande värdena på $m_0 \cdot \mu = m + \varrho$, av vilken man med tillhjälp av det experimentellt funna värdet på ϱ och en approximativ kännedom om m_0 finner de exakta värdena på de hela talen m_0 och m. Då bråket ϱ i allmänhet icke är känt med en större noggrannhet än c:a 2 enheter av den andra

[1]) I fråga om de få användbara försök, som utfördes med tillhjälp av försöksanordningen I (se nedan p. 64) betecknar λ medelvärdet av de båda gula *Hg*-linjernas våglängder.

decimalen, är det icke nödigt att uträkna $m_0 \cdot \mu$ med flere decimaler än två. Vid alla mina försök var m_0 mindre (oftast betydligt mindre) än 180. För produkten $180\,\mu$, bestämd med två decimaler, erhåller man ännu samma värde, vare sig man för μ använder närmevärdet 0,943 eller det ovan funna noggrannare värdet 0,9430268. Den ifrågavarande tabellen för $m_0 \cdot \mu$ följer här:

Tabell för $m_0 \cdot \mu = m + (\delta_{t_2} - \delta_{t_1}) - (\delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}})\,\mu = m + \varrho$

m_0	m	$\varrho \cdot 10^2$	m_0	m	$\varrho \cdot 10^2$	m_0	m	$\varrho \cdot 10^2$	m_0	m	$\varrho \cdot 10^2$	m_0	m	$\varrho \cdot 10^2$	m_0	m	$\varrho \cdot 10^2$
1	0	94	31	29	23	61	57	52	91	85	81	121	114	10	151	142	40
2	0	89	32	30	18	62	58	47	92	86	76	122	115	05	152	143	34
3	2	83	33	31	12	63	59	41	93	87	70	123	115	99	153	144	28
4	3	77	34	32	06	64	60	35	94	88	64	124	116	93	154	145	23
5	4	72	35	33	01	65	61	30	95	89	59	125	117	88	155	146	17
6	5	66	36	33	95	66	62	24	96	90	53	126	118	82	156	147	11
7	6	60	37	34	89	67	63	18	97	91	47	127	119	76	157	148	06
8	7	55	38	35	83	68	64	12	98	92	41	128	120	70	158	149	00
9	8	49	39	36	78	69	65	07	99	93	36	129	121	64	159	149	94
10	9	43	40	37	72	70	66	01	100	94	30	130	122	59	160	150	88
11	10	38	41	38	66	71	66	95	101	95	24	131	123	54	161	151	83
12	11	32	42	39	61	72	67	90	102	96	19	132	124	48	162	152	77
13	12	26	43	40	55	73	68	84	103	97	13	133	125	42	163	153	71
14	13	21	44	41	49	74	69	78	104	98	07	134	126	36	164	154	66
15	14	15	45	42	44	75	70	72	105	99	02	135	127	31	165	155	60
16	15	09	46	43	38	76	71	67	106	99	96	136	128	25	166	156	54
17	16	04	47	44	32	77	72	61	107	100	90	137	129	19	167	157	49
18	16	98	48	45	26	78	73	55	108	101	84	138	130	13	168	158	43
19	17	92	49	46	21	79	74	50	109	102	77	139	131	07	169	159	37
20	18	86	50	47	15	80	75	44	110	103	73	140	132	04	170	160	31
21	19	80	51	48	09	81	76	38	111	104	67	141	132	97	171	161	26
22	20	75	52	49	04	82	77	33	112	105	62	142	133	91	172	162	20
23	21	69	53	49	98	83	78	27	113	106	56	143	134	85	173	163	14
24	22	63	54	50	92	84	79	21	114	107	50	144	135	80	174	164	09
25	23	58	55	51	87	85	80	16	115	108	45	145	136	74	175	165	03
26	24	52	56	52	81	86	81	10	116	109	39	146	137	68	176	165	97
27	25	46	57	53	75	87	82	04	117	110	34	147	138	62	177	166	92
28	26	40	58	54	69	88	82	98	118	111	28	148	139	56	178	167	86
29	27	35	59	55	64	89	83	93	119	112	22	149	140	51	179	168	80
30	28	29	60	56	58	90	84	87	120	113	16	150	141	45	180	169	74

Sedan man funnit de mot en given temperaturintervall svarande värdena på m_0 och m, finner man värdena på f_0 och f enligt de för dessa kvantiteter tidigare uppställda uttrycken, varefter man med tillhjälp av den enkla relationen $f_0 = f \cdot \mu$ reducerar det gula strimsystemets förskjutning till det gröna och bildar det aritmetriska medelvärdet av de båda sa-

lunda erhållna värdena på f_0. Värdet på f_0 måste slutligen ännu medelst den på sid. 32 anförda formeln för k korrigeras med hänsyn till den genom temperaturförändringen och en eventuell variation av lufttrycket alstrade förändringen av det i interferensapparaten befintliga luftskiktets brytningsförmåga. Betecknas denna korrektion med k_0' och kvartsringens lineära utvidgning i axelns riktning med ΔL, har man slutligen

$$\Delta L = \left(\frac{f_0 + f/\mu}{2} + k_0'\right)\frac{\lambda_0}{2}.$$

Anmärkning. Ifall det observerade värdet på ϱ på grund av försöksfelen icke tillräckligt nära överensstämmer med något av de i tabellen mellan bestämda gränser förekommande värdena, har man den utvägen, att man, i likhet med vad vi tidigare gjort, med användning av det ovan funna noggrannare värdet på μ bestämmer de mot luftskiktets absoluta tjocklek svarande värdena på $M_0 + \delta_0$ och $M + \delta$ för de båda ifrågavarande temperaturerna, varigenom man (genom subtraktion) omedelbart finner de sökta värdena på $m_0 + \delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}}$ och $m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1}$. Vid bestämningen av luftskiktets absoluta tjocklek är nämligen — på grund av att man då räknar med endast ett värdepar δ och δ_0 — verkan av de av mikrometeravläsningarna härrörande felen mindre än i det nyss betraktade fallet, ehuruväl å andra sidan tabellens noggrannhet då är i vida högre grad beroende av värdet på μ. I tveksamma fall äro de båda förfaringssätten emellertid ägnade att kontrollera varandra [1]).

b) Observationer, utförda enligt försöksanordning II.

35. Med utelämnande av de enskilda avläsningarna, vilka verkställdes i enlighet med de i kapitel IV givna schemata, anföras här resultaten av de observationer, som gjordes vid undersökningen av kvartsringens absoluta utvidgning i axelns riktning med tillhjälp av försöksanordningen II.

Försöksserie I.

t	h mm	δ		δ_0		δ		Medeltal δ	Medeltal δ_0
10,2° [2])	757,5	− 0,046	− 0,021	+ 0,373	+ 0,382	− 0,019	− 0,036	− 0,031	+ 0,378
158,2°	746,5	+ 0.401	+ 0,388	+ 0,240	+ 0,234	+ 0,367	+ 0,375	+ 0,383	+ 0,237
266,6°	751,3	− 0,085	− 0,072	+ 0,255	+ 0,264	− 0,045	− 0,060	− 0,066	+ 0,260
350,2°	742,6	− 0,418	− 0,414	+ 0,243	+ 0,251	− 0,413	− 0,423	− 0,417	+ 0,247
267,1°	742,2	− 0,446	− 0,430	− 0,068	− 0,067	− 0,414	− 0.431	− 0,430	− 0,068
116,5°	559,5	− 0,147	− 0,156	+ 0,079	+ 0,068	− 0,115	− 0,105	− 0,131	+ 0,074
8,9° [3])	752,5	− 0,453	− 0,432	+ 0,089	+ 0,070	− 0,419	− 0,434	− 0,435	+ 0,080

[1]) I ett ovan (p. 43) förekommet fall — bestämning av det absoluta värdet på d vid 11,8° — gällde det att avgöra, huruvida M_0 var = 36987 eller 36988, då $r = \delta - \delta_0 \cdot \mu$ låg ungefär mitt emellan tvenne i den förut uppställda tabellen för $M + r$ förekommande värden. Bestämmer man på ovan angivet sätt värdet på ϱ resp. f_0 och f för intervallen mellan $t_1 = 11{,}8°$ och $t_2 = 13{,}0°$ (= utgångstemperaturen), finner man med kännedom om det för t_2 gällande värdet på d (se sid. 42), att det sökta värdet på M_0 är = 36988.

[2]) Jmf. sid. 34.

[3]) „ „ 38.

För temperaturintervallen $t_1 = 10{,}2°$ till $t_2 = 158{,}2°$ erhåller man sålunda:

$$\varrho = (\delta_{t_2} - \delta_{t_1}) - (\delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}})\,\mu = +0{,}547 \quad \text{(i tabellen på sid. 51 } \varrho = 0{,}55\ ^3)\text{)}.$$

$$m_0 = 43;\ m = 40;\ k_0' = +3{,}706;$$

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= m_0 + \delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}} = 42{,}859 \\ f/\mu &= (m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1})/\mu = 42{,}856 \end{aligned}\right\} = 42{,}858;$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \left(\frac{f_0 + f/\mu}{2} + k_0'\right) \cdot \frac{\lambda_0}{2} = 46{,}56 \cdot \frac{\lambda_0}{2}.$$

Följande tabell utgör en sammanställning av de för de skilda temperaturintervallerna på detta sätt beräknade värdena.

Temperaturintervall	ϱ	m_0	m	f_0	f/μ	$\frac{f_0 + f/\mu}{2}$	k_0'	$\Delta L : \frac{\lambda_0}{2}$
10.2° till 158,2°	+0,547	43	40	42,859	42,856	42,858	3,706	46,56
„ „ 266,6°	+0,076	86	81	85,882	85,859	85,872	5,031	90,90
„ „ 350,2°	−0,062	127	120	126,869	126,840	126,855	5,837	132,69
350,2° „ 8,9°	−0,142	125	118	125,167	125,148	125,158	5,815	130,97
267,1° „ „	+0,016	87	82	86,852	86,959	86,906	5,091	92,00
116,5° „ „	+0,310	30	28	29,994	30,014	30,004	2,828	32,83

Då vi, vare sig det gäller uppvärmning eller avsvalning, beteckna den lägsta temperaturen med t_1 och de i ordning följande högre temperaturerna med resp. t_2, t_3 och t_4, erhålla vi härav och med användning av de på sid. 35 och 38 anförda värdena på L_1 $(= M_0 + \delta_0)$ följande slutliga värden på de i formlerna ingående kvantiteterna:

	t_1	t_2	t_3	t_4	$L_1 : \frac{\lambda_0}{2}$	$(L_2 - L_1) : \frac{\lambda_0}{2}$	$(L_3 - L_1) : \frac{\lambda_0}{2}$	$(L_4 - L_1) : \frac{\lambda_0}{2}$	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$	$c \cdot 10^6$	$L_0 : \frac{\lambda_0}{2}$
1:o Uppvärm.	10,2°	158,2°	266,6°	350,2°	36989,38	46,56	90,90	132,69	7.216	0,006335	$+ 0{,}_5 8330$	36986,60
2:o Avsvaln.	8,9°	116,2°	267,1°	350,2°	36991,08	32,83	92,00	130,97	7,056	0,009780	$- 0{,}_6 115$	36988,65

[1]) Av de vid vissa försöksserier gjorda direkta observationerna av strimförskjutningen kan man sluta till att talet m_0 här måste vara något över 40.

Försöksserie II[1]).

t	h mm	δ		δ_0		δ		Medeltal δ	Medeltal δ
12,0° [2])	737,5	−0,482	−0,501	−0,162	−0,173	−0,468	−0,475	−0,482	−0,168
91,5°	737,5	−0,070	−0,085	+0,486	+0,484	−0,093	−0,084	−0,083	+0,483
243,7°	744,2	+0,235	+0,257	+0,009	+0,020	+0,242	+0,251	+0,246	+0,015
320,8°	754,6	+0,054	+0,046	−0,165	−0,171	+0,033	+0,038	+0,043	−0,168
13,0° [3])	759,3	−0,385	−0,377	+0,001	+0,012	−0,378	−0,336	−0,377	+0,007

Temperaturintervall	ϱ	m_0	m	f_0	f/μ	$\frac{f_0+f/\mu}{2}$	k_0'	ΔL
12,0° till 91,5°	−0,215	21	20	21,651	21,632	21,637	2,222	23,86
„ „ 243,7°	+0,555	78	73	78,183	78,185	78,184	4,512	82,70
„ „ 320,8°	+0,525	114	107	114,000	114,024	114,012	5,183	119,20
320,8° „ 13,0°	+0,585	113	106	112 825	112,849	112,837	5,449	118,29

t_1	t_2	t_3	t_4	$L_1 : \frac{\lambda_0}{2}$	$(L_2-L_1) : \frac{\lambda_0}{2}$	$(L_3-L_1) : \frac{\lambda_0}{2}$	$(L_4-L_1) : \frac{\lambda_0}{2}$	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$	$c : 10^6$	$L_0 : \frac{\lambda_0}{2}$
12,0°	91,5	243,7°	320,8°	36987,83	23,86	82,70	119,20	7,083	0,009926	$+0_{,6}473$	36984,63

Försöksserie III.

t	h mm	δ		δ_0		δ		Medeltal δ	Medeltal δ_0
11,8° [4])	756,5	+0,277	+0,285	−0,440	−0,432	+0,280	+0,288	+0,283	−0,436
195,5°	740,1	−0,179	−0,177	+0,414	−0,413	−0,160	−0,144	−0,165	+0,414
266,5° [5])	755,2	+0,271	+0,268	−0,481	−0,485	+0,294	+0,294	+0,282	−0,483
334,7°	755,0	−0,448	−0,470	+0,443	+0,425	−0,488	−0,515	−0,480	+0,434
250,7°	754,7	−0,343	−0,339	−0,481	−0,492	−0,326	−0,330	−0,334	−0,487

[1]) Vid denna försöksserie gjordes även särskilda avläsningar under avsvalningsprocessen. Emedan de av dessa observationer härledda värdena på a, b och c på grund av den termiska efterverkans förekomst, varav tidigare varit fråga, i icke oväsentlig grad visat sig beroende av om temperaturen 13,0° eller den senare inträdda temperaturen 11,8° (se följ. försöksserie) betraktas såsom sluttemperatur, ha de under avsvalningen gjorda avläsningarna, med undantag av de vid 13,0°, här lämnats obeaktade. Oaktat även vid försöksserien I, såsom tidigare påvisats, en termisk efterverkan gjorde sig gällande, har jag dock för att vid beräkningen av dilationskonstanternas medelvärden icke helt och hållet försumma avsvalningsförsöken ansett skäl föreligga att medtaga de till den sistnämnda serien hörande observationerna av denna art

[2]) Jmf. sid. 40. — [3]) Jmf. sid. 41. — [4]) Jmf. sid. 42. — [5]) Jmf. sid. 45.

Temperaturintervall	ϱ	m_0	m	f_0	f/μ	$\frac{f_0+f/\mu}{2}$	k_0'	ΔL
11,8° till 195,5°	−1,250	57	55	57,750	57,849	57,795	4,231	62,03
„ „ 250,7°	−0,569	80	76	79,949	79,940	79,945	4,776	84,72
„ „ 266,5°	+0,043	87	82	86,953	86,955	86,954	4,938	91,89
„ „ 334,7°	−1,583	116	111	116,870	116,900	116,885	5,562	122,45

t_1	t_2	t_3	t_4	$L_1:\frac{\lambda_0}{2}$	$(L_2-L_1):\frac{\lambda_0}{2}$	$(L_3-L_1):\frac{\lambda_0}{2}$	$(L_4-L_1):\frac{\lambda_0}{2}$	$a\cdot10^6$	$b\cdot10^6$	$c\cdot10^6$	$L_0:\frac{\lambda_0}{2}$
11,8°	195,5°	266,5°	334,7°	36987,56	62,03	91,89	122,45	6,691	0,013866	$-0,_410692$	36984,57

Försöksserie IV[1]).

t	h mm	δ		δ_0		δ		Medeltal δ	Medeltal δ
12,6°	743,7	+0,324	+0,310	−0,458	−0,465	+0,315	+0,323	+0,318	−0,462
164,2°	743,7	−0,305	−0,312	+0,465	+0,460	−0,280	−0,274	−0,298	+0,463
344,3°	745,3	+0,145	+0,148	+0,309	+0,318	+0,153	+0,146	+0,148	+0,314
434,0°	744,5	+0,411	+0,425	+0,423	+0,421	+0,432	+0,445	+0,428	+0,422

Temperaturintervall	ϱ	m_0	m	f_0	f/μ	$\frac{f_0+f/\mu}{2}$	k_0'	ΔL
12,6° till 164,2°	−1,488	44	43	44,925	44,946	44,936	3,551	48,49
„ „ 344,3°	−0,902	121	115	121,776	121,770	121,773	5,495	126,27
„ „ 434,0°	+0,276	171	161	171,884	170,848	171,366	6,104	177,47

t_1	t_2	t_3	t_4	$L_1:\frac{\lambda_0}{2}$	$(L_2-L_1):\frac{\lambda_0}{2}$	$(L_3-L_1):\frac{\lambda_0}{2}$	$(L_4-L_1):\frac{\lambda_0}{2}$	$a\cdot10^6$	$b\cdot10^6$	$c\cdot10^6$	$L_0:\frac{\lambda_0}{2}$
12,6°	164,2°	344,3°	434,0°	36986,46	48,49	126,27	177,47	7,750	0,003206	$+0,_411370$	36982,83

[1]) Antalet förskjutna interferensstrimmor, som även vid de föregående försöksserierna bestämts genom direkt observation under vissa temperaturintervaller, räknades här fullständigt under hela försöksserien, som tog i anspråk en tid av c:a 20 timmar (de tidigare hade utförts under betydligt längre tider).

36. Följande tabell innehåller en sammanställning av de av de skilda försöksserierna erhållna värdena på a, b och c jämte de härav beräknade medelvärdena.

Försöksserie	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$	$c \cdot 10^6$	$L_0 : \frac{\lambda_0}{2}$	
I, 1:o	7,216	0,006335	+ 0,000008330	36986,60	36987,63
I, 2:o	7,056	0,009780	− 0,000000115	36988,65	
II	7,083	0,009926	+ 0,000000473	36984,63	36984,01
III	6,691	0,013866	− 0,000010692	36984,57	
IV	7,750	0,003206	+ 0,000011370	36982,83	
Medeltal	7,1592	0,0086226	+ 0,000001873		

Såsom härav framgår, avvika de enskilda värdena på c mycket starkt från varandra, i det att de förete olikheter även i avseende å förtecknet. En betydligt bättre överensstämmelse visa däremot värdena på b och isynnerhet de på a, ehuru avvikelserna från medelvärdena även här äro ganska stora [1]). Man finner emellertid, att ett mindre värde på b i de flesta fall motsvaras av större värden på a och c, vilket innebär, att de ifrågavarande avvikelserna till en viss grad kompensera varandra.

För att närmare undersöka detta härleda vi med tillhjälp av formeln

$$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dt} = a + 2bt + 3ct^2$$

de värden på den sanna utvidgningskoefficienten α för ett visst antal olika temperaturer, som motsvara de skilda försöksserierna ävensom de av dessa härledda medelvärdena på a, b och c. Vi erhålla då:

$\alpha \cdot 10^6$

Försöksserie	20°	50°	100°	200°	300°	400°
I, 1:o	7,479	7,912	8,733	10,750	13,266	—
I, 2:o	7,447	8,033	9,009	10,954	12,893	—
II	7,481	8,080	9,082	11,110	13,166	—
III	7,245	7,998	9,143	10,954	12,124	—
IV	7,879	8,156	8,732	10,397	12,743	15,772
Medeltal	7,5062	8,0358	8,9398	10,8330	12,8384	
Sannolikt fel	± 0,0686 (= 0,91 %)	± 0,0271 (= 0,34 %)	± 0,0582 (= 0,65 %)	± 0,0821 (= 0,76 %)	± 0,1344 (= 1,05 %)	
Värden, erh. av medelv. a, b och c	7,5063	8,0355	8,9399	10,8330	12,8384	14,956

[1]) De största avvikelserna visa, såsom man även kunnat vänta sig, de av försöksserien IV härledda värdena, vilka delvis grunda sig på observationer, gjorda vid en högre temperatur, än de vid de andra

Det framgår härav, att de procentuella felen hos medelvärdena på α för samtliga i betraktande tagna temperaturer (20°—300°) äro mindre och i vissa fall t. o. m. mycket mindre än felet hos det ovan erhållna medelvärdet på a, vilket sistnämnda fel (sannolika felet) utgör vidpass 1,6 %. Man finner vidare, att de med tillhjälp av medelvärdena på a, b och c beräknade värdena på α för alla temperaturer mellan 20° och 300° så gott som fullständigt överensstämma med medeltalen för de av de enskilda observationsserierna erhållna värdena. De ifrågavarande medelvärdena för a, b och c tillåta sålunda att beräkna utvidgningskoefficienten α för en given temperatur (inom nämnda gränser) med den grad av noggrannhet, som de i tabellen angivna procenttalen utvisa.

37. För utvidgningen vid temperaturer av omkring 400° och däröver föreligger tyvärr endast en observation (försöksserien IV), vilken dock, såsom i noten på sid. 55 framhållits, kontrollerats genom direkt observation av de förskjutna interferensstrimmornas antal. Det av försöksserien IV för $t = 400°$ erhållna värdet på α är något större än det med användning av medelvärdena på a, b och c härledda motsvarande värdet, ehuruväl avvikelsen, såsom av en jämförelse med de av de skilda försöksserierna för $t = 300°$ erhållna värdena framgår, faller inom gränserna för försöksfelen. Då emellertid de värden på α, som försöksserien IV givit för $t = 100°$, 200° och 300°, visa en avvikelse i motsatt riktning, synes det sannolikt, att de nyssnämnda konstanterna (medelvärdena på a, b och c) icke med tillräcklig noggrannhet gälla för så höga temperaturer som 400°. Att de av försöksserien IV härledda värdena på dessa konstanter, såsom av tabellen på sid. 56 framgår, i väsentlig grad avvika från de av de övriga försöksserierna erhållna motsvarande värdena tyder även på att dilatationen vid de högsta uppnådda temperaturerna följer en något annan lag än vid de temperaturer, som förekommo vid de övriga försöksserierna. Med användning av medelvärdena på a, b och c och det för 0° resp. utgångstemperaturen vid försöksserien IV, $t_1 = 12{,}6°$, funna värdena $L_0 = 36982{,}83 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$ och $L_1 = 36986{,}46 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$ har jag beräknat utvidgningen för en temperaturstegring från 12,6° till 434,0° (den högsta uppnådda temperaturen) och funnit denna $= 177{,}01 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$. Emedan detta värde t. o. m. närmare överensstämmer med det observerade värdet $\Delta L = 177{,}47 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$ än de för särskilda andra temperaturintervaller på likartat sätt beräknade värdena på ΔL överensstämma med de observerade värdena, är det tydligt, att differensen mellan de båda för $t = 400°$ erhållna värdena på α till en del beror på försöksfel, d. v. s. här närmast på en icke fullt exakt bestämning av alla de vid försöksserien IV använda temperaturerna. Den tidigare nämnda andra orsaken till denna avvikelse, d. v. s. den omständigheten, att dilatationsförloppet vid de högsta temperaturerna icke blivit tillräckligt beaktat vid beräkningen av medelvärdena på a, b och c, kan emellertid i viss grad kompenseras därigenom, att man vid

serierna förekomna. Dessa avvikelser äro dock icke så mycket större än de övriga, att ett medtagande av de ifrågavarande värdena vid medeltalsberäkningen utan vidare vore oberättigat. Vad för övrigt differenserna mellan de skilda försöksserierna beträffar, synas dessa till stor del bero på de fel, som vidlåda temperaturbestämningarna, i det att, såsom man lätt kan konstatera, en förändring av någon av de till grund för beräkningen lagda temperaturerna om någon enda grad eller t. o. m. någon bråkdel av en dylik medför en ganska väsentlig förändring av dilatationskonstanternas värden.

beräkningen av dessa medelvärden tillägger försöksserien IV en dubbel „vikt“. Man erhåller då:

$$a = 7{,}258 \times 10^{-6}\ ;\quad b = 0{,}0077198 \times 10^{-6}\ ;\quad c = 0{,}000003456 \times 10^{-6}\ .$$

För de tidigare betraktade temperaturerna giva dessa konstanter följande värden på α:

$$\alpha_{20^\circ} = 7{,}571 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{100^\circ} = 8{,}906 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{300^\circ} = 12{,}823 \cdot 10^{-6}\ ;$$

$$\alpha_{50^\circ} = 8{,}056 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{200^\circ} = 10{,}761 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{400^\circ} = 15{,}093 \cdot 10^{-6}\ .$$

Den härigenom ernådda ökningen av värdet på α_{400° är, som man finner, ganska liten. För utvidgningen från 12,6° till 434° får man nu värdet $177{,}13 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$, som visserligen något, men icke heller mycket, bättre överensstämmer med det observerade värdet än det tidigare erhållna.

Då det är tvivelaktigt, vilken vikt rätteligen bör tilldelas försöksserien IV och en ökning av dess vikt medför en omotiverad förändring av utvidgningskoefficienterna för de lägre temperaturerna, synes det riktigare att till grund för den slutliga beräkningen av dilatationskonstanterna lägga det vid den högsta temperaturen ($t = 434^\circ$) observerade värdet på L samt de för ett tillräckligt antal symmetriskt fördelade temperaturpunkter medelst de ursprungliga medelvärdena på a, b och c beräknade värdena på samma kvantitet. Sättes $L_0 = 1$, erhålles sålunda:

t	0°	145°	290°	434°
L	1	1,001225084	1,002847009	1,004896827

De på sid. 49 anförda ekvationerna giva då:

$$a = 7{,}1883 \times 10^{-6}\ ;\quad b = 0{,}0083214 \times 10^{-6}\ ;\quad c = 0{,}0000025653 \times 10^{-6}\ .$$

Utvidgningskoefficienten α för de tidigare betraktade temperaturerna erhåller härigenom följande värden:

$$\alpha_{20^\circ} = 7{,}524 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{100^\circ} = 8{,}930 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{300^\circ} = 12{,}874 \cdot 10^{-6}\ ;$$

$$\alpha_{50^\circ} = 8{,}040 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{200^\circ} = 10{,}825 \cdot 10^{-6}\ ;\quad \alpha_{400^\circ} = 15{,}077 \cdot 10^{-6}\ .$$

Som man ser, överensstämma dessa värden relativt väl med de på annat sätt nyss funna.

För temperaturer upp till något över 300° måste dock de ursprungliga medelvärdena på dilatationskonstanterna tillmätas en något större noggrannhet än de för hela den undersökta temperaturintervallen funna. För ett möjligast noggrant angivande av dilatationens för-

lopp inom hela denna intervall synas tre konstanter (en kubisk interpolationsformel) icke fullt tillräckliga. Jag har därför ännu sökt framställa försöksresultaten genom en interpolationsformel av fjärde graden:

$$L = L_0 (1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4).$$

Till grund för beräkningen av de fyra här ingående konstanterna har jag lagt följande på nyss antytt sätt erhållna sammanhörande värden:

t	0°	100°	200°	300°	434°
L	1	1,000804019	1,001791728	1,002974365	1,004896827

Emedan L_0 här är bekant, äro fyra ekvationer tillräckliga, vilkas lösning kan givas en med lösningen till de på sid. 49 anförda ekvationerna analog form. Jag har sålunda erhållit:

$$a = 7{,}1435 \times 10^{-6}; \quad b = 0{,}0089252 \times 10^{-6};$$

$$c = 0{,}00000014590 \times 10^{-6}; \quad d = 0{,}0000000027512 \cdot 10^{-6}.$$

Med användning av dessa konstanter erhåller man:

$$\alpha_{20^\circ} = 7{,}502 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{100^\circ} = 8{,}944 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{300^\circ} = 12{,}835 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_{50^\circ} = 8{,}039 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{200^\circ} = 10{,}819 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{400^\circ} = 15{,}058 \cdot 10^{-6}.$$

Ända upp till $t = 300^\circ$ utgöra dessa värdens avvikelser från de medelst de ursprungliga medelvärdena på a, b och c beräknade värdena på α endast c:a 0,1 % [1]), varjämte α_{00° ganska nära överensstämmer med de på annat sätt nyss erhållna värdena på denna kvantitet.

Resultaten av ovanstående försök angående kvartsens dilatation i optiska axelns riktning kunna vi sålunda sammanfatta i de för temperaturintervallen $+9^\circ$ till $+434^\circ$ gällande formlerna

I) $L = L_0 (1 + 7{,}1435 \cdot 10^{-6} t + 0{,}0089252 \cdot 10^{-6} t^2 + 0{,}00000014590 \cdot 10^{-6} t^3 + 0{,}0000000027512 \cdot 10^{-6} t^4)$

och

I, *a*) $$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dt} = (7{,}1435 + 0{,}01785\, t + 0{,}0000004377\, t^2 + 0{,}000000011005\, t^3) \times 10^{-6}.$$

---

[1]) Även i den omedelbara närheten av den undre temperaturgränsen (t = c:a 9°) äro avvikelserna lika små, i det att de ursprungliga medelvärdena a, b och c giva $\alpha_{10^\circ} = 7{,}332 \cdot 10^{-6}$, medan de senast härledda fyra konstanterna för samma kvantitet giva värdet $7{,}322 \cdot 10^{-6}$.

Det sannolika felet hos de enligt formeln I, a beräknade värdena på utvidgningskoefficienten α torde, enligt vad av det tidigare sagda framgår, kunna uppskattas till i genomsnitt icke fullt 1 % [1]).

38. Gör man bruk av endast de observationer, som gjordes vid de i de skilda försöksserierna med t_1, t_2 och t_3 betecknade tre lägsta temperaturerna, kan man av dessa observationer härleda en *kvadratisk* interpolationsformel för sambandet mellan L och t. De två i densamma ingående dilatationskonstanterna (a och b) bestämmas genom de tre ekvationerna $L_1 = L_0 (1 + at_1 + bt_1^2)$, $L_2 = L_0 (1 + at_2^2 + bt_2^3)$, $L_3 = L_0 (1 + at_3 + bt_3^2)$, vilkas lösning kan framställas under följande form:

$$a = \frac{1}{L_0} \left\{ \frac{(L_2 - L_1)(t_1 + t_3)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} - \frac{(L_3 - L_1)(t_1 + t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \right\} = \frac{A}{L_0};$$

$$b = \frac{1}{L_0} \left\{ \frac{L_3 - L_1}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} - \frac{L_2 - L_1}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)} \right\} = \frac{B}{L_0};$$

$$L_0 = L_1 - At_1 - Bt_1^2.$$

Emedan t_3 i försöksserien IV har ett väsentligt större värde (= 344,3°) än i de övriga serierna, där det största värdet på t_3 utgör 267,1°, har det synts mig ändamålsenligast, att genom interpolation med tillhjälp av de genom den förstnämnda försöksserien erhållna konstanterna a, b och c (sid. 55) bestämma det värde på L, som enligt denna försöksserie motsvarar en med den sistnämnda temperaturen närmelsevis överensstämmande temperatur, vilken därvid betecknas med t_3. För $t_3 = 270°$ erhåller man sålunda $L_3 = 37077{,}14 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$, på grund varav man i den ifrågavarande försöksserien har $L_3 - L_1 = 90{,}68 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$. De av de olika försöksserierna enligt nyss anförda formler beräknade värdena på a, b och L_0 äro sammanställda i följande tabell.

Försöksserie	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$	$L_0 : \frac{\lambda_0}{2}$	
I, 1:o	6,828	0,009959	36986,77	36987,70
I, 2:o	7,094	0,009181	36988,62	
II	7,070	0,010091	36984,64	36983,68
III	7,306	0,008800	36983,33	
IV	7,197	0,008211	36983,06	
Medeltal	7,0990	0,0092484		

[1]) Den huvudsakliga felkällan utgöres, såsom tidigare anmärkts, av onoggrannheten hos temperaturbestämningarna (jmf. ovan, p. 24). Det av de mikrometriska avläsningarna (bestämningen av kvantiteterna δ resp. f) härrörande felet hos α belöper sig icke — såsom jag genom särskilda beräkningar övertygat mig om — till mera än högst några få tiondedels procent.

De enskilda värdenas på a och b avvikelser från medelvärdena äro här icke oväsentligt mindre än de vid bestämningen av tre dilatationskonstanter (a, b och c) tidigare funna motsvarande avvikelserna (jmf. sid. 56). Värdena på L_0 överensstämma ganska nära (i tvenne fall nästan fullständigt) med de motsvarande tidigare funna värdena.

Med användning av de nyss erhållna värdena på a och b erhåller man de i följande tabell anförda värdena på α ($= a + 2bt$).

$\alpha \cdot 10^{6}$

Försöksserie	20°	50°	100°	200°	250°	270°	(300°)
I, 1:o	7,226	7,824	8,820	10,812	11,808	12,206	
I, 2:o	7,461	8,012	8,930	10,766	11,685	12,052	
II	7,474	8,079	9,088	11,106	12,116	12,519	
III	7,658	8,186	9,066	10,826	11,706	12,058	
IV	7,526	8,018	8,839	10,481	11,303	11,631	
Medeltal	7,469	8,024	8,949	10,798	11,724	12,093	
Sannolikt fel	±0,037	±0,039	±0,037	±0,066	±0,087	±0,098	
Värden, erh. av medelv. på a och b	7,469	8,024	8,949	10,798	11,723	12,093	(12,648)

De ursprungliga medelvärdena på a, b och c (sid. 56) giva $\alpha_{250°} = 11{,}822 \cdot 10^{-6}$ och $\alpha_{270°} = 12{,}225$. Jämför man de i ovanstående tabell angivna medelvärdena på α med dessa värden ävensom med de andra tidigare funna sannolikaste värdena på α för de i betraktande tagna olika temperaturerna, finner man, att överensstämmelsen inom hela temperaturintervallen + 10° till + 270° är ganska god, i det att avvikelserna, vilka samtliga falla inom försöksfelens gränser, utgöra i genomsnitt endast c:a 0,5 %. För $t > 200°$ äro dock de medelst den linearа formeln $\alpha = a + 2bt$ beräknade värdena på α genomgående något litet mindre än de medelst en kvadratisk formel tidigare erhållna, varvid denna differens ökas med t. Den kurva, som kan tänkas framställa α såsom funktion av t, har sålunda ända till temperaturer av c:a 200° ett i det allra närmaste lineärt förlopp, och böjer sig sedan för växande värden på t småningom uppåt. Avvikelsen från det lineära förloppet är dock så ringa, att man utan att begå något stort fel ännu vid den övre gränsen för den betraktade temperaturintervallen (+ 270°) kan bortse från densamma. Det genom extrapolation erhållna värdet $\alpha_{300°} = 12{,}648 \cdot 10^{-6}$; vilket är endast 1,5 % för litet, visar att den ifrågavarande linerära formelns giltighet approximativt kan utsträckas ända till temperaturer av c:a 300°. Från rumtemperatur ända till c:a 300° gälla sålunda (med en viss approximation för de högsta temperaturerna) formlerna

II) $$L = L_0 (1 + 7{,}099 \cdot 10^{-6} t + 0{,}0092484 \cdot 10^{-6} t^2),$$

II, a) $$\alpha = (7{,}099 + 0{,}0184968\, t) \cdot 10^{-6}.$$

De av de enskilda i tabellen anförda värdenas avvikelser från medelvärdena härrörande felen hos dessa sistnämnda äro med undantag av det hos α_{50° något mindre än de motsvarande felen i tabellen på sid. 56, och gäller detta speciellt för α_{20°. Åtminstone i närheten av den ifrågavarande temperaturintervallens undre gräns (vid rumtemperaturer) synes sålunda formeln II, *a*) giva noggrannare värden på α än formeln I, *a* [1]).

I stället för att, såsom här skett, härleda formeln II (resp. II, *a*) direkt ur de vid temperaturerna t_1, t_2 och t_3 gjorda observationerna, kunde man även uppställa en dylik formel med tillhjälp av de av samtliga observationer härledda konstanterna *a*, *b* och *c*. Genom att sätta $t_1 = 0^\circ$ och $L_1 = L_0 = 1$ samt $t_2 = 150^\circ$ och $t_3 = 300^\circ$ har jag på denna väg erhållit $L_2 = 1{,}001274210$ och $L_3 = 1{,}002974365$ och på grund därav:

$$a = 7{,}075 \cdot 10^{-6} \text{ och } b = 0{,}0094656 \cdot 10^{-6}.$$

Dessa för temperaturintervallen $+9^\circ$ till $+300^\circ$ sålunda funna konstanter tillåta, såsom jag genom prövning konstaterat, att beräkna α med en ganska stor noggrannhet, i det att avvikelserna från de motsvarande tidigare funna sannolikaste värdena utgöra i genomsnitt icke fullt $^1/_2\,^0/_0$. Konstanterna själva skilja sig för övrigt icke heller mycket från de i formeln II ingående talen (på grund av differenserna mellan de till grund för beräkningarna lagda övre temperaturgränserna kan någon fullständig överensstämmelse här icke väntas).

39. *Grafisk framställning.* Följande tabell utgör en sammanställning av de av de skilda försöksserierna (I, II, III och IV) erhållna värdena på t och $L : \frac{\lambda_0}{2}$. Emedan — beroende på en skild uppställning av interferensapparaten (jmf. pg 40) — värdena på L_0 i den första försöksserien äro något större än de i de senare serierna, har jag för att vid den grafiska framställningen kunna medtaga alla observationer reducerat de av serien I (1:o och 2:o) erhållna värdena på L till det medelvärde för L_0 $\left(= 36984{,}01 \cdot \frac{\lambda_0}{2}\right)$, som framgått av de senare försöksserierna.

	t	$L : \frac{\lambda_0}{2}$			t	$L : \frac{\lambda_0}{2}$		t	$L : \frac{\lambda_0}{2}$
		Observ. värde.	Reducerat värde.						
					12,0°	36987,83		11,8°	36986,56
I, 1:o	10,2°	36989,38	36985 76	II	91,5°	37011,69	III	195,5°	37048,59
	158,2°	37035,94	37032,32		243,7°	37070,53		250,7°	37071,28
	266,6°	37080,28	37076,65		320,8°	37107,03		266.5°	37078,45
	350,2°	37122,07	37118,44					334,7°	37109,01
	350,2°	37122,05	37118,42					12,6°	36986,46
I, 2:o	267,1°	37083,08	37079,45				IV	164,2°	37034,95
	116,5°	37023,91	37020,29					344,3°	37112,73
	8,9°	36991,08	36987,46					434,0°	37163,93

[1]) Formeln II, *a*) kan tydligen med ganska stor noggrannhet ersättas med den genom avrundning av värdena på *a* och *b* erhållna enklare formeln

$$\alpha = (7{,}1 + 0{,}0185\, t) \cdot 10^{-6}.$$

Genom avsättande av värdena på t såsom abscissor och de motsvarande värdena på $L : \frac{\lambda_0}{2}$ såsom ordinator ha i fig. 10 erhållits de i omgivningen av kurvan I fallande punkterna. De till uppvärmningsserierna hörande punkterna ha härvid betecknats med märket ○ och de

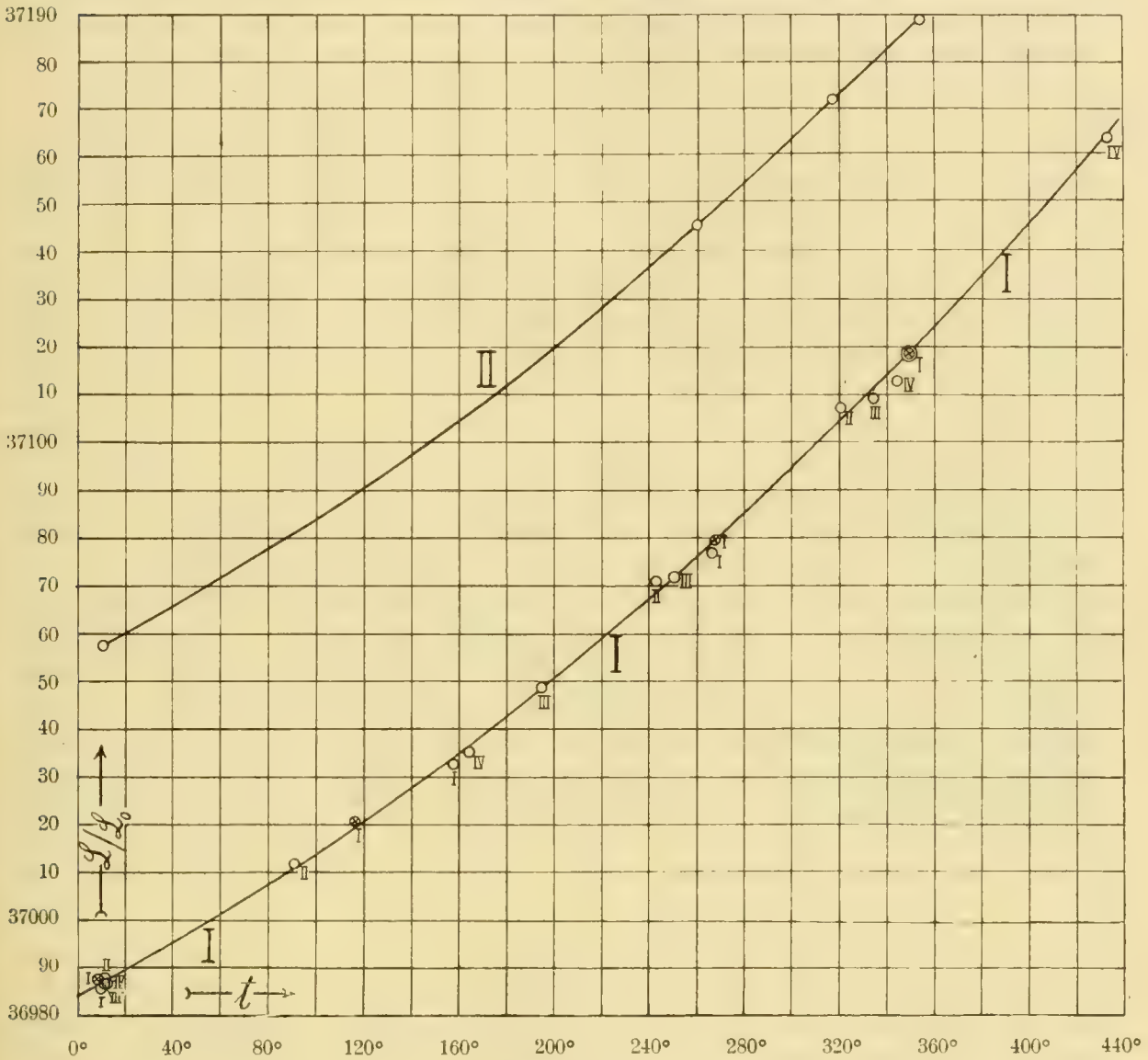


Fig. 10.

till avsvalningsserien (I, 2:o) hörande med ⊗, varjämte en vidhängd romersk siffra angiver försöksseriens ordningsnummer. Kurvan I framställer det genom formeln I uttryckta sambandet mellan L och t för medelvärdet $L_0 = 36984{,}01 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$. Man finner, att samtliga genom observation bestämda punkter ganska nära ansluta sig till kurvan, oaktat denna till sin betydelse

icke fullständigt motsvarar de nämnda punkterna. Den fullständiga motsvarigheten skulle erfordrat, att alla värden på L hade reducerats till ett och samma värde på L_0, vilket dock skulle medfört olägenheten, att vändpunkten mellan observationsserierna I, 1:o och I, 2:o ($t = 350{,}2°$), skulle i motsats till det verkliga förhållandet motsvarats av två olika värden på L, ävensom att de i kapitel IV diskuterade termiska efterverkningarna då icke alls skulle kommit till synes. De skilda observationsserierna motsvaras egentligen av var sin kurva, vilka dock icke kunnat uppritas i fig. 10 så, att de skulle framträtt skilt för sig.

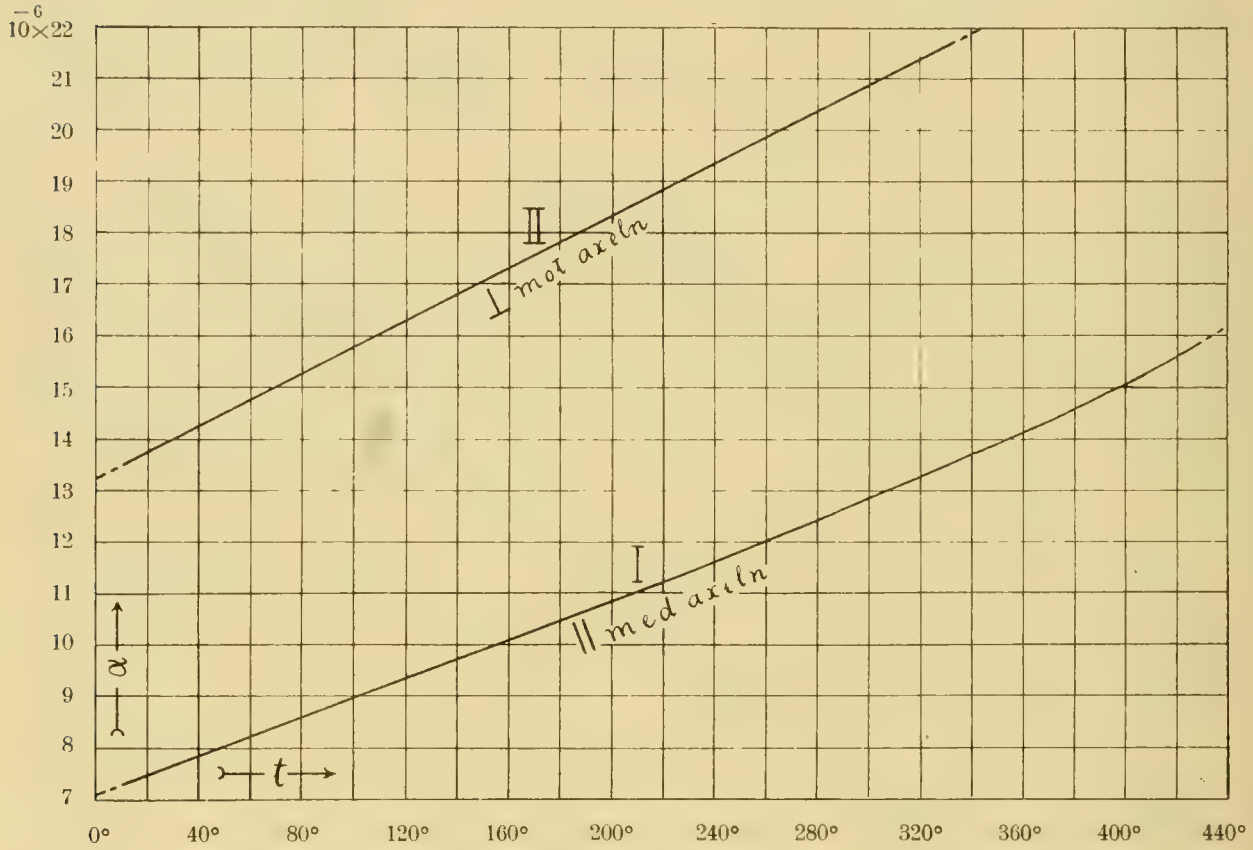


Fig. 11.

Kurvan I i fig. 11 framställer grafiskt i enlighet med formeln I, α utvidgningskoefficienten α såsom funktion av temperaturen t. I överensstämmelse med vad tidigare (p. 61) framhållits, har denna kurva ända upp till temperaturer av c:a 300° ett i det närmaste rätlinigt förlopp, varefter den vid ytterligare växande temperatur småningom böjer sig uppåt.

c. Observationer, utförda med tillhjälp av försöksanordning I.

40. De enda användbara observationer rörande kvartsringens utvidgning, som gjordes medelst försöksanordningen I, äro jämte de därav beräknade värdena på ΔL sammanställda i de båda här följande tabellerna.

t	h mm	δ		δ_0		$\delta_{(gul)}$		Medeltal δ	Medeltal δ
11,7°	750,5	+0,343	+0,342	−0,337	−0,324	+0,333	+0,330	−0,332	+0,337
261,3°	745,6	−0,345	−0,344	+0,355	+0,342	+0,347	—	+0,349	−0,345
318,0°	745,6	−0,454	−0,452	−0,149	−0,150	−0,452	—	−0,150	−0,453
355,1°	745,6	+0,293	+0,267	+0,638	+0,659	+0,279	—	+0,649	+0,280

Temperaturintervall	ϱ	m_0	m	f_0	f/μ	$\frac{f_0 + f/\mu}{2}$	k_0'	ΔL
11,7° till 261,3°	+1,325	84	78	83,318	83,284	83,301	4,886	88,19
„ „ 318,0°	+0,928	110	103	109,210	109,218	109,214	5,419	114,63
„ „ 355,1°	+1,035	126	118	125,943	125,941	125,942	5,718	131,66

Dessa observationer jämte det på sid. 47 för $t = 11{,}7°$ funna värdet $L = 37057{,}34 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$ giva kurvan II i fig. 10. Man finner, att denna kurva för växande värden på t icke stiger fullt lika hastigt som den medelst försöksanordningen II erhållna kurvan i samma figur.

För hela temperaturintervallen 11,7° till 355,1° utgör utvidgningen per längdenhet i medeltal 0,003553, medan de enligt kurvan I (formeln I) för samma intervall är = 0,003584. I anseende till de i försöksserien förekommande temperaturernas ojämnna fördelning (jmf. kurvan II:s fixa punkter) har det synts mig ändamålslöst att av de gjorda observationerna härleda en kubisk formel för sambandet mellan L och t, i det att de värden, som därvid skulle erhållas för de tre temperaturkoefficienterna a, b och c, bleve ganska otillförlitliga. Jag har därför inskränkt mig till att härleda en kvadratisk interpolationsformel för hela temperaturintervallen 11,7° till 355,1°. Med användning av de värden på L, som erhållits för $t_1 = 11{,}7°$, $t_2 = 261{,}3°$ och $t_3 = 355{,}1°$, fås:

III) $$L = L_0 (1 + 7{,}173 \cdot 10^{-6} t + 0{,}008653 \cdot 10^{-6} t^2) \text{ och}$$

III, a) $$\alpha = (7{,}173 + 0{,}017306\, t) \cdot 10^{-6}.$$

Den senare av dessa formler giver:

$$\alpha_{20°} = 7{,}519 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{100°} = 8{,}904 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{300°} = 12{,}365 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_{50°} = 8{,}038 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{200°} = 10{,}634 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{350°} = 13{,}231 \cdot 10^{-6}.$$

Såsom man finner, överensstämma dessa värden nästan över förväntan väl med de med tillhjälp av försöksanordningen II erhållna värdena (jmf. pgg. 56 o. 61), i det att den relativa

minskning av värdena på α, som inträder vid temperaturer av c:a 100° och däröver, icke är större, än att den faller inom gränserna för de möjliga felen hos de tidigare beskrivna försöken.

Vid försöksanordningen I var, såsom tidigare nämnts, de delar av kvartsringen, som berörde bottenskivan och täcklaset, planslipade, på grund varav luftrester förefunnos på ifrågavarande ställen. Till följd av den vid ökad temperatur inträdande förtunningen av luften är det icke otänkbart, att dessa luftrester åstadkommo en, om ock ytterst ringa, skenbar minskning av dilationen, vilket möjligen till någon del kunde förklara den ovannämnda differensen mellan de medelst de båda försöksanordningarna erhållna värdena på utvidgningen per längdenhet inom den betraktade temperaturintervallen. Oberoende härav är det sannolikt, att formelen III, a (i likhet med II, a) för värden på t, som närma sig den övre gränsen för dess giltighetsområde, giver något för små värden på α.

Såsom på sid. 19 omnämnts, anger den vid försössanordningen I använda termometern icke direkt temperaturen i upphettningskärlets innersta del, varest kvartsringen befann sig, utan det omgivande luftbadets temperatur. Ifall en differens överhuvudtaget består mellan dessa temperaturer (vilken i och för sig vore en tillräcklig förklaring av de här diskuterade avvikelserna), kan denna i varje fall icke hava varit av någon väsentlig storlek.

d. Jämförelse med andra observatörers resultat.

41. I följande tabell äro några enligt de ovan erhållna formlerna I, a, II, a och III, a för olika temperaturer beräknade värden på α sammanställda med motsvarande enligt de av andra observatörer uppställda formlerna (se ovan p. 10 – 12) beräknade värden.

t	$a \cdot 10^6$							
						Formel I, a	Formel II, a	Formel III, a
20°	7,400	7,481	7,263	7,470	7,494	7,501	7,469	7,519
50°	8,015	7,962	7,770	7,959	7,980	8,039	8,024	8,038
100°	—	—	8,614	8,774	8,790	8,934	8,949	8,904
200°	—	—	10,303	—	10,410	10,819	10,798	10,634
300°	—	—	—	—	12,233	12,835	(12,648)	12,365
400°	—	—	—	—	15,351	15,058	—	—
Observator	FIZEAU	BENOÎT	REIMERDES	SCHEEL	RANDALL	Författaren		

Jämföra vi först de inom temperaturintervallen 20° till 100° fallande värdena med varandra, finna vi, att de av mig funna värdena ganska väl (i vissa fall så gott som fullständigt) överensstämma med de av andra observatörer — med undantag av REIMERDES — erhållna. Att REIMERDES' värden genomgående äro icke oväsentligt mindre än de av mig funna [1]),

[1]) Tabellerna på sid. 56 och 61 visa, att de av REIMERDES för $\alpha_{50°}$, $\alpha_{100°}$ och $\alpha_{200°}$ erhållna värdena äro mindre än de minsta av mina motsvarande enskilda värden.

oaktadt den av honom undersökta kvartsringen var identisk med den av mig använda, tyder på att de av honom mätta temperaturerna (över rumtemperatur) voro i någon mån för höga. Såsom tididare (se ovan p. 11, not 3) omnämnts, angav den av honom använda termometern icke direkt temperaturen i dilatometerns innersta del, varest kvartsringen befann sig, utan det omgivande vätskebadets. Resultaten av mina medelst en liknande anordning utförda försök (formeln III, *a*) visa dock, såsom även förut anmärkts, att någon väsentlig differens mellan dessa temperaturer icke kan antagas förekomma, förutsatt att verklig temperaturjämvikt inträtt inom upphettningsapparaten. Vad detta sistnämnda villkor beträffar, synes det ganska tvivelaktigt, huruvida detsamma var i tillräcklig grad uppfyllt vid REIMERDES försök, i det att termostaten vid dem hölls vid konstant temperatur (före avläsningarna) endast under c:a två timmar, vilket enligt min erfarenhet icke är tillräckligt. Vid diskussionen av vissa större differenser mellan de observerade och beräknade värdena på utvidgningskoefficienterna framhåller REIMERDES även själv, att temperaturen inom upphettningskroppen kan hava varit olikformigt fördelad (jmfr. *R*:s avhandling, p. 20—21). På någon specifik egenskap hos den ifrågavarande kvartsringen kan diskrepansen mellan REIMERDES och andra observatörers resultat, såsom av mina försök framgått, i varje händelse icke hava berott (möjligheten av en, om ock ringa, specifik olikhet mellan de undersökta kvartsstyckena är därmed självfallet icke utesluten).

Jämförda med RANDALL's observationer — de enda, utom mina, som sträcka sig till temperaturer över $+400°$ — äro mina enligt formeln I, *a*) beräknade värden på α ända upp till 300° och något däröver i någon mån större än den sistnämndes, varemot för $t = 400°$ en, om ock ringa, avikelse i motsatt riktning äger rum. Den övre gränsen för den av RANDALL uppställda formelns giltighet utgör $+470°$ (jmf. ovan p. 12), medan den för formeln I, *a*) utgör $+434°$. Antager man, att den sistnämnda formeln, i likhet med vad fallet visats vara beträffande formeln II, *a*), i närheten av den övre temperaturgränsen giver något litet för små värden, kan man redan härigenom erhålla en möjlig förklaring till den nyssnämnda avvikelsen hos värdena på α för $t > 400°$. Denna avvikelse, liksom även de vid de lägre temperaturerna förekommande, är dock å andra sidan icke större, än att den, såsom av tabellen på sid 56 framgår, faller inom gränserna för de möjliga felen hos mina observationer (enligt serien IV är $\alpha_{400°} = 15{,}772 \cdot 10^{-6}$). Det sätt, på vilket RANDALL härlett sina interpolationsformler har för övrigt icke angivits av honom annorlunda än så, att han i en tabell sammanfattat de för olika medeltemperaturer erhållna värdena på α, varvid utan vidare förklaring säges, att dessa resultat kunna sammanfattas i de två ovan (sid. 12) anförda formlerna. Medelst en något förändrad försöksanordning (egentligen den ursprungliga anordningen) och användning av kvicksilvertermometer i stället för platinamotståndstermometer erhöll RANDALL speciellt mellan 300° och 350° värden på α, som icke så alldeles litet avveko från de till grund för formlerna lagda värdena (så t. ex. $\alpha_{300°} = 12{,}47 \cdot 10^{-6}$ i st. f. $12{,}23 \cdot 10^{-6}$). I inledningen (p. 11) har redan påpekats, att det av RANDALL tillämpade förfaringssättet att städse operera med medelutvidgningskoefficienter, vid högre temperaturer och särskilt om (såsom även vid RANDALL's försök var fallet) temperaturintervallerna äro stora, leder till felaktigheter. Till belysande härav må följande från mina försök hämtade exempel anföras. Enligt försöksserien IV (sid. 55) erhölls

för temperaturintervallen $t_3 = 344{,}3°$ till $t_4 = 434°$ utvidgningen $\Delta L = 51{,}20 \cdot \frac{\lambda_0}{2}$. Betecknas medelutvidgningskoefficienten för denna intervall med α', erhåller man på grund härav

$$\alpha' = \frac{1}{L_0} \cdot \frac{\Delta L}{t_4 - t_3} = \frac{5120,}{36982{,}83 \cdot 89{,}7} = 15{,}434 \cdot 10^{-6}.$$

Beräknar man åter den „sanna" utvidgningskoefficienten α för medeltemperaturen $\frac{1}{2}(t_3 + t_4) = 389{,}2°$ med användning av de av försöksserien IV erhållna konstanterna a, b och c, får man för denna värdet $15{,}412 \times 10^{-6}$. Det synes sålunda sannolikt, att det av RANDALL erhållna värdet $\alpha_{400°}$ är i någon mån för stort i förhållande till värdet $\alpha_{300°}$.

Såväl vid RANDALL's som vid REIMERDES' och SCHEEL's försök voro de delar av kvartsringen, som berörde bottenskivan och täckglaset, blankslipade. De på beröringsställena förefintliga luftresterna kunna till någon del hava varit orsaken till att de av dessa observatörer funna värdena på α i allmänhet äro något litet mindre än de av mig enligt försöksanordning II erhållna (jmf. det på sid. 66 sagda). Då emellertid differenserna mellan de sistnämnda och RANDALL's samt SCHEEL's värden icke överstiga de möjliga försöksfelen och specifika olikheter hos de undersökta kvartsstyckena även kunna hava medverkat, kan detta antagande betraktas endast såsom en möjlighet.

Att någon termisk efterverkan hos kvartsen, sådan som den i detta arbete konstaterade, icke iakttagits av andra observatörer har förut framhållits, varjämte den sannolika orsaken därtill även angivits (jmf. ovan, p. 14 o. 44). Hos det genom smältning av den kristalliniska kvartsen erhållna amorfa *kvartsglaset* har däremot förekomsten av en dylik termisk hysteresis för icke länge sedan blivit av RICHARDSON (Phil. Mag. *20*, p. 726; 1910) definitivt påvisad.

42. För utvidgningen *pro meter* i optiska axelns riktning inom temperaturintervallerna 0°—100°, 15°—270° och 15°—480° ha av olika observatörer (delvis genom extrapolation) erhållits följande värden:

Observatörer	0°—100°	15°—270°	15°—480°
FIZEAU	0,802 mm	—	—
BENOÎT	0,796 „	—	—
LE CHATELIER	—	2,0 mm	5,4 mm
v. SAHMEN och TAMMANN [1])	—	2,2 „ 2,6 „	6,1 „ 8,1 „
SCHEEL	0,796 „	—	—
RANDALL	0,798 „	2,4 „	5,5 „
FÖRFATTAREN	0,803 „	2,5 „	5,5 „

[1]) De båda av v. SAHMEN och TAMMANN erhållna värdeparen hänföra sig till tvenne stycken bergkristall av olika ursprung.

VI. Undersökning av kvartsens dilatation i en mot optiska axeln vinkelrät riktning.

43. För undersökning av dilatationen vinkelrätt mot optiska axeln använde jag en tärning av kvarts, vars övre planslipade yta var parallell med optiska axeln och vars basyta, så när som på de tre små mattslipade ytelement, vilka tjänade såsom fötter, var konkav och svärtad [1]). Genom mätning med ABBE's kontaktmikrometer erhöll jag för tärningens höjd värdet 9,832 mm. Vid de dilatometriska försöken placerades tärningen på den tidigare använda bottenplattan möjligast symmetriskt mom kvartsringen, varvid denna med tillhjälp av justeringstuben inställdes så, att ett svagt kilformigt luftskickt uppstod mellan tärningens övre yta och täckglaset. För kvartsringens axellängd hade medelst kontaktmikrometern tidigare erhållits värdet 10,098 mm, vadan luftskiktets tjocklek (d) vid täckglasets mitt var i det närmaste 0,266 mm (ett noggrannare värde skola vi härleda senare).

På grund av luftskicktets ringa tjocklek kunde man vid interferensförsöken med fördel göra bruk av vätelinjerna H_α (C) och H_β (F). Såsom standardlinje användes som förut den gröna kvicksilverlinjen, vars våglängd vi åter beteckna med λ_0. De värden på de båda nämnda vätelinjernas våglängder, som jag påträffat i litteraturen, grunda sig på diffraktionsförsök och äro förty relativt osäkra. Genom en medelst interferensförsök utförd nybestämning av μ (= förhållandet mellan den gröna Hg-linjens och den ifrågavarande spektrallinjens våglängder) erhöll PULFRICH [2]) värdena $\mu_{Hg,\ H\alpha} = 0{,}83207$ och $\mu_{Hg,\ H\beta} = 1{,}12319$, medan av de tidigare våglängdsbestämningar, från vilka PULFRICH utgick vid sitt försök, hade erhållits värdena 0,83206 resp. 1,2300 [3]). Genom ett försök av samma art som PULFRICH's har jag erhållit för den förra kvantiteten värdet 0,83207 och för den senare 1,12301.

Emedan jag har för avsikt att i en följande uppsats ingå på en noggrannare bestämning av dessa värden, förbigår jag densamma här och begagnar mig i det följande av de sistnämnda värdena [4]).

44. Dilatationsförsöken utfördes med tillhjälp av PULFRICH's interferensmätningsapparat (försöksanordningen II). De vid utgångstemperaturen hos en försöksserie gjorda avläsningarna och de därpå grundade beräkningarna framgå av det följande:

---

[1]) Den övre ytans och det genom fötterna bestämda basplanets orientering hade vid slipningen noggrant prövats i ZEISS' optiska verkstad, varvid normalerna till dessa ytor utan något märkbart fel befunnos vinkelräta mot optiska axeln och parallella med varandra.

[2]) C. PULFRICH, Zeitschr. f. Instr. *13*, p. 442; 1893.

[3]) De i Recueil de const. phys. anförda våglängderna $\lambda_{H_\alpha} = 6562{,}8$ Å och $\lambda_{H_\beta} = 4861{,}3$ Å giva värdena 0,83207 resp. 1,12331, då $\lambda_{Hg\ \text{grön}} = 5460{,}740$ Å.

[4]) Spektrallinjeraas våglängder bero som bekant i någon mån av försöksanordningen, vilket måhända till en del kan vara orsaken till differenserna mellan de genom olika försök erhållna värdena på $\mu_{Hg,\ H\beta}$.

$h = 749{,}5$ mm; $\overleftarrow{d} = 0{,}266$ mm; $t = 14{,}8°$ C.

	H_α (röd)		H_β (blå)		Hg grön		H_α
l_1	33	33	87	86	80	79	32
l_2	202	204	214	213	220	220	202
l_0	229,9	228,3	228,1	229,0	229,0	229,4	229,0
l_3	375	375	338	340	362	363	374
l_s	203,3	204,0	213,0	213,0	220,7	220,7	202,7
$l_0 - l_s$	+24,6	+24,3	+15,1	+16,0	+8,3	+8,7	+26,3
b	171,0	171,0	125,5	127,0	141,0	142,0	171,0
δ	+0,144	+0,142	+0,120	+0,126	+0,059	+0,061	+0,153

$\delta_{H_\alpha} = +0{,}146$; $\delta_{H_\beta} = +0{,}123$; $\delta_0 = +0{,}060$.

Härav erhålles:

$$r_{H_\alpha} = \delta_{H_\alpha} - \delta_0 \cdot \mu = +0{,}096; \quad r_{H_\beta} = +0{,}056.$$

För att finna M_0, som måste stå att söka i närheten av talet $d : \frac{1}{2}\lambda_0 = 974$, bilda vi följande tabell.

Hg grön	H_α	H_β		
	$\mu = 0{,}83207$	$\mu = 1{,}12301$	$\mu = 1{,}12319$	$\mu = 1{,}12331$
M_0	$M_0 \cdot \mu$	$M_0 \cdot \mu$	$M_0 \cdot \mu$	$M_0 \cdot \mu$
970	807,108	1089,320	1089,494	1089,610
971	807,940	1090,442	1090,617	1090,734
972	808,772	1091,566	1091,740	1091,857
973	809,604	1092,689	1092,864	1092,981
974	810,436	1093,812	1093,987	1094,104
975	811,268	1094,935	1095,110	1095,227
976	*812,100*	*1096,058*	1096,223	1096,351
977	812,932	1097,181	1097,356	1097,474

De nyss funna värdena på r_{H_α} och r_{H_β} giva, såsom av denna tabell framgår [1]):

[1]) Man finner, att H_β varken för $\mu = 1{,}12319$ eller för $\mu = 1{,}12331$ giver något användbart värde $M_0 \cdot \mu$.

$$M_0 = 976; \quad M_{H_\alpha} = 812 \text{ och } M_{H_\beta} = 1096,$$

på grund varav (med försummande av de av temperaturen och trycket betingade korrektionstermerna k och k_0) erhålles:

$$d = \left\{ \begin{array}{l} 812{,}146 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\alpha} \\ 976{,}060 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 1096{,}123 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 976{,}055 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 976{,}060 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 976{,}058 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \end{array} \right\} = 0{,}266500 \text{ mm.}$$

Det noggranna (genom interferensförsöket bestämda) värdet på d är sålunda 0,0005 mm större än det medelst kontaktmikrometern erhållna. Av de genom interferensförsök tidigare utförda mätningarna av kvartsringens absoluta axellängd L (avståndet mellan täckglasets mitt och bottenplattan) har framgått, att denna längd vid den ifrågavarande temperaturen (ca 14°) med tillräcklig noggrannhet kan sättas = 10,099 mm, varigenom för kvartsringens höjd, som vi i det följande skola beteckna med E, fås värdet 10,0990 − 0,2665 = 9,8325 mm.

45. De värden på δ_{H_α}, δ_{H_β} och δ_0, som erhållits genom den ifrågavarande försöksserien (I) av de vid olika temperaturer (t) och lufttryck (h) gjorda avläsningarna, äro sammanställda i följande tabell.

Försöksserie I.

t	h mm	δ_{H_α}		δ_{H_β}		δ_0		δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_α}	δ_{H_β}	δ_0
14,8°	749,5	+0,144	+0,142	+0,120	+0,126	+0,059	+0,061	+0,153	+0,146	+0,123	+0,060
91,7°	749,6	−0,448	−0,451	+0,417	+0,412	−0,495	−0,494	−0,457	−0,452	+0,415	−0,495
334,4°	750,3	−0,088	−0,086	+0,315	+0,328	−0,362	−0,363	−0,085	−0,086	+0,322	−0,363
92,0°	749,3	+0,476	+0,474	+0,340	+0,342	+0,451	+0,446	+0,468	+0,473	+0,341	+0,449
14,1°	751,2	+0,193	+0,195	+0,184	+0,186	+0,117	+0,113	+0,192	+0,193	+0,185	+0,115

Innan vi gå att undersöka dilatationen, skola vi på samma sätt som nyss bestämma luftskiktets absoluta tjocklek (d) vid den efter uppvärmningen och avsvalningen inträdda sluttemperaturen 14,1°. (Mellan de två sista observationerna [$t = 92{,}0°$ resp. $t = 14{,}1°$] hade förgått en tid av närmare ett dygn.) Av de i tabellen anförda värdena på δ få vi:

$$r_{H_\alpha} = +0{,}097 \text{ och } r_{H_\beta} = +0{,}056,$$

på grund varav enligt tabellen på sid. 70 erhålles:

$$M_0 = 976; \quad M_{H_\alpha} = 812; \quad M_{H_\beta} = 1096$$

och således

$$d = \left\{ \begin{array}{l} 872{,}193 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\alpha} \\ 976{,}115 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 1096{,}185 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 976{,}111 \cdot \frac{1}{2} \\ 976{,}115 \cdot \frac{1}{2} \\ 976{,}113 \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right\} = 0{,}266515 \text{ mm.}$$

För att kunna jämföra detta värde på d med det vid försöksseriens begynnelsetemperatur 14,8° erhållna värdet hava vi att till det förra addera differensen mellan kvartsringens och kvartstärningens höjdtillväxter vid en temperaturökning från 14,1° till 14,8°, för vilken differens man med användning av formeln II, a) (p. 61) samt den av BENOÎT för utvidgningen vinkelrätt mot axeln uppställda formeln (p. 13) finner värdet $(52-93)\cdot 10^{-6} = -41\cdot 10^{-6}$ mm. För $t = 14{,}8°$ fås sålunda $d = 0{,}266474$ mm, d. v. s. luftskicktets medeltjocklek var vid slutet av försöksserien $26\cdot 10^{-6}$ mm mindre än vid dess början vid samma temperatur. Om någon termisk efterverkan icke skulle förekommit hos kvartstärningen, hade man på grund av den hos kvartsringen förut konstaterade termiska efterverkan (|| med axeln) bort erhålla ett väsentligt större värde på d vid försöksseriens slut än vid dess början (för en och samma temperatur). Av nyssnämnda resultat kunna vi alltså sluta till att en termisk efterverkan faktiskt förekom hos kvartstärningen även vinkelrätt mot optiska axeln, varvid denna verkan icke blott kompenserade utan även i någon man översköt den motsvarande verkan hos kvartsringen i optiska axelns riktning. Den här konstaterade minskningen av luftskiktets tjocklek utgör även en bekräftelse av att den termiska efterverkan, som tidigare observerats hos kvartsringen, icke kan vara skenbar, d. v. s. beroende på en genom främmande beståndsdelar alstrad förändring av luftskiktets brytningsexponent, ity att, om detta vore den verkliga orsaken, denna i det sist betraktade fallet borde åstadkomma en ökning och icke, såsom försöken visat, en minskning av värdet på luftskiktets tjocklek.

46. Vid uppvärmningen från utgångstemperaturen + 14,8° iakttogs, att de gröna interferensstrimmorna först förskötos inemot två strimbredder i riktning mot luftkilens kant, varefter en kontinuerlig förskjutning i motsatt riktning inträdde. Kvartsringen, som under upphettningsprocessen först mottog värme (delvis genom strålning) från den omgivande upphettningskroppen utvidgade sig sålunda till att börja med något hastigare än kvartstärningen. Den därpå följande hastigare tillväxten av kvartstärningens höjddimension bevisar dock, att kvartsens utvidgning vinkelrätt mot optiska axeln i överensstämmelse med FIZEAU's och BENOÎT's försök (se ovan p. 10 och 13) är under lika förhållanden större än utvidgningen parallellt med optiska axeln (vid en långsammare uppvärmning förskötos strimmorna från början i riktning från luftkilens kant). Den förändring av luftskiktets tjocklek, som motsvarade en och samma temperaturstegring hos såväl ringen som tärningen, är således av negativ art, d. v. s. talen m_0 och m äro negativa, då det är fråga om uppvärmning.

För uppvärmningen från $t_1 = 14{,}8°$ till $t_2 = 91{,}7°$ har man

$$\varrho_{H_\alpha} = (\delta_{t_2} - \delta_{t_1}) - (\delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}})\,\mu = -0{,}136, \quad \therefore \varrho_{H_\alpha''} + 1 = 0{,}864\,; \quad \varrho_{H_\beta} = +0{,}915.$$

Genom direkt observation av de förskjutna strimmornas antal, vilken dock icke fortsattes på långt när så länge, som förskjutningen pågick, kunde man sluta till att m_0 var beläget mellan -10 och -20. För att finna det exakta värdet bilda vi följande tabell, i vilken värdena på ϱ äro positiva tal.

Tabell för $m_0 \cdot \mu = m + (\delta t_2 - \delta t_1) - (\delta_{0t_2} - \delta_{0t_1})\ \mu = m + \varrho$

Hg grön	H_α		H_β	
m_0	m	ϱ	m	ϱ
-20	-17	0,36	-23	0,54
-19	-16	0,19	-22	0,66
-18	-15	0,02	-21	0,79
-17	-15	0,85	-20	0,91
-16	-14	0,69	-18	0,03
-15	-13	0,52	-17	0,16
-14	-12	0,35	-16	0,28
-13	-11	0,18	-15	0,40
-12	-10	0,01	-14	0,52
-11	-10	0,85	-13	0,65
-10	-9	0,68	-12	0,77

De nyss erhållna värdena på $\varrho_{H_\alpha} + 1$ och ϱ_{H_β} giva enligt denna tabell:

$$m_0 = -17;\ \ m_{H_\alpha} = -14;\ \ m_{H_\beta} = -20,$$

på grund varav (enligt formeln $f = m + \delta t_2 - \delta t_1$) erhålles:

$$f_0 = \left\{ \begin{array}{l} -17 - 0{,}555 \\ (-14 - 0{,}598) : \mu_{H_\alpha} \\ (-20 + 0{,}292) : \mu_{H_\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -17{,}555 \\ -17{,}544 \\ -17{,}549 \end{array} \right\} = -17{,}549.$$

För den av temperaturstegringen och förändringen av lufttrycket betingade korrektionstermen k_0' giver den på sid. 32 anförda formeln värdet $+0{,}057$. Betecknas minskningen av luftskiktets tjocklek med Δd, ha vi alltså

$$\Delta d = -(f_0 + k_0') \cdot \frac{\lambda_0}{2} = 17{,}492 \cdot \frac{\lambda_0}{2} = \cdot 0{,}0047760 \text{ mm}.$$

Betecknas åter kvartsringens axellängd vid temperaturen t_1 med E_1 och vid temp. t_2 med E_2, erhålla vi enligt formeln II (sid. 61; enligt vad tidigare framhållits, är denna för temperaturer under c:a 200° noggrannare än formeln I, sid. 59):

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{1 + 7{,}099 \cdot 10^{-6} t_2 + 0{,}0092484 \cdot 10^{-6} t_2^2}{1 + 7{,}099 \cdot 10^{-6} t_1 + 0{,}0092484 \cdot 10^{-6} t_2^2} - 1 \right) E_1 .$$

För $E_1 = 10{,}099$ mm, $t_1 = 14{,}8°$ och $t_2 = 91{,}7°$ erhålles sålunda $E_2 - E_1 = 0{,}00622778$ mm. Vi erhålla härav slutligen för kvartstärningens utvidgning vinkelrätt mot optiska axeln värdet

$$\Delta L = L_2 - L_1 = E_2 - E_1 + \Delta d = 0{,}0110038 \text{ mm}.$$

Följande tabell utgör en sammanställning av resultaten av de räkningar, som på likartadt sätt utförts för de skilda till försöksserien I hörande temperaturintervallerna [1]).

Temperaturintervall	ϱ_{H_α}	ϱ_{H_β}	m_0	m_{H_α}	m_{H_β}	f_0 (medelvärde)	k_0	Δd mm	ΔE mm	ΔL mm
14,8° till 91,7°	− 0,136	+ 0,915	− 17	− 14	− 20	− 17,549	+ 0,057	0,0047760	0,0062278	0,0110038
„ „ 334,4°	+ 0,120	+ 0,674	− 84	− 70	− 95	− 84,415	+ 0,146	0,0230086	0,0315164	0,0545250
334,4° „ 14,1°	+ 0,119	+ 0,674	− 84	− 70	− 95	− 84,471	+ 0,147	0,0230236	0,0315686	0,0545922
92,0° „ „	0,000	− 0,219	− 18	− 15	− 20	− 17,672	+ 0,059	0,0048090	0,0063473	0,0111563

Emedan vid såväl uppvärmningen som avsvalningen avläsningar gjordes vid endast tre skilda temperaturer, hava vi icke tillräckligt många observationsdata för att kunna uttrycka sambandet mellan L och t genom en kubisk interpolationsformel, varför vi inskränka oss till uppställandet av en kvadratisk sådan, d. v. s. till härledning av de i likheterna på sid. 60 ingående konstanterna a och b (såsom tidigare [p. 61] visats, kan även kvartsens utvidgning i optiska axelns riktning ända upp till temperaturer av c:a 300 grader approximativt framställas genom en dylik formel). Vi erhålla då såsom resultat av försöksserien I:

[1]) Vid beräkningen av ΔE för temperaturintervallerna 14,8° till 334,4° och 334,4° till 14,1° har gjorts bruk av en kombination av formeln I (p. 59), tillämpad på den övre temperaturgränsen, och formeln II, tillämpad på den undre (täljaren i det brutna uttryck, som ingår i värdet på ΔE, har m. a. o. beräknats enligt formeln I). Beträffande observationerna vid sjunkande temperatur, har vid de därpå grundade beräkningarna, i likhet med vad tidigare varit fallet, utgåtts från den lägsta temperaturen ($= t_1$), tillföljd varav f_0 även i detta fall har negativt förtecken.

	t_1	t_2	t_3	L_1 mm	$L_2 - L_1$ mm	$L_3 - L_1$ mm	L_0 mm	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$
1:o, uppvärmn.	14,8°	91,7°	334,1°	9,8325	0,0110038	0,0545250	9,8305	13,328	0,01153
2:o, avsvaln.	14,1°	92,0°	„	—	0,0111563	0,0545922	„ [1]	13,363	0,01143

47. Innan de till försöksserien I hörande observationerna utfördes, hade interferensapparaten upphettats till en temperatur av c:a 300° och därefter under flere dagar fått avsvalna. Enligt vad SCHEEL *(l. c.)* senare funnit, är en dylik föruppvärmning resp. avsvalning av fördel, då det gäller att förebygga en inverkan av eventuellt förefintliga luftrester på beröringsställena mellan det undersökta objektet och dess underlag, och då kvartstärningen vid dessa försök endast med sin egen mycket ringa tyngd vilade på bottenplattan, är det icke alldeles otänkbart, att trots mattslipningen av tärningens fötter en viss verkan av antydd art skulle kunnat göra sig gällande. Vid den försöksserie II, till vilken vi nu övergå, förekom icke någon föruppvärmning.

Försöksserie II.

t	h mm	δ_{H_α}		δ_{H_β}		δ_0		δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_β}	Medeltal δ_0
12,5°	748,7	+0,442	+0,448	−0,443	−0,447	+0,427	+0,432	+0,449	+0,446	−0,445	+0,430
158,9°	749,3	+0,408	+0,402	+0,331	+0,337	−0,476	−0,481	+0,418	+0,409	+0,334	−0,479
306,2°	750,4	+0,182	+0,179	+0,099	+0,098	+0,347	+0,341	+0,152	+0,171	+0,099	+0,344
152,1°	752,5	−0,016	−0,012	+0,459	+0,470	+0,438	+0,423	−0,016	−0,015	+0,465	+0,431
10,4°	751,5	−0,241	−0,241	−0,046	−0,043	−0,204	−0,203	−0,241	−0,241	−0,045	−0,204
124,6°	749,9	−0,368	−0,366	+0,100	+0,105	+0,238	+0,242	−0,340	−0,358	+0,103	+0,240

Temperaturintervall	ϱ_{H_α}	ϱ_{H_β}	m_0	m_{H_α}	m_{H_β}	f_0 (medelvärde)	k_0	Δd mm	ΔE mm	ΔL mm
12,5° till 158,9°	+0,719	+1,800	−34	−29	−40	−34,909	+0,092	0,0095063	0,0128384	0,0223147
„ „ 306,2°	−0,203	+0,641	−76	−63	−86	−76,075	+0,141	0,0207328	0,0299141	0,0506469
306,2° „ 10,4°	−0,044	−0,471	−77	−64	−86	−76,442	+0,144	0,0208322	0,0300695	0,0509017
152,1° „ „	−0,302	−0,203	−34	−28	−38	−33,376	+0,092	0,0090878	0,0123085	0,0218963
10,4° „ 124,6°	−0,486	−0,349	−27	−22	−30	−26,573	+0,079	0,0072338	0,0096266	0,0168604

[1] På grund av de tidigare nämnda termiska efterverkningarna var L_0 i fallet 2:o med all sannolikhet något litet större än i fallet 1:o. Då denna skillnad icke kunnat exakt bestämmas, har L_0 städse (såväl här som i de följande försöksserierna) satts lika med det av den första försöksserien (1:o) erhållna värdet 9,8305 mm, vilket, ehuru i och för sig approximativt, i varje fall tillåter att med tillräcklig noggrannhet beräkna konstanterna a och b.

	t_1	t_2	t_3	L_0 mm	$L_2 - L_1$ mm	$L_3 - L_1$ mm	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$
1:o, uppvärmn.	12,5°	159,9°	306,2°	9,8305	0,0223447	0,0506469	13,180	0,01368
2:o, avsvaln.	10,4°	152,6°	306,2°	„	0,0213963	0,0509017	13,098	0,01392

För luftskiktets absoluta tjocklek vid början av uppvärmningsförsöken och vid slutet av avsvalningsförsöken (t = 12,5° resp. 14,4°) erhåller man värdena:

$$d_{12,5°} = \left\{ \begin{array}{l} 812{,}446 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\alpha} \\ 976{,}430 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 1096{,}955 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 976{,}415 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 976{,}430 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 976{,}443 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \end{array} \right\} = 0{,}266601 \text{ mm och}$$

$$d_{10,4°} = \left\{ \begin{array}{l} 812{,}759 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\alpha} \\ 976{,}796 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 1096{,}955 \cdot \frac{1}{2}\lambda_{H_\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 976{,}792 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 976{,}796 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \\ 976{,}799 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0 \end{array} \right\} = 0{,}266701 \text{ mm}$$

Sluttemperaturen är i detta fall 2,1° lägre än begynnelsetemperaturen. För skillnaden mellan kvartsringens och kvartstärningens genom en temperaturstegring av 0,7° vid rumtemperatur alstrade höjdtillväxter funno vi tidigare (sid. 72) värdet $-41 \cdot 10^{-6}$ mm. Addera vi tre gånger detta värde (motsvarande förhållandet 2,1° : 0,7°) till det nyss funna värdet på $d_{10,4°}$, få vi $d_{12,5°} = 0{,}266578$ mm, d. v. s. luftskiktets medeltjocklek var vid slutet av försöksserien c:a $23 \cdot 10^{-6}$ mm mindre än vid dess början vid samma temperatur, vilken differens är av så gott som alldeles samma storlek som den vid den första försöksserien observerade motsvarande differensen ($= 26 \cdot 10^{-6}$ mm). Den på sid. 72 dragna slutsatsen angående förekomsten av en termisk efterverkan hos kvartsen jämväl $\perp$ mot optiska axeln har sålunda bekräftats även genom den senare försöksserien.

Vad konstanterna a och b vidkommer, äro de av försöksserien II erhållna värdena på den förra konstanten något mindre och de på den senare konstanten något större än de av försöksserien I erhållna motsvarande värdena, och i motsats till vad fallet var vid den sistnämnda serien, är det av serien II, 2:o (avsvalningsförsöken) erhållna värdet på a något mindre och det på b något större än de värden, som framgått av serien II, 1:o.

Såsom av observationstabellen framgår, uppvärmdes interferensapparaten ännu till en temperatur av + 124,6°, efter det den förut uppnått „sluttemperaturen" + 10,4°. De vid dessa båda temperaturer gjorda avläsningarna tillåta visserligen icke någon ny bestämning av

konstanterna a och b men erbjuda dock en möjlighet att genom beräkning av utvidgningskoefficienten för medeltemperaturen $\frac{10{,}4+124{,}6}{2}=67.5°$ pröva, huruvida de senast funna värdenas på a och b avvikelser från de av serien I erhållna värdena kan tillskrivas den tidigare nämnda omständigheten, att de till serien II hörande försök, som givit till resultat de nyssnämnda värdena på a och b, icke föregåtts av någon föruppvärmning av interferensapparaten. Medelst den för uppvärmningen från $t_1=10{,}4°$ till $t_2=124{,}6°$ funna dilatationen (ΔL) ävensom det förut använda värdet $L_0=9{,}8305$ mm erhålla vi

$$\alpha'_{67{,}5°}=\frac{1}{L_0}\times\frac{\Delta L}{t_2-t_1}=\frac{0{,}0168604}{9{,}8305\cdot 114{,}2}=15{,}018\cdot 10^{-6}.$$

De av de skilda försöksserierna erhållna konstanterna a och b giva (enligt formeln $\alpha=a+2bt$) för samma koefficient ($t=67{,}5°$) följande värden:

I, 1:o : $14{,}885\cdot 10^{-6}$; I, 2:o : $14{,}896\cdot 10^{-6}$; II. 1:o : 15,027; II, 2:o : 14,977.

Oaktadt samtliga dessa värden ganska nära ansluta sig till det nyss erhållna värdet på $\alpha'_{67{,}5°}$, finner man dock, att detta bäst överensstämmer med de på grund av försöksserien II (1:o och 2:o) beräknade värdena, vilkas skillnad utgör blott $0{,}03\cdot 10^{-6}$ och mellan vilka det ifrågavarande värdet är beläget. Någon inverkan av den „föruppvärmning“ (ända till 306,2°), som föregått det sista försöket, har sålunda icke kunnat konstateras. Olikheten mellan de av försöksserierna I och II erhållna värdena på a och b kan följaktligen icke heller tillskrivas förekomsten i det ena fallet resp. saknaden i det andra av en föruppvärmning. Man finner för övrigt, att denna olikhet icke är större än den, som förefinnes mellan de av skilda försöksserier tidigare erhållna värdena på de motsvarande koefficienterna för utvidgningen i optiska axelns riktning, varför orsaken till densamma huvudsakligen torde sta att söka i de fel, som vidlåda temperaturbestämningarna (huvudfelkällan för samtliga i detta arbete beskrivna dilatationsförsök).

48. Vid bildandet av de slutliga medelvärdena på konstanterna a och b har man på grund av det nyss sagda icke någon anledning att giva försöksserien II en mindre „vikt“ än försöksserien I. Då emellertid de termiska efterverkningarna huvudsakligen göra sig gällande vid avsvalningsförsöken, synes det riktigast, att tilldela de till vardera serien hörande försöken av sistnämnda art (I, 2:o och II, 2:o) endast en halv vikt.[1]) Man erhåller då såsom slutresultat:

$$a=13{,}246\cdot 10^{-6};\quad b=0{,}012625\cdot 10^{-6}.$$

För kvartsens dilatation vinkelrätt mot optiska axeln fås alltså de för temperaturer mellan $+10°$ och $+334°$ gällande formlerna

[1]) Emedan, såsom tidigare påpekats, kvartsringens och kvartstärningens termiska efterverkningar till stor del kompenserat varandra vid dilatationsförsöken, synes det berättigat att här, om ock med endast halv vikt, medtaga även de sistnämnda försöken.

IV) $$L = L_0 \left(1 + 13{,}246 \cdot 10^{-6} t + 0{,}012625 \cdot 10^{-6} t^2\right),$$

IV, *a*) $$\alpha = (13{,}246 + 0{,}02525\, t) \cdot 10^{-6}.$$

En jämförelse med FIZEAU's och BENOÎT's motsvarande formler (se inledningen, p. 13) visar, att det här erhållna värdet på a mycket nära överensstämmer med dessa observatörers värden, varemot konstanten b är i någon mån större. Denna olikhet kan sannolikt åtminstone till en del förklaras därigenom, att konstanten b inom den vida temperaturintervall, för vilken formeln IV *a*) blivit uppställd, något ökas med temperaturen, varför det av mig erhållna värdet på b egentligen utgör ett medelvärde av de för olika höga temperaturer (inom gränserna 10° och 334°) gällande värdena. Att utvidgningen hos den av mig undersökta kvartsen såväl i optiska axelns riktning som vinkelrätt däremot befunnits i någon mån större än de av FIZEAU och BENOÎT undersökta kvartsstyckenas utvidgning kan för övrigt även i betraktande av v. SAHMEN's och TAMMANN's i inledningen omnämnda försöksresultat till någon del tillskrivas en specifik olikhet hos de undersökta kvartsstyckena, ehuru ett dylikt antagande dock knappast synes nödvändigt.

Följande tabell utgör en sammanställning av ett antal på olika sätt beräknade utvidgningskoefficienter för vissa temperaturer:

$\alpha \cdot 10^6$

	20°	50°	100°	200°	300°
Enligt formeln IV, *a*) . . .	13,751	14,509	15,771	18,296	20,821
„ försöksserien I, 1:o	13,789	14,481	15,634	17,940	20,246
„ „ I, 2:o	13,820	14,506	15,649	17,935	20,221
„ „ II, 1:o	13,727	14,548	15,916	18,652	21,388
„ „ II, 2:o	13,659	14,490	15,882	18,666	21,450
„ FIZEAU	13,72	14,43	—	—	—
„ BENOÎT	13,720	14,388	—	—	—

Man finner, att för temperaturen 20° överensstämmelsen mellan förf:s samt FIZEAU's och BENOÎT's värden på α är ganska god. För temperaturen 50° gör sig däremot redan en, om ock ringa, avvikelse i ovan antydd riktning märkbar. De av de skilda försöksserierna erhållna värdenas avvikelser från de enligt formeln IV, *a*) beräknade värdena ökas självfallet med växande temperatur. För den lägsta i tabellen upptagna temperaturen utgör den maximala avvikelsen 0,7 %, för den högsta temperaturen 3,0 % (de sannolika felen äro mindre än 1 %).

För utvidgningen *pro meter* från 0° till resp. 100°, 200° och 300° erhåller man enligt formeln IV värdena 1,451 mm, 3,154 mm och 5,111 mm, medan FIZEAU's och BENOÎT's formler, vilka dock icke gälla för högre temperaturer än c:a 80°, för utvidgningen från 0° till 100° giva värdena 1,443 mm resp. 1,442 mm. LE CHATELIER fann för utvidgningen pro meter från 15°

till 270° värdet 4,3 mm, vilket fullständigt överensstämmer med det enligt formeln IV beräknade motsvarande värdet.

49. För att grafiskt kunna framställa observationerna angående kvartstärningens utvidgning (⊥ mot axeln) har jag med användning av medelvärdena för de genom de båda försöksserierna erhållna konstanterna a och b samt värdet $L_0 = 9{,}8305$ mm beräknat värdet på L_3 för vardera försöksserien, varvid för vinnande av möjligaste överensstämmelse med de ovan gjorda beräkningarna avsvalningsförsöken (I, 2:o och II, 2:o) åter tilldelats endast halv vikt. Med kännedom om de observerade värdena på ΔL har man sedan omedelbart funnit värdena på L_1 och L_2. Resultatet av denna beräkning är följande:

	t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm
I, 1:o	14,8°	9832471	I, 2:o	334,4°	9886996	II, 1:o	12,5°	9832127	II, 2:o	306,2°	9882774
	91,7°	9843475		92,0°	9843560		158,9°	9854472		152,1	9853268
	334,4°	9886996		14,1°	9832404		306,2°	9882774		10,4	9831872

Med tillämpning av det i fig. 10 använda beteckningssättet framställes sambandet mellan L och t grafiskt i fig. 12. Som man finner, ansluta sig de i tabellen angivna punkterna mycket nära till den i figuren uppdragna kurvan, vilken representerar formeln IV för $L_0 = 9{,}8305$ mm.

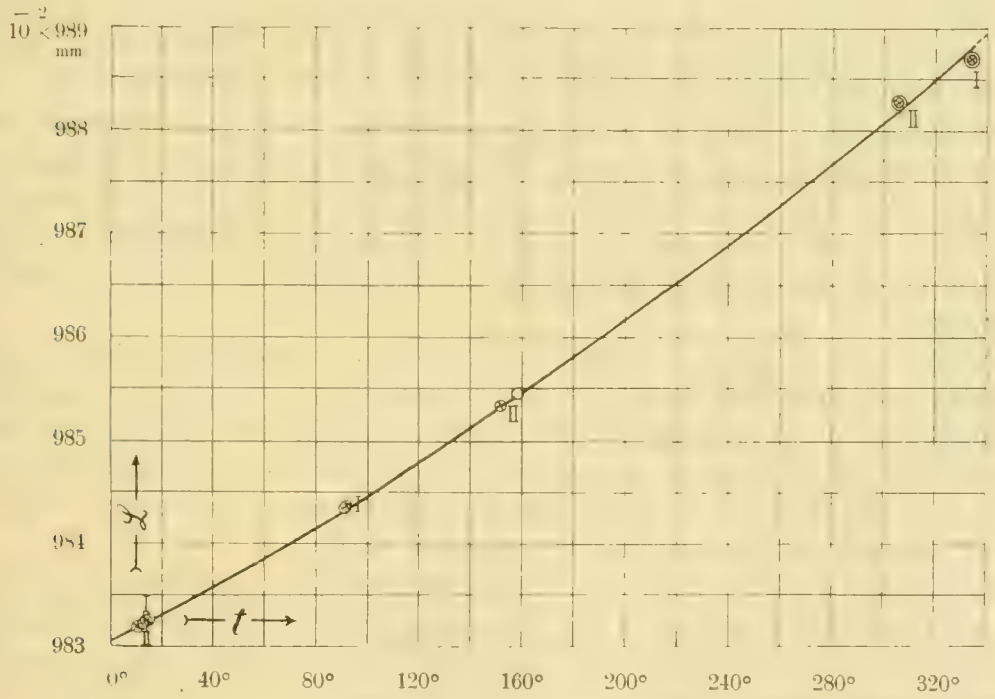


Fig. 12.

Det genom formeln IV, *a*) uttryckta sambandet mellan utvidgningskoefficienten och temperaturen framställes grafiskt genom kurvan 2 i fig. 11 (sid. 64).

50. Betecknas *volymen* av ett kvartsstycke vid 0° med V_0 och vid $t°$ med V samt kvartsens volymutvidgningskoefficient med β, erhåller man genom kombination av formlerna II och IV följande för kvartsens volymutvidgning inom temperaturintervallen 10° till c:a 300° gällande formler:

V) $$V = V_0 \left(1 + 33{,}591 \cdot 10^{-6}\, t + 0{,}03450 \cdot 10^{-6}\, t^2\right),$$

V, *a*) $$\beta = (33{,}591 + 0{,}0690\, t) \cdot 10^{-6}.$$

För utvidgningen *pro cm*³ från 0° till resp. 100°, 200° och 300° erhåller man enligt formeln V värdena

3,7 mm³, 8,1 mm³ och 13,2 mm³.

VII. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Wegen der Einführung des kristallinischen Quarzes (des Bergkristalles) als Vergleichskörper bei dilatrometrischen Prezisionsbestimmungen und der während der letzten Zeit immer häufigeren Verwendung dieses Stoffes für mehrere sowohl wissenschaftliche als technische Zwecke ist es wichtig, seine thermische Ausdehnung innerhalb eines weiten Temperaturintervalles möglichst genau zu kennen. Während die Ausdehnung des Quarzes bis auf Temperaturen von + 80 à + 100° C der Gegenstand mehrerer sorgfältiger Untersuchungen gewesen ist, ist seine Ausdehnung bei höheren Temperaturen verhältnismässig wenig und hauptsächlig nur in *einer* Richtung (parallel zur kristallographischen Hauptaxe) bisher untersucht worden.

In der obigen Arbeit wird über eine nach der optischen Interferenzmethode ausgeführte Untersuchung der thermischen Ausdehnung des Quarzes sowohl ∥ als ⊥ zur Axe berichtet, die sich auf Versuchen stützt, welche der Verf. schon im Winter 1898—1899 im physikalischen Institut der Universität Jena mit wohlwollender Unterstützung der optischen Werkstätte CARL ZEISS ausführte, die aber wegen verschiedener (in der Note auf S. 13 näher angegebener) Ursachen bisjetzt unveröffentlicht geblieben sind.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der vom Verf. und von anderen Beobachtern erhaltenen Werte der in den allgemeinen Dilatationsgleichungen (siehe oben, p. 10) vorkommenden Constanten *a*, *b*, *c* . . . und der für einige spezielle Temperaturen berechneten Ausdehnungskoeffizienten (α) sowie auch einiger anderen für die Ausdehnung charaktäristischen Grössen.

Ausdehnung des Quarzes durch die Wärme.

Beobachter	Giltigkeitsbereich.	Richtung	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$	$c \cdot 10^6$	$d \cdot 10^6$	$\alpha \cdot 10^6$						Ausd. pro Meter in mm		
							20°	50°	100°	200°	300°	400°	0°–100°	15°–270°	15°–480°
Fizeau	+ 10° bis c:a + 80° C	∥ z. Axe	6,99	0,01025	—	—	7,400	8,015	—	—	—	—	0,802	—	—
	„ „ „ „	⊥ „ „	13,24	0,0119	—	—	13,72	14,43	—	—	—	—	1.443	—	—
Benoit	+ 6° „ „ „	∥ „ „	7,161	0,00801	—	—	7,481	7,962	—	—	—	—	0,796	—	—
	„ „ „ „	⊥ „ „	13,255	0,01163	—	—	13,720	14,388	—	—	—	—	1,442	—	—
Reimerdes	+ 5 „ „ + 220° C	∥ „ „	6,925	0,00845	—	—	7,263	7,770	8,614	10,303	—	—	0,777	—	—
Scheel	+ 15° „ „ + 100° C	„ „ „	7,144	0,00815	—	—	7,470	7,959	8,774	—	—	—	0,796	—	—
Randall [1])	„ „ + 250° C	„ „ „	7,170	0,00810	—	—	7,494	7,980	8,790	10,410	12,233	15,351	0,798	2,4	5,5
Le Chatelier	—	„ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,0	5,4
		⊥ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,3	8,4
v. Sahmen und Tammann	—	∥ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,2	6,1
														2,6	8,1
Lindman	+ 9° bis + 270° (à 300° C)	∥ „ „	7,099	$0,0092484$	—	—	7,469	8,024	8,949	10,798	(12,648)	—	0,802	2,5	—
	„ „ c:a + 350° C	„ „ „	$7,159_2$	$0,008622_6$	$0,_5 1873$	—	7,506	8,036	8,940	10,833	12,838	—	0,804	„	5,5
	„ „ + 434° C	„ „ „	$7,143_5$	$0,008925_2$	$0,_6 1459$	$0,_8 2751_2$	7,501	8,039	8,934	10,819	12,835	15,058	0,805	„	-
	10° „ + 334° C	⊥ „ „	13,246	0,012625	—	—	13,751	14,509	15,771	18,296	20,821	—	1,451	4,3	—

[1]) Für die Ausdehnung ∥ zur Axe zwischen + 250° und + 470° C hat Randall eine spezielle Formel aufgestellt (siehe oben p. 12).

Die wahrscheinlichen Fehler der vom Verf. erhaltenen Werte der Ausdehnungskoeffizienten sind durchschnittlich kleiner (in gewissen Temperaturbereichen bedeutend kleiner) als 1 Prozent. Obwohl die Differenzen zwischen den vom Verf. und den von anderen Beobachtern — mit Ausnahme von REIMERDES — erhaltenen Werten dieser Koeffizienten innerhalb der Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler fallen, lassen sie sich vielleicht zum Teil dadurch erklären, dass bei den Versuchen des Verfassers jeder Einfluss der an den Berührungstellen zwischen den Kristallpräparaten und ihren Unterlagen bezw. den Deckgläsern sonst vorkommenden Luftreste durch Mattschleifen der betreffenden Aussprünge der Kristallpräparate beseitigt war, welche Vorsichtsmassregel die anderen Beobachter nicht getroffen zu haben scheinen (verschiedene andere Erklärungsgründe sind oben, p. 67 u. 78, auch in Betracht gezogen worden) Weil der vom Verf. untersuchte Quarzring mit dem von REIMERDES früher untersuchten identisch war, kann die Discrepanz zwischen den von REIMERDES und den vom Verf. und anderen Beobachtern erhaltenen Werten für die Ausdehnung des Quarzes parallel zur Axe nicht auf einer spezifischen Eigentümlichkeit dieses Quarzstückes beruhen, sondern dürfte darauf zurückgeführt werden können, dass die von REIMERDES gemessenen Temperaturen im allgemeinen ein wenig höher als die des Quarzpräparates waren.

Durch die mittelst Interferenzversuche ausgeführte Messung der absoluten Höhe des erwähnten Quarzringes vor und nach einer stärkeren Erwärmung wurde festgestellt, dass der Quarz nicht so vollkommen frei von thermischen Nachwirkungen ist, wie man bisher vorausgesetzt hat, indem eine, obwohl geringe, temporäre Wirkung dieser Art während einiger Tage nach der Abkühlung des Quarzpräparates zur Anfangstemperatur nachgewiesen werden konnte. Als der 10,1 mm hohe Ring, dessen geometrische Axe zur optischen Axe parallel war, nach Erwärmung bis auf 350° die Zimmertemperatur wieder erreicht hatte, betrug sein der thermischen Nachwirkung entsprechender Höhenzuwachs etwa 0,00056 mm oder z:a 1,5 Prozent seiner ganzen vorhergehenden Ausdehnung || zur Axe, welche Wirkung jedoch im Verlauf der nächsten Tage allmählich verschwand. Auch in einer zur optischen Axe senkrechten Richtung konnte eine ähnliche und zwar — entsprechend der in dieser Richtung grösseren thermischen Ausdehnung — ein wenig grössere Wirkung an einem Quarzwürfel beobachtet werden [1]). Es ist denkbar, dass die beim Quarz vorkommende Zwillingbildung eine Ursache zu diesen Nachwirkungen sein könnte.

Die erwähnten absoluten Längenmessungen gaben zu einer Präfung bezw. Revision der Wellenlängen der bei den Versuchen benutzten gelben Querksilberlinien relativ der als Normale benutzten grünen Querksilverlinie Anlass. Für $\lambda_{Hg\ grün} = 5460{,}740$ Å (der von BUISSON und FABRY in Recueil de const. phys. angegebene aus Interferenzversuchen hergeleitete Wert dieser Wellenlänge) ergab sich als Mittel von den aus 5 verschiedenen Versuchsreihen gewonnen Werten (mit Angabe des wahrscheinlichen Fehlers):

$$\lambda_{Hg\ gelb_1} = \left(5790{,}6522 \pm 7{,}2 \cdot 10^{-4}\right) \text{Å}.$$

[1]) Bei dem amorphen Quarzglase ist bekanntlich eine ähnliche thermische Hysteresis nachgewiesen worden (siehe oben p. 68).

Für die zweite gelbe Querksilberlinie, die vom Verf. jedoch nur ausnahmsweise und zwar in Verbindung mit *Hg* gul_1 benutzt wurde, ergab sich aus einem Versuche, bei dem eigentlich das Mittel der Wellenlängen der beiden Linien bestimmt wurde,

$$\lambda_{Hg\ gelb_2} = 5769{,}611\ \text{Å}.$$

Die entsprechenden in Recueil de const. phys. angeführten Werte dieser Wellenlängen, von denen bei der vom Verf. vorgenommenen Revision ausgegangen wurde, sind bezw. 5790,657 Å und 5769,596 Å.

Der von PULFRICH theoretisch gezogene Schluss, dass das Verhältnis zwischen den Wellenlängen zweier Spektralinien von dem Barometerstand und der Temperatur der Luft nicht merklich abhängig ist, hat sich bis zu den höchsten in dieser Arbeit erreichten Temperaturen bestätigt. Ebenso hat sich die PULFRICH'sche Formel für die durch Temperatur- und Druckveränderungen bedingte Korrektion der Interferenzstreifenverschiebung in allen oben vorgekommenen Fällen gut bewährt (vgl. oben p. 46).

Dem nunmehr verstorbenen Geh. Hofrat Prof. A. WINKELMANN, auf dessen Vorschlag und in dessen Laboratorium die Versuche ausgeführt wurden, auf die sich die obige Untersuchung stützt, bin ich leider nicht mehr in Gelegenheit, meinen Dank abzustatten. Um so mehr spreche ihr hier Herrn Dr C. PULFRICH, durch dessen Vermittelung die Firma CARL ZEISS die meisten der von mir benutzten Apparate sowie auch die Kristallpräparate mir zur Verfügung stellte, meinen wärmsten Dank aus. Auch dem Herrn Prof. Dr R. STRAUBEL bin ich für manche wertvolle Ratschläge während der Ausführung der Versuche zu grossem Dank verbunden.

Helsingfors, im März 1916.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 6.

OM

TURMALINENS TERMISKA DILATATION

AV

KARL F. LINDMAN.

HELSINGFORS 1916,
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

I. Inledning.

1. Enligt en metod, som grundade sig på en medelst hävstänger och ljusvisare (spegel, tub och skala) alstrad förstoring av utvidgningen, erhöll PFAFF[1]) följande värden på turmalinens lineära utvidgningskoefficienter (α_1 och α_2) för en medeltemperatur av + 50° C (observationerna gjordes vid vattnets fryspunkt och kokpunkt):

$$\perp \text{ mot optiska axeln: } \alpha_1 = 7{,}732 \cdot 10^{-6},$$
$$\parallel \text{ med } \quad „ \quad „ \quad \alpha_2 = 9{,}369 \cdot 10^{-6}.$$

FIZEAU, vilken utförde sina mätningar enligt den optiska interferensmetoden, fann däremot vid undersökning av ett stycke grön brasiliansk turmalin, som vid hans försök uppvärmdes mellan de ungefärliga temperaturgränserna + 10° och + 70° C, värdena[2])

$$\alpha_1 = (3{,}06 + 0{,}0183\, t) \cdot 10^{-6} \text{ och } \alpha_2 = (7{,}77 + 0{,}0320\, t) \cdot 10^{-6}.$$

För $t = 50°$ C erhåller man enligt dessa formler $\alpha_1 = 3{,}975 \cdot 10^{-6}$ och $\alpha_2 = 9{,}370 \cdot 10^{-6}$. Medan sålunda det FIZEAU'ska värdet på α_2 för $t = 50°$ fullständigt överensstämmer med det av PFAFF erhållna, avvika de av dessa observatörer funna värdena på α_1 mycket starkt från varandra.

Kännedomen om turmalinens termiska utvidgning har en ganska stor teoretisk betydelse, i det att frågan, huruvida den hos vissa kristaller och speciellt hos turmalin alstrade s. k. pyroelektriciteten fullständigt kan återföras till piezoelektriska verkningar eller om även en „sann" pyroelektricitet existerar, blivit besvarad olika, beroende på från vilka värden på turmalinens utvidgningskoefficienter man utgått. Stödande sig på de PFAFF'ska värdena för turmalinens termiska utvidgning kommo RIECKE och VOIGT[3]) sålunda till att börja med till det resultat, att den genom en temperaturförändring alstrade elektriseringen av turmalinen —

---

[1]) F. PFAFF, Pogg. Ann., CIV, p. 171; 1858.

[2]) H. FIZEAU, l'Annuaire du Bureau des Longitudes 1877, citerad enligt JAMIN, Cours de physique, t. II, p. 80; 1878.

[3]) E. RIECKE och W. VOIGT, Wied. Ann. *45*, p. 551; 1892.

i överensstämmelse med en av RÖNTGEN ävensom av piezoelektricitetens upptäckare J. och P. CURIE förfäktad åsikt — fullständigt kunde anses härröra av den genom temperaturförändringen samtidigt alstrade deformationen av kristallen. Uppmärksamgjord på de av FIZEAU erhållna värdena för turmalinens termiska utvidgning, vilka tidigare undgått såväl honom som RIECKE, föranstaltade VOIGT[1]) en undersökning av det av honom och RIECKE i avseende å dess pyro- och piezoelektriska egenskaper förut undersökta turmalinstyckets termiska utvidgning, vilken undersökning utfördes i *Zeiss* optiska verkstad i Jena av dr PULFRICH med biträde av hr KELLNER. Enligt dessa försök, som utfördes med användning av ABBES interferensdilatometer ävensom en av REIMERDES[2]) kort förut undersökt kvartsring, vilken därvid tjänade såsom jämförelsekropp, var för en medeltemperatur $t = 41{,}0°$ $\alpha_1 = 3{,}587 \cdot 10^{-6}$ och för $t = 52{,}5°$ $\alpha_1 = 3{,}729 \cdot 10^{-6}$, varav erhölls

$$\alpha_1 = (3{,}081 + 0{,}01235\, t) \cdot 10^{-6},$$

samt för $t = 33{,}5°$ $\alpha_2 = 8{,}530 \cdot 10^{-6}$ och för $t = 50{,}5°$ $\alpha_2 = 8{,}895 \cdot 10^{-6}$, varav åter erhölls

$$\alpha_2 = (7{,}810 + 0{,}0215\, t) \cdot 10^{-6}.$$

Temperaturgränserna vid uppvärmningen voro approximativt + 10° och + 90° C.

Av dessa nya värden på α_1 och α_2 följde, såsom VOIGT påvisade, att den genom en uppvärmning alstrade elektriseringen visserligen till största delen måste återföras till en verkan av deformationen, men att dock c:a 20 procent av densamma uppträda såsom en direkt verkan av temperaturförändringen och följaktligen skulle kvarstå, ifall man genom tryck av lämplig storlek kunde förhindra den termiska deformationen. Förekomsten av „sann" pyroelektricitet hade sålunda enligt VOIGT härigenom blivit påvisad hos turmalin.

Medan de konstanta termerna i de PULFRICH-KELLNER'SKA uttrycken för α_1 och α_2 synnerligen nära överensstämma med de motsvarande termerna i de av FIZEAU funna uttrycken, förete de motsvarande temperaturkoefficienterna rätt väsentliga avvikelser. Enligt de förstnämnda formlerna är för $t = 50°$ $\alpha_1 = 3{,}699 \cdot 10^{-6}$ och $\alpha_2 = 8{,}885 \cdot 10^{-6}$, vilka värden äro icke obetydligt mindre än de enligt FIZEAU's formler beräknade ovan anförda värdena. Även om specifika olikheter hos de undersökta turmalinstyckena i någon mån kunna hava bidragit till de sistnämnda avvikelserna, kunna dessa även, såsom av det på sid. 10 o. 14 anförda skall framgå, förklaras genom den av mig påvisade omständigheten, att det av REIMERDES funna värdet för den såsom jämförelsekropp använda kvartsringens axiala utvidgningskoefficient, varav PULFRICH och KELLNER i nyssnämnda fall gjort brukt, för $t = 50°$ är c:a $0{,}25 \cdot 10^{-6}$ enheter för litet. Såsom av de tidigare anförda observationsdata framgår, äro för övrigt de medeltemperaturer, för vilka utvidgningen blivit av de sistnämnda observatörerna direkt bestämd, för nära varandra och till antalet alltför få för att tillåta en för en mera än några tiotal grader omfattande temperaturintervall giltig bestämning av de i formlerna för α_1 och α_2 ingående konstanterna (den medel-

[1]) W. VOIGT, Wied. Ann., *66*, p. 1030; 1898.

[2]) F. REIMERDES, Inaug. Dissert., Jena 1896.

temperatur av + 22,2° C, till vilken Voigt's undersökning av sambandet mellan pyro- och piezoelekriciteten hänför sig, faller sålunda redan icke oväsentligt utom de Pulfrich-Kellner'ska formlernas giltighetsområde). Även om det nyssnämda felet hos värdena på α_1 och α_2 icke kvalitativt inverkar på riktigheten av Voigt's slutsats angående förekomsten av sann pyroelektricitet hos turmalinen, är dock såväl av nyss antydda orsaker som för möjliggörande av en noggrannare kvantitativ beräkning av pyroelektriciteten, en möjligast exakt och en vidare temperaturintervall-omfattande kännedom om turmalinens termiska dilatation av nöden [1]).

2. Omedelbart efter och i sammanhang med de försök rörande kvartsens termiska dilatation, som jag med av firman *Zeiss* till mitt förfogande ställda hjälpmedel utförde i fysikaliska institutet i Jena under vintern 1898—1899 och över vilka jag först helt nyligen offentliggjort en detaljerad redogörelse [2]), utförde jag även en undersökning av turmalinens termiska utvidgning såväl parallellt med som vinkelrätt mot optiska axeln, vilken undersökning omfattade temperaturer mellan c:a + 6° och + 320° C. Den kristall, jag undersökte, utgjordes av samma av Pulfrich och Kellner tidigare undersökta turmalintärning, vilken skurits ur det ovannämnda av Riecke och Voigt i andra avseenden undersökta turmalinstycket och som av prof. Voigt (i Göttingen) beredvilligt ställdes till min disposition. Av de tvenne omsorgsfullt polerade speglande ytorna hos denna tärning var den ena orienterad $\perp$ mot och den andra $\parallel$ med den kristallografiska huvudaxeln, medan de motstående ytorna, så när som på de tre små utsprång, vilka tjänade såsom fötter, voro konkavt urholkade och svärtade. Genom mätning med Abbe's kontaktmikrometer erhöll jag för tärningens höjd värdena 9,686 mm $\perp$ mot axeln och 9,901 mm $\parallel$ med axeln, vilka värden inom felgränserna överensstämma med de av Voigt på grund av Kellners mätningar anförda värdena (resp. 9,686 och 9,900 mm). Såsom jämförelsekropp använde jag den tidigare nämnda av Reimerdes och senare av mig undersökta c:a 10,1 cm höga kvartsringen, inom vilken turmalintärningen placerades på den för båda gemensamma bottenplattan. Försöken utfördes enligt den optiska interferensmetoden med tillhjälp av Pulfrich's interferensmätningsapparat, och var försöksanordningen densamma, som jag tidigare hade använt vid undersökning av kvartsens dilatation vinkelrätt mot optiska axeln. Såväl beträffande denna försöksanordning som betydelsen av de i det följande använda beteckningarna hänvisas till min ovan citerade avhandling om kvartsens termiska dilatation. I fråga om kvartsringens utvidgning har jag självfallet gjort bruk av de genom min undersökning av densamma erhållna värdena.

---

[1]) Emedan den vid de Pulfrich-Kellner'ska försöken använda apparaten var identisk med den av Reimerdes använda, är det icke heller otänkbart, att det fel, som uppträdde vid den sistnämndes undersökning av kvartsen, i större eller mindre grad upprepats vid de förras försök med turmalinen.

[2]) Karl F. Lindman, Acta Soc. Scient. Fenn. XLVI, N:o 5; 1916.

II. Undersökning av dilatationen i en mot optiska axeln vinkelrät riktning.

3. De hithörande försöken omfattade tvenne av varandra oberoende dubbla (av uppvärmnings- resp. avsvalningsförsök sammansatta) serier.

Försöksserie I.

t	h mm	δ_{H_α}	δ_{H_β}	δ_0	δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_β}	Medeltal δ_0
9,7°	741,3	+ 0,193	+ 0,198	+ 0,298 + 0,286	− 0,463	− 0,478	+ 0,199	+ 0,197	+ 0,292	− 0,417
180,7°	741,9	− 0,450	− 0,454	− 0,232 − 0,245	− 0,438	− 0,437	− 0,466	− 0,457	− 0,239	− 0,437
326,8°	742,5	+ 0,337	+ 0,332	+ 0,302 + 0,294	+ 0,006	+ 0,006	+ 0,341	+ 0,337	+ 0,298	+ 0,006
184,0°	742,9	+ 0,470	+ 0,470	− 0,330 − 0,331	+ 0,485	+ 0,478	+ 0,468	+ 0,469	− 0,331	+ 0,482
10,6°	741,0	− 0,007	− 0,007	− 0,233 − 0,233	+ 0,324	+ 0,321	− 0,005	− 0,006	− 0,233	+ 0,323

Medan uppvärmningen pågick, iakttogs, att interferensstrimmorna hela tiden förkötos i riktning mot den såsom interferensskikt tjänande luftkilens kant, vilket innebär, att kvartsringens höjdtillväxt var större än turmalintärningens, då dennas höjddimension var vinkelrät mot kristallografiska huvudaxeln.

För uppvärmningen från $t_1 = 9{,}7°$ till $t_2 = 180{,}7°$ har man enligt formeln $\varrho = (\delta_{t_2} - \delta_{t_1}) - (\delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}})\,\mu$, då $\mu_{H_\alpha} = 0{,}83207$ och $\mu_{H_\beta} = 0{,}83200$:

$$\varrho_{H_\alpha} = -0{,}682, \therefore \varrho_{H_\alpha} + 1 = 0{,}318;$$

$$\varrho_{H_\beta} = -0{,}569, \therefore \varrho_{H_\beta} + 1 = 0{,}431.$$

Genom direkt observation av de genom synfältet vandrande strimmornas antal kunde man sluta till att m_0 i detta fall var någon eller några enheter större än 26. Det exakta värdet erhålles ur följande tabell.

Tabell för $m_0 \cdot \mu = m + (\delta_{t_2} - \delta_{t_1}) - (\delta_{0_{t_2}} - \delta_{0_{t_1}})\,\mu = m + \varrho$.

Hg grön	H_α		H_β	
m_0	m	ϱ	m	ϱ
26	21	0,63	29	0,20
27	22	0,46	30	0,33
28	*23*	*0,30*	*31*	*0,45*
29	24	0,13	32	0,58
30	24	0,96	33	0,70

Man erhåller härav:

$$m_0 = 28, \quad m_{H_\alpha} = 23 + 1 = 24, \quad m_{H_\beta} = 31 + 1 = 32,$$

på grund varav fås:

$$f_0 = \left\{ \begin{matrix} 28 + 0{,}032 \\ (24 - 0{,}654) : \mu_{H_\alpha} \\ (32 - 0{,}531) : \mu_{H_\beta} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 28{,}034 \\ 28{,}058 \\ 28{,}022 \end{matrix} \right\} = 28{,}038.$$

För korrektionstermen k_0' erhålles värdet + 0,159. Om vi beteckna ökningen av luftskiktets tjocklek med Δd [1]), få vi således

$$\Delta d = (f_0 + k_0') \cdot \frac{\lambda_0}{2} = 28{,}197 \cdot \frac{\lambda_0}{2} = 0{,}0076978 \text{ mm}.$$

För kvartsringens höjdtillväxt ΔE [2]) fås värdet 0,0152934 mm. Turmalintärningens höjdtillväxt blir sålunda:

$$\Delta L = \Delta E - \Delta d = 0{,}0075956 \text{ mm}.$$

Resultaten av de räkningar, som på detta sätt utförts för de skilda till försöksserien I hörande temperaturintervallerna, äro sammanställda i den närmast följande tabellen. För de intervaller, som hänföra sig till avsvalningsprocessen, äro slutvärdena icke uträknade på grund av att en stark termisk efterverkan gjorde sig gällande vid sluttemperaturen 10,6° [3]).

Temperatur-intervall	ϱ_{H_α}	ϱ_{H_β}	m_0	m_{H_α}	m_{H_β}	f_0 (medelvärde)	k_0'	Δd mm	ΔE mm	ΔL mm
9,7° till 180,7°	− 0,682	− 0,569	28	24	32	28,038	+ 0,159	0,0076978	0,0152934	0,0075956
„ „ 326,8°	− 0,257	− 0,530	61	51	69	61,462	+ 0,223	0,0168423	0,0328815	0,0160392
326,8° „ 10,6°	+ 0,607	+ 0,887	56	46	62	55,687	—	—	—	—
184,0° „ „	+ 0,343	− 0,277	22	18	25	22,179	—	—	—	—

Dessa observationsdata tillåta att uttrycka sambandet mellan L och t samt α och t genom en kvadratisk resp. en lineär interpolationsformel av följande form:

---

[1]) I förf:s ovan citerade arbete beteknar $\triangle d$ *minskningen* av luftskiktets tjocklek. Oberoende av om det i verkligheten är fråga om uppvärmning eller avsvalning, räkna vi kvantiteterna $\triangle d$, $\triangle E$ och $\triangle L$ såsom positiva, om de med dem beteknade längdtillväxterna inom den betraktade temperaturintervallen vid *stigande temperatur* äro positiva.

[2]) Jmf. förf:s i föregående not åberopade arbete, p. 74.

[3]) Under avsvalningen från 326,8° till 184° var, såsom av värdena på f_0 framgår, strimförskjutningen = c:a 32,5 strimbredder, vilket närmelsevis överensstämmer med den under uppvärmningen från 180,7° till 326,8° iakttagna förskjutningen (f_0 = c:a 33,4). För hela avsvalningen från 326,8° till 10,6° har däremot erhållits ett c:a 6 enheter mindre värde på f_0 än det för uppvärmningen från 9,7° till 326,8° funna värdet. Apparaten hade tydligen icke fått stå tillräckligt länge ouppvärmd, innan de vid sluttemperaturen (10,6°) gjorda avläsningarna verkställdes.

$$L = L_0(1 + at + bt^2),$$
$$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dt} = a + 2bt.$$

Man erhåller då såsom resultat av försöksserien I:

t_1	t_2	t_3	L_0 mm	$L_2 - L_1$ mm	$L_3 - L_1$ mm	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$
9,7°	180,7°	326,8°	9,686	0,0075956	0,0158553	3,757	0,004355

Försöksserie II.

t	h mm	δ_{H_α}		δ_{H_β}		δ_0		δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_β}	Medeltal δ_0
10,6°	741,0	−0,461	−0,456	−0,006	−0,002	+0,521	+0,523	−0,463	−0,460	−0,004	+0,522
112,1°	740,1	+0,056	+0,050	+0,298	+0,290	−0,178	−0,173	+0,059	+0,055	+0,294	−0,176
224,7°	738,1	−0,337	−0,343	+0,344	+0,350	+0,134	+0,131	−0,325	−0,335	+0,347	+0,133
100,8°	739,0	+0,365	+0,365	0,000	−0,003	−0,234	−0,234	+0,365	+0,365	−0,002	−0,234
9,1°	741,1	+0,431	+0,431	−0,116	−0,115	+0,413	+0,417	+0,429	+0,430	−0,116	+0,415

Temperaturintervall	ϱ_{H_α}	ϱ_{H_β}	m_0	m_{H_α}	m_{H_β}	f_0 (medelvärde)	k_0'	Δd mm	ΔE mm	ΔL mm
10,6° till 112,1°	+1,096	+1,082	17	13	18	16,280	+0,110	0,0044751	0,0084394	0,0039643
„ „ 224,7°	+0,449	+0,788	39	32	43	38,608	+0,180	0,0105906	0,0200531	0,0094625
224,7° „ 9,1°	−0,530	+0,780	39	33	43	38,721	+0,183	0,0106236	0,0201636	0,0095400
100,8° „ „	+0,482	+0,841	15	12	16	14,348	+0,103	0,0039457	0,0075150	0,0035693

	t_1	t_2	t_3	L_0 mm	$L_2 - L_1$ mm	$L_3 - L_1$ mm	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$
1:o uppvärmn.	10,6°	112,1°	224,7°	9,686	0,0039643	0,0094625	3,454	0,004712
2:o avsvaln.	9,1°	100,8°	„	„	0,0035693	0,0095400	3,539	0,004402

De genom avsvalningsförsöken erhållna värdena på a och b skilja sig, som man finner, icke synnerligen mycket från de genom uppvärmningsförsöken funna motsvarande värdena. Den termiska efterverkan kunde i själva verket vid försöksseriens slut icke hava varit särskilt stor, emedan apparaten under flere dagar varit överlämnad åt sig själv, innan de sista avläsningarna (vid sluttemperaturen 9,1°) gjordes. De nu erhållna värdena på a äro däremot båda något mindre och de på b något större än de motsvarande av försöksserien I härledda värdena, vilket tyder på att turmalinens dilation vid den högsta till försöksserien I hörande temperaturen (c:a + 327°) icke mera följer strängt samma lag som vid den något lägre temperatur (c:a 225°), som bildade den övre gränsen för försöksserierna II. Olikheterna mellan de i skilda fall erhållna värdena på a och b kompensera emellertid till en viss grad varandra, i det att ett större värde på a städse motsvaras av ett mindre värde på b och tvärtom. De aritmetiska medelvärdena för dessa konstanter äro följande:

$$a = 3{,}583 \cdot 10^{-6}\ ;\ b = 0{,}004490 \cdot 10^{-6}.$$

De av försöksserierna I och II samt de sistnämnda medelvärdena för ett antal olika temperaturer beräknade dilatationskoefficienterna (α) äro sammanställda i följande tabell.

$\alpha \cdot 10^{6}$.

Försöksserie	20°	50°	100°	200°	300°
I	3,931	4,193	4,628	5,499	6,370
II, 1:o	3,642	3,925	4,396	5,339	—
II, 2:o	3,715	3,979	4,419	5,300	—
Medeltal. . . .	3,763	4,032	4,481	5,379	—
Sannolikt fel .	± 0,058	± 0,055	± 0,050	± 0,040	
⁀	(= 1,5 %)	(= 1,4 %)	(= 1,1 %)	(= 0,7 %)	
Värden, erh. av medelv. a och b	3,763	4,032	4,481	5,379	6,277

Såsom härav framgår och man på grund av det nyss sagda även kunnat vänta sig, avtaga såväl de sannolika felen som differenserna mellan de av serierna I och II beräknade värdena på α med stigande temperatur. Det av medelvärdena på a och b erhållna värdet på α för $t = 300°$ överensstämmer även inom försöksfelens gränser med det av försöksserien I erhållna värdet (avvikelsen utgör c:a 1,5 %, medan medelavvikelsen för t. ex. $t = 20°$ utgör i det närmaste 3 %). Inom försökens noggrannhetsgränser synes det sålunda berättigat att framställa dilatationens förlopp inom hela temperaturintervallen från + 9° till + 327° genom formlerna

I) $$L = L_0 (1 + 3{,}583 \cdot 10^{-6}\, t + 0{,}004490 \cdot 10^{-6}\, t^2),$$

I, a) $$\alpha = (3{,}583 + 0{,}008980\, t) \cdot 10^{-6}.$$

En ökning av noggrannheten skulle sannolikt leda till en kubisk formel för sambandet mellan L och t.

4. För $t = 50°$ är överensstämmelsen mellan det FIZEAU'ska värdet $\alpha_1 = 3{,}975 \cdot 10^{-6}$ och det ovan erhållna medelvärdet $4{,}032 \cdot 10^{-6}$ t. o. m. mycket god (med det av serien II, 2:o beräknade värdet $3{,}979 \cdot 10^{-6}$ överensstämmer FIZEAU's värde så gott som fullständigt). För att närmare undersöka, i vad mån avvikelsen från det PULFRICH-KELLNER'ska värdet $\alpha_{50°} = 3{,}699 \cdot 10^{-6}$ (se ovan, sid. 4) beror av felet hos det till grund för detsamma lagda REIMERDES'ska värdet för kvartsringens axiala dilatation, observera vi, att så länge α är en lineär funktion av t, α kan beräknas enligt formeln [1]):

$$\alpha = \frac{E_0}{L_0}\beta - \frac{\left(f_0 + k_0'\right)\frac{\lambda_0}{2}}{L_0\,(t_2 - t_1)},$$

i vilken β betecknar jämförelsekroppens (kvartsens) utvidgningskoefficient för medeltemperaturen $^1/_2\,(t_1 + t_2)$ och α jämväl hänför sig till samma medeltemperatur [2]). För $t = 50°$ är enligt REIMERDES $\beta = 7{,}770 \cdot 10^{-6}$ och enligt mina försök med samma kvartsring $\beta = 8{,}030 \cdot 10^{-6}$ [3]). För $E_0 = 10{,}098$ mm (= det med ABBE's kontaktmikrometer erhållna värdet) och $L_0 = 9{,}686$ mm ger det förra värdet på β för den första termen i uttrycket för α värdet $8{,}101 \cdot 10^{-6}$, medan det senare värdet på β för samma term giver värdet $8{,}372 \cdot 10^{-6}$. Emedan den senare termen i uttrycket för α är oberoende av värdet på β, bör man alltså vid en reducering av det PULFRICH-KELLNER'ska värdet till den av mig utförda bestämningen av jämförelsekroppens utvidgning addera differensen mellan de nyss erhållna värdena på β eller $0{,}271 \cdot 10^{-6}$ till det PULFRICH-KELLNERS'ska värdet på $\alpha_{50°}$, då detta övergår i $3{,}970 \cdot 10^{-6}$, vilket tal åter så gott som fullständigt överensstämmer med såväl det FIZEAU'ska vårdet som ett av de ovan erhållna värdena. KELLNER's mätningar, som endast hänförde sig till temperaturer i närheten av 50°, hava sålunda, försåvitt det gäller dilationen $\perp$ mot optiska axeln för $t = +\ 50°$ C, bekräftats genom mina försök.

---

[1]) Se t. ex. C. PULFRICH, Zeitschr. f. Instrum. XIII, p. 367; 1893.

[2]) Formeln förutsätter, att såväl det undersökta objektets som jämförelsekroppens sanna utvidgningskoefficient för medeltemperaturen överensstämmer med motsvarande medelutvidgningskoefficient för den betraktade temperaturintervallen (t_1 till t_2), vilket dock är fallet, endast så länge de sanna utvidgningskoefficienterna äro lineära funktioner av temperaturen. För den såsom standardkropp använda kvartsen äger detta icke mera rum t. ex. inom den till försöksserien I hörande intervallen 180,7°–326,8°. Med användning av kvartsens sanna utvidgningskoefficient för medeltemperaturen 253,8° och det för den ifrågavarande temperaturintervallen beräknade värdet på $f_0 + k_0'$ (= 33,488), erhåller man $\alpha_{253,8°} = 5{,}943 \cdot 10^{-6}$, medan de av försöksserien I på ovan angivet sätt härledda konstanterna a och b för samma kvantitet giva värdet $5{,}968 \cdot 10^{-6}$. För medeltemperaturen 95,2° inom temperaturintervallen 9,7°–180,7° erhåller man däremot på de båda nyssnämnda sätten värden på α, vilka så gott som fullständigt överensstämma med varandra, nämligen resp. $4{,}589 \cdot 10^{-6}$ och $4{,}586 \cdot 10^{-6}$. De båda enligt den ovanstående formeln härledda värdena på α giva, kombinerade med varandra, $a = 3{,}776 \cdot 10^{-6}$ och $b = 0{,}004269 \cdot 10^{-6}$.

[3]) Jmf. t. ex. sammanfattningen i förf:s ovan ofta åberopade arbete.

För utvidgningen *per meter* från 0° till resp. 100°, 200° och 300° C erhåller man enligt den för L uppställda formeln värdena

0,403 mm, 0,896 mm och 1,479 mm.

5. För att grafiskt kunna framställa observationerna rörande turmalintärningens utvidgning ⊥ mot axeln har jag med användning av de erhållna värdena på a och b samt $L_0 = 9{,}686$ mm beräknat värdet på L_3 för vardera försöksserien, varefter värdena på L_1 och L_2 omedelbart erhållits med kännedom om de observerade värdena på $L_3 - L_1$ och $L_2 - L_1$. Emedan L_3 måste vara lika i de båda till serien II hörande fallen, har L_3 för dessa båda fall beräknats med användning av medeltalen av de motsvarande värdena på a och b. Resultatet av dessa beräkningar är följande:

	t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm
I	9,7°	9686542	II, 1:o	10,6°	9686376	II, 2:o	224,7°	9695839
	180,7°	9694138		112,1°	9690340		100,8°	9689868
	326,8°	9702397		224,7°	9695839		9,1°	9686299

Sambandet mellan L och t framställes grafiskt i fig. 1, varest de till uppvärmningsserierna (I och II, 1:o) hörande punkterna betecknade märket ° och de till avsvalningsserien (II, 2:o) hörande med ⊗ samt försöksseriens ordningsnummer angivets genom romerska siffror.

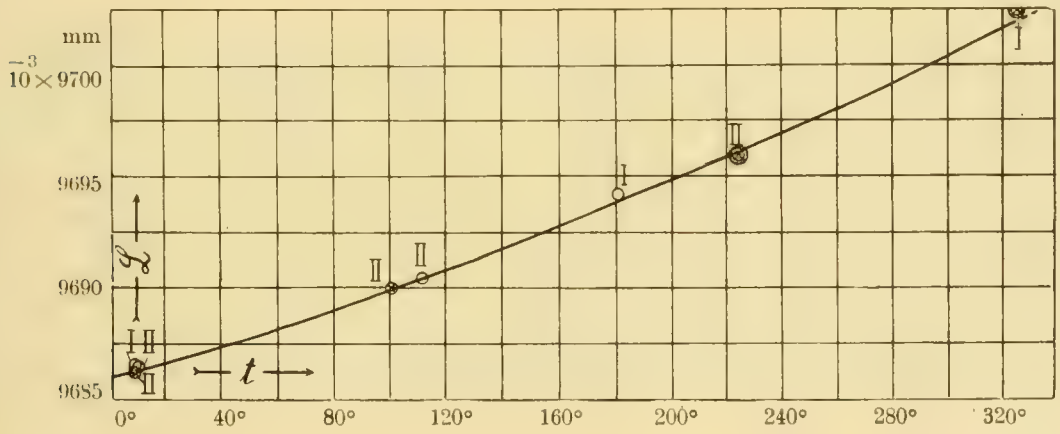


Fig. 1.

Den i figuren uppdragna kurvan representerar formeln I för $L_0 = 9{,}686$ mm. Kurvans förlopp utgör en bekräftelse av den redan tidigare dragna slutsatsen, att sambandet mellan L och t inom försökens noggrannhetsgränser analytiskt kan framställas genom sistnämnda formel. Formeln I, a framställes grafiskt genom den räta linjen I i fig. 3 (sid. 16).

III. Undersökning av dilatationen i optiska axelns riktning.

6. Då turmalintärningen var placerad inom kvartsringen så, att optiska axeln var parallell med dess höjddimension, iakttogs vid uppvärmning från rumtemperatur till 140 à 160° att interferensstrimmorna först ganska länge förskötos i riktning mot luftkilens kant, varefter en kontinuerlig förskjutning i motsatt riktning inträdde. Denna iakttagelse, som var analog med den, som tidigare gjorts vid försöken angående kvartsens utvidgning $\perp$ mot axeln, utvisade, att vid inträdd temperaturjämvikt turmalintärningens höjdtillväxt var något större än kvartsringens, vilket innebär, att interferensskiktets tjocklek avtagit eller att talen m och m_0 i detta fall hava negativt förtecken. Vid ytterligare uppvärmning till c:a 320° förskötos strimmorna oavbrutet i riktning mot luftkilens kant, utan att någon omkastning av deras vandringsriktning kunde observeras, d. v. s. luftskiktets tjocklek ökades inom ifrågavarande temperaturintervall, eller de mot denna svarande talen m och m_0 hava positivt förtecken. Huruvida de mot den totala temperaturstegningen — från rumtemperatur till den högsta uppnådda temperaturen — svarande värdena på dessa kvantiteter äro positiva eller negativa, kan, såsom räkningarna utvisat, utan någon osäkerhet avgöras genom jämförelse av de experimentellt funna värdena på ϱ_{H_α} och ϱ_{H_β} med motsvarande värden i den såväl positiva som negativa hela tal innehållande tabell, som man uppställer för m_0 och m. Resultaten av de hithörande tvenne dubbla serier[1]) omfattande försöken framgå av det följande.

t	h mm	δ_{H_α}		δ_{H_β}		δ_0		δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_α}	Medeltal δ_{H_β}	Medeltal δ_0
9,1°	752,9	−0,150	−0,155	−0,391	−0,388	+0,102	+0,109	−0,152	−0,152	−0,390	+0,106
141,2°	752,4	+0,299	+0,292	−0,139	−0,142	−0,117	−0,116	+0,300	+0,297	−0,141	−0,117
314,2°	753,0	−0,130	−0,134	+0,299	+0,308	−0,037	−0,041	−0,125	−0,130	+0,304	−0,039
139,3°	750,0	−0,462	−0,460	+0,163	+0,164	+0,169	+0,164	−0,453	−0,458	+0,164	+0,167
6,1°	750,2	−0,169	−0,163	−0,372	−0,371	+0,112	−0,113	−0,173	−0,168	−0,372	+0,113
138,7°	748,8	−0,338	−0,347	+0,289	+0,301	+0,257	+0,257	−0,357	−0,347	+0,295	+0,257
319,3°	749,7	−0,204	−0,209	+0,207	+0,207	−0,146	−0,150	−0,203	−0,205	+0,207	−0,148
158,0°	747,7	+0,305	+0,296	−0,168	−0,168	−0,130	−0,137	+0,297	+0,299	−0,168	−0,134
12,6°	747,8	−0,391	−0,393	+0,286	+0,285	−0,172	−0,171	−0,399	−0,394	+0,286	−0,172

[1]) Något isärtagande och ånyo inställande av interferensapparaten förekom dock icke mellan dessa försöksserier, vilket däremot var fallet vid undersökningen av dilationen $\perp$ mot axeln.

Temperatur-intervall	ϱ_{H_α}	ϱ_{H_β}	m_0	m_{H_α}	m_{H_β}	f_0 (medelvärde)	k_0'	Δd mm	ΔE mm	ΔL mm
9,1° till 141,2°	+ 0,635	+ 0,499	− 4	− 4	− 5	− 4,241	+ 0,065	− 0,0011402	0,0113243	0,0124645
„ „ 314,2°	+ 0,143	+ 0,857	− 1	− 1	− 2	− 1,161	+ 0,106	− 0,0002881	0,0312380	0,0315261
314,2° „ 6,1°	+ 0,164	+ 0,847	− 1	− 1	− 2	− 1,162	+ 0,108	− 0,0002878	0,0314580	0,0317458
139,3° „ „	− 0,335	+ 0,475	− 4	− 3	− 5	− 3,958	+ 0,067	− 0,0010624	0,0113579	0,0124203
6,1° „ 138,7°	− 0,299	+ 0,505	− 4	− 3	− 5	− 3,845	+ 0,066	− 0,0010318	0,0112993	0,0123311
„ „ 319,3°	+ 0,180	+ 0,872	− 1	− 1	− 2	− 1,257	+ 0,109	− 0,0003134	0,0321371	0,0324505
319,3° „ 12,6°	+ 0,169	− 0,106	− 1	− 1	− 1	− 0,971	+ 0,104	− 0,0002367	0,0316583	0,0318950
158,0° „ „	+ 0,661	− 0,497	− 4	− 4	− 4	− 3,967	+ 0,068	− 0,0010646	0,0127397	0,0138043

	t_1	t_2	t_3	L_0 mm	$L_2 - L_1$ mm	$L_3 - L_1$ mm	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^6$
I, 1:o. Uppv.	9,1°	141,2°	314,2°	9,901	0,0124645	0,0315261	8,743	0,005239
I, 2:o. Avsvaln.	6,1°	139,3°	„	„	0,0124203	0,0317458	8,596	0,005655
II, 1:o. Uppv.	„	138,7°	319,3°	„	0,0123311	0,0324505	8,533	0,005936
II, 2:o. Avsvaln.	12,6°	158,0°	„	„	0,0138043	0,0318950	8,622	0,005669
						Medeltal	*8,624*	***0,005625***

För turmalinens utvidgning i kristallografiska hufvudaxelns riktning erhålla vi sålunda formlerna:

II) $$L = L_0 (1 + 8{,}624 \cdot 10^{-6} t + 0{,}005625 \cdot 10^{-6} t^2),$$

II, a) $$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dt} = (8{,}624 + 0{,}011250\, t) \cdot 10^{-6}.$$

7. Medelst de av de skilda försöksserierna erhållna värdena på a och b samt dessas medelvärden (formeln II, a) fås de i följande tabell anförda värdena på α.

$\alpha \cdot 10^6$.

Försöksserie	20°	50°	100°	200°	300°
I, 1:o	8,953	9,267	9,791	10,839	11,886
I, 2:o	8,822	9,162	9,727	10,858	11,989
II, 1:o	8,770	9,127	9,720	10,907	12,095
II, 2:o	8,849	9,189	9,756	10,890	12,023
Medeltal . . .	8,849	9,186	9,749	10,874	11,998
Sannolikt fel .	± 0,025 (= 0,3 %)	± 0,020 (= 0,2 %)	± 0,011 (= 0,1 %)	± 0,010 (= 0,1 %)	± 0,029 (= 0,2 %)
Värden, erh. enl. formeln II, a) .	8,849	9,187	9,749	10,874	11,999

De enskilda medelvärdenas sannolika fel äro här, såsom av tabellen framgår, väsentligt mindre än de vid undersökningen av dilatationen ⊥ mot axeln tidigare funna (jmf. ovan sid. 9), vilket åtminstone delvis torde bero därpå, att temperaturintervallerna vid de skilda försöksserierna här betydligt mera överensstämde med varanda, än vad fallet var vid den förra undersökningen. Någon inverkan av ett inom skilda temperaturintervaller eventuellt förekommande olika förlopp av dilatationen kan därför knappast framträda i de här erhållna avvikelserna, vilka därför i huvudsak måste tillskrivas försöksfel resp. onoggrannhet i försöksanordningen.

Av de av de tidigare nämnda andra observatörerna för $t = 50°$ erhållna värdena på koefficienten för utvidgningen || med axeln överensstämmer åter det PULFRICH-KELLNER'ska värdet $\alpha_2 = 8{,}885 \cdot 10^{-6}$ närmast med det ovan erhållna 9,186, såvida man till det förra adderar den av felet hos kvartsringens utvidgningskoefficient (se ovan, p. 4) betingade korrektionstermen, för vilken man i detta fall finner värdet $+ 0{,}265 \cdot 10^{-6}$. Det nyssnämnda PULFRICH-KELLNER'ska värdet övergår då i $\alpha_2 = 9{,}150 \cdot 10^{-6}$, vilket t. o. m. mycket nära överensstämmer med det av mig erhållna medelvärdet. Det av såväl PFAFF som FIZEAU för $t = 50°$ funna värdet $\alpha_2 = 9{,}37 \cdot 10^{-6}$ avviker icke heller mycket från det sistnämnda värdet men faller dock något utom felgränserna för det sistnämnda.

Såsom i inledningen nämnts, hänföra sig PFAFF's värden på turmalinens utvidgningskoefficienter till temperaturen + 50° C och de av FIZEAU samt PULFRICH och KELLNER uppställda formlerna likaså endast till trångt begränsade temperaturområden i omgivningen av denna temperatur. Till frågan om den sanna pyroelektricitetens förekomst hos turmalin — det enda ämne, hos vilket man hittills trott sig hava konstaterat en sådan — ävensom dess procenttal, vilket synes erfordra en ganska väsentlig reducering, skall jag återkomma i en senare uppsats.

Differenserna mellan de av mig och av andra observatörer funna värdena på konstanterna a och b (för dilatationen såväl $\perp$ mot som $\parallel$ med axeln) betingas utan tvivel till en del av det mycket olika omfånget av de temperaturområden, för vilka de ifrågavarande värdena blivit uppställda. Vad speciellt Fizeau's dilatationsbestämningar vidkommer, gör Ch.-Éd. Guillaume i Recueil de const. phys., p. 181 (1913) den anmärkningen, att de av Fizeau angivna värdena på a i allmänhet torde vara något för små och de på b något för stora[1]), varvid de med tillhjälp av Fizeau's konstanter beräknade värdena på utvidningskoefficienterna äro tillförlitligast för temperaturer av c:a 40°. I fråga om turmalinen bekräftas detta omdöme av jämförelsen mellan Fizeau's och de av mig erhållna värdena. Såsom i inledningen (p. 4) antytts, grunda sig de Pulfrich-Kellner'ska värdena på a och b på ett så pass inskränkt observationsmaterial (alltför få och nära varandra belägna medeltemperaturer), att redan ganska små fel hos de medelutvidgningskoefficienter, som lagts till grund för beräkningen av dessa konstanter, kunna i väsentlig grad inverka på resultatet av denna beräkning.

8. I följande tabell äro de värden på L för olika temperaturer sammanställda, som på det på sid. 11 angivna sättet erhållits med användning av värdet $L_0 = 9{,}901$ mm samt de medelvärden för a och b, som fås av de båda försöksserierna I och II särskilt.

	t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm		t	$L \times 10^6$ mm
I, 1:o	9,1°	9901768	I, 2:o	314,2°	9933294	II, 1:o	6,1°	9901524	II, 2:o	319,3°	9933974
	141,2°	9914232		139,3°	9913969		138,7°	9913855		158,0°	9915883
	314,2°	9933294		6,1°	9901548		319,3°	9933974		12,6°	9902079

Med tillämpning av det i fig. 1 använda beteckningssättet framställes sambandet mellan värdena på L och t grafiskt genom de i fig. 2 angivna punkterna. Den i samma figur uppdragna kurvan, som representerar formeln II, a för $L_0 = 9{,}901$ mm, ansluter sig, såsom av figuren framgår, synnerligen noggrant till de nyssnämda punkterna. — Formeln II a framställes grafiskt genom den räta linjen II i fig. 3, vilken, som man finnar, förlöper närmelsevis parallellt med den tidigare bestämda kurvan I (formeln I, *a*) i samma figur.

För utvidgningen *per meter* i huvudaxelns riktning från 0° till resp. 100°, 200° och 300° erhåller man enligt formeln II) värdena 0,919 mm, 1,950 mm och 3,093 mm.

9. Betecknas *volymen* av ett turmalinstycke vid 0° med V_0 och vid t^0 med V samt volymutvidgningskoefficienten med γ, erhåller man genom kombination av formlerna I och II följande för turmalinens volymutvidgning gällande formler:

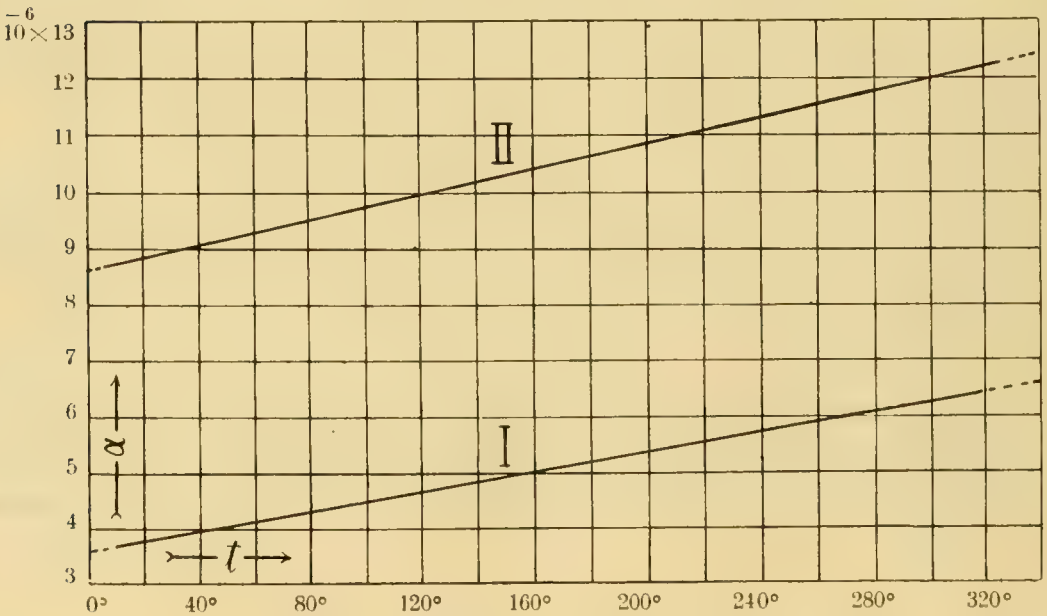
[1]) Fizeau's värden (och speciellt de för b) avvika i själva verket stundom rätt mycket från andra, senare observatörers. Så t. ex. erhåll Fizeau för kalkspatens kontraktion $\perp$ mot axeln $a = -5{,}75 \cdot 10^{-6}$ och $b = 0{,}00415 \cdot 10^{-6}$, medan Benoît senare funnit $a = -5{,}58 \cdot 10^{-6}$ och $b = 0{,}00138 \cdot 10^{-6}$ (enl. Recueil de const. de phys. p. 185; 1913).

III) $$V = V_0 (1 + 15{,}790 \cdot 10^{-6} t + 0{,}014605 \cdot 10^{-6} t^2),$$

III, a) $$\gamma = (15{,}790 + 0{,}02921\, t) \cdot 10^{-6}$$

För utvidgningen *per cm*³ från 0° till resp. 100°, 200° och 300° fås enligt formeln III värdena 1,725 mm³, 3,742 mm³ och 6,051 mm³.

Fig. 2.



Kurvan I: ⊥ mot axeln; kurvan II: || med axeln.

Fig. 3.

IV. Zusammenfassung.

Wegen der vielen interessanten Eigenschaften des Turmalins es ist wichtig, die physikalischen Konstanten dieses Kristalles möglichst genau zu kennen. Was speziell die thermische Ausdehnung des Turmalins betrifft, ist sie bisher nur innerhalb eines ziemlich beschränkten Temperaturbereiches in der Umgebung von + 50° C untersucht worden, wobei verschiedene Beobachter besonders für die Ausdehnung ⊥ zur kristallographischen Hauptaxe von einander sehr abweichende Werte bekommen haben.

Mit der thermischen Ausdehnung hängt die Pyroelektrizität des Turmalins insofern zusammen, dass die zuletzt genannte Eigenschaft sich wenigstens zum grössten Teil auf die durch die Erwärmung erzeugte Deformation des Kristalles zurückführen lässt, wobei die Frage, ob es überhaupt eine „wahre" Pyroelektrizität gibt, verschieden beantwortet worden ist je nach den Werten der thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Turmalins, welche man der Rechnung zu Grunde gelegt hat. Durch Vergleichung der piezo- und der pyroelektrischen Erregung eines brasilianischen Turmalins, dessen thermische Ausdehnung (bei etwa + 50° C) die Herren Pulfrich und Kellner in Jena zu diesem Zweck speziell untersucht hatten, ist Prof. W. Voigt bekanntlich zu dem Schluss gekommen, dass etwa 20 Proz. der beim Turmalin durch Erwärmung erregten Elektrizität wahre Pyroelektrizität sind, während die übrigen 80 Proz. sich auf Piezoelektrizität zurückführen lassen. Bei der Ausrechnung der aus den Kellner'schen Beobachtungen folgenden Werte der Ausdehnungskoeffizienten des Turmalins hat sich Pulfrich der Reimerdes'schen Werte der Ausdehnungskoeffizienten des als Vergleichskörper benutzten Quarzringes bedient, welch' letztere Werte jedoch, wie ich in einer in diesen „Acta" kürzlich erschienen Abhandlung über die thermische Dilatation des Quarzes und zwar durch Versuche mit dem vom Reimerdes untersuchten Quarzring nachgewiesen habe, etwas zu klein sind. Die Pulfrich-Kellner'schen Werte der Ausdehnungskoeffizienten des Turmalins müssen dementsprechend auch etwas zu klein sein, woraus wieder folgt, dass der von Voigt angegebene prozentuelle Betrag der wahren Pyroelektrizität bei diesem Kristalle etwas zu gross ist.

In der obigen Arbeit wird über die Ergebnisse einer nach der optischen Interferenzmethode ausgeführten Untersuchung der thermischen Ausdehnung des von Pulfrich und Kellner früher untersuchten Turmalinwürfels berichtet, welche ich im Zusammenhang mit meiner soeben erwähnten Untersuchung über die Ausdehnung des Quarzes in Winter 1898—1899 im physikalischen Institut der Universität Jena mit Unterstützung der optischen Werkstätte Carl Zeiss ausführte. Die Versuche, welche sich auf die Ausdehnung des Turmalins sowohl ∥ als ⊥ zur kristallographischen Hauptaxe beziehen, umfassen Temperaturen von etwa + 6° bis + 320° C.

Innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler lassen sich die Ergebnisse durch Dilatationsformeln der gewöhnlichen Form mit zwei Konstanten a und b (siehe oben, p. 8) darstellen. Die vom Verf. und von anderen Beobachtern erhaltenen Werte dieser Konstanten und der für einige spezielle Temperaturen berechneten Ausdehnungskoeffizienten (α) sowie auch einiger anderen für die Ausdehnung charaktäristischen Grössen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Ausdehnung des Turmalins durch die Wärme.

Beobachter.	Richtung im Verh. z. Axe.	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^0$	$\alpha \cdot 10^6$					Ausd. pro Meter in mm.		
				20°	50°	100°	200°	300°	0°—100°	0°—200°	0°—300°
PFAFF	⊥	—	—	—	7,732	—	—	—	0,773	—	—
	∥	—	—	—	9,369	—	—	—	0,937	—	—
FIZEAU	⊥	3,07	0,00925	3,426	3,975	—	—	—	0,400	—	—
	∥	7,77	0,0160	8,410	9,370	—	—	—	0,937	—	—
PULFRICH u. KELLNER	⊥	3,081	0,006175	(3,328)	3,699	—	—	—	0,370	—	—
	∥	7,810	0,01075	(8,240)	8,885	—	—	—	0,889	—	—
LINDMAN	⊥	3,583	0,004490	3,763	4,032	4,481	5,379	6,277	0,403	0,896	1,479
	∥	8,624	0,005625	8,849	9,187	9,749	10,874	11,999	0,919	1,950	3,093

Die Differenzen zwischen den von mir und den von anderen Beobachtern gefundenen Werten der Konstanten a und b sind zum Teil durch den sehr verschiedenen Umfang der Temperaturbereiche, für welche diese Werte abgeleitet worden sind, bedingt. Für $t = 50°$ stimmen die von mir erhaltenen Werte von α und besonders der für die Ausdehnung ⊥ zur Axe gefundene Wert mit den entsprechenden FIZEAU'schen Werten recht gut überein [1]). Auch mit den diesbezüglichen PULFRICH-KELLNER'schen Werten wird die Übereinstimmung sehr gut und — insoweit es sich um die Ausdehnung ∥ z. handelt — sogar noch erheblich besser als die mit den genannten FIZEAU'schen Werten, falls man jene mit Bezug auf den oben erwähnten Fehler der Ausdehnungskoefficienten des als Vergleichskörper benutzten Quarzringes korrigiert (siehe oben, p. 10 u. 14). Auf die Frage vom dem prozentuellen Betrag der wahren Pyroelektrizität bei Turmalin werde ich in einem späteren Aufsatze zurückkommen [2]).

[1]) In Betreff der FIZEAU'schen Messungen sagt CH.-ÉD. GUILLAUME in Recueil de const. phys., p. 181 (1913), dass die von FIZEAU angegebenen Werte von a im allgemeinen etwas zu klein und die von b etwas zu gross sein dürften und dass die mit Hilfe dieser Konstanten berechneten Werte der Ausdehnungskoeffizienten am zuverlässigsten für eine Temperatur von etwa 40° seien.

[2]) *Bemerkung bei der Korrektur.* Der betreffende Aufsatz („Om sambandet mellan pyro- och piezoelektriciteten hos turmalin") befindet sich schon im Druck und wird demnächst in „Öfvers. af Finska vet. soc:s förh." erscheinen. Unter Benutzung der vom Verf. erhaltenen Werte der thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Turmalins ergibt sich für das Prozent der „wahren" Pyroelektrizität bei Turmalin der Wert 11,9, welcher also erheblich kleiner als der von VOIGT angegebene Wert ist.

Druckfehlerberichtigung.

In meiner oben mehrfach zitierten Abhandlung „Om kvartsens termiska dilatation“ (Acta Soc. Scient. Fenn. t. XLVI, N:o 5; 1916) habe ich nachträglich folgende Druckfehler bemerkt, die mir bei der Korrektur entgangen sind.

Seite 51, p. 2 v. unten steht: $f.\mu$ statt: $f:\mu$.

„ 49, im Nenner des zweiten Termes in dem Ausdrucke für c steht: $(t_4 - t_2)$ statt: $(t_4 - t_3)$.

„ 60, „ „ „ „ „ „ „ „ „ b „ $(t_3 - t_1)$ „ $(t_3 - t_2)$.

„ 74, „ „ „ Ausdruckes für $\triangle E$ steht: t_2^2 statt: t_1^2.

In den Tabellen in der Mitte der Seite 74 und unten auf der folg. Seite steht: k_0 statt: k_0'.

Seite 72, oben, in der zweiten Kolumne für d steht: $\frac{1}{2}$ statt: $\frac{1}{2}\lambda_0$.

„ 77, p. 11 v. oben: der Faktor 10^{-6} ist von den Zahlen 15,027 und 14,977 fortgefallen.

„ „ „ 14 „ „ steht: $0{,}03 \cdot 10^{-6}$ statt: $0{,}05 \cdot 10^{-6}$.

Helsingfors, im August 1916.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 7.

Zur Theorie der Lobatscheffskij'schen Geometrie

von

Severin Johansson.

Helsingfors 1917.
Druckerei der Finnischen Litteraturgesellschaft.

Die Strahlenbündel des Lobatscheffskij'schen Raums.

1. Es giebt im Lobatscheffskij'schen Raum dreierlei Arten von Strahlenbündeln. Das Bündel *erster Art* besteht aus allen Geraden, die durch einen Raumpunkt gehen; das Bündel *zweiter Art* oder das *Parallelenbündel* enthält alle Geraden des Raums, die mit einer gegebenen Geraden in der einen Richtung und also mit einander parallel sind; das Bündel *dritter Art* schliesslich ist aus allen Geraden zusammengesetzt, die auf derselben Ebene, der *Polarebene* des Bündels, senkrecht stehen.

Jede durch einen Bündelstrahl gehende Ebene nennen wir eine *Diametralebene* des Bündels; der Schnitt zweier Diametralebenen ist wiederum ein Strahl des Bündels.

Diejenigen Strahlen, die eine Diametralebene erzeugen, bilden ein ebenes Strahlenbüschel. Jenachdem das Bündel von der ersten, zweiten oder dritten Art ist, besteht das ebene Büschel aus allen Strahlen der Diametralebene, die durch einen Punkt gehen, aus allen Strahlen eines ebenen Parallelenbüschels oder aber aus allen Strahlen, die auf der Spurlinie der Polarebene in der Diametralebene senkrecht stehen. Die Spurlinie nennen wir die *Polare* des ebenen Büschels. Übrigens sagen wir, dass die dreierlei Strahlenbüschel bezw. von der ersten, zweiten oder dritten Art sind.

2. Man bemerkt sogleich, dass eine beliebige Ebene und eine in ihr nicht liegende Gerade immer demselben Strahlenbündel als Diametralebene und Strahl angehören. Sie bestimmen dabei das Bündel eindeutig.

Ist nämlich g die Gerade und E die Ebene und g' die Projektion von g auf E, so sind drei Möglichkeiten vorhanden. Entweder schneidet nämlich g die Projektion g', oder aber g und g' sind parallel, oder sie haben schliesslich eine gemeinsame Senkrechte. Im ersten Fall bestimmen g und E ein Bündel erster Art mit dem Schnittpunkt als Bündelzentrum; im zweiten Fall bekommen wir ein Bündel zweiter Art, falls wir diejenigen Geraden in Betracht ziehen, die mit g und g' parallel sind. Wenn wir im dritten Fall die gemeinsame Perpendikularebene zu g und g' durch ihre gemeinsame Senkrechte legen, so bilden diejenigen Strahlen, die auf der Perpendikularebene senkrecht stehen, das gemeinte Bündel dritter Art des Raums.

3. Die Frage nach dem Schnitt zweier Diametralebenen erledigt sich einfach für die Bündel *erster* Art. Die Diametralebenen schneiden sich nämlich dann immer, weil sie das Bündelzentrum gemein haben und es giebt somit nur noch eine Art von Ebenenbüscheln innerhalb des Bündels, nämlich das Büschel aller durch einen Bündelstrahl gehenden Ebenen.

In den Bündeln zweiter und dritter Art liegt die Sache anders. Um uns über die hier vorkommenden Möglichkeiten zu orientieren, bemerken wir vorläufig, dass *zwei Ebenen* E_1 *und* E_2, *die auf einer dritten* E *senkrecht stehen, sich schneiden oder nicht jenachdem ihre Spurlinien* a_1 *und* a_2 *auf* E *sich schneiden oder nicht.*

Der positive Teil des Satzes ist unmittelbar einleuchtend, denn der Schnittpunkt von a_1 und a_2 ist ebenfalls Schnittpunkt von E_1 und E_2. Dabei ist die vom Schnittpunkt auf E gezogene Senkrechte die Schnittlinie von E_1 und E_2.

Wenn aber a_1 und a_2 sich nicht schneiden, kann kein Schnittpunkt zwischen E_1 und E_2 vorkommen. Es müsste nämlich die von dem Schnittpunkt auf E gezogene Senkrechte sowohl E_1 wie E_2 angehören und somit ihre Schnittlinie sein. Daraus würde dann folgen, dass a_1 und a_2 durch den Fusspunkt der Senkrechten auf E gehen würden und sich somit schneiden müssten.

Liegt nun ein Bündel *dritter* Art vor, so stehen sämtliche seine Diametralebenen senkrecht auf der Polarebene. Zwei solche Ebenen schneiden sich also oder nicht, jenachdem ihre Spurlinien auf der Polarebene sich schneiden oder nicht. Fassen wir in diesem Fall als Ebenenbüschel alle diejenigen Ebenen zusammen, die aus der Polarebene ein ebenes Strahlenbüschel ausschneiden, so bekommen wir, da es drei Arten solcher Strahlenbüschel giebt, ebenfalls drei Arten von Ebenenbüscheln.

Durch jeden Strahl des Bündels gehen unendlich viele Ebenen, die eine vorgelegte den Strahl nicht enthaltende Ebene des Bündels schneiden, und unendlich viele Ebenen, die diese Ebene nicht schneiden. Die beiden Arten von Ebenen werden von einander durch zwei Ebenen der letzteren Art getrennt, deren Spurlinien in der Polarebene die beiden durch den Spurpunkt des Strahls zu der Spurlinie der vorgelegten Ebene gezogenen Parallelen ausmachen.

Bei dem Bündel *zweiter* Art geht aus dem obigen Satz unmittelbar hervor, dass *zwei Diametralebenen, die auf einer dritten senkrecht stehen, sich nicht schneiden.* Wir können aber auch umgekehrt zeigen, dass *zwei Diametralebenen, die sich nicht schneiden, auf derselben dritten Diametralebene senkrecht stehen.*

Es seien E_1 und E_2 die beiden Ebenen. Weiter sei a_1 ein beliebiger dem Bündel angehöriger Strahl in E_1, a_2 seine Projektion auf E_2. Wir behaupten, dass die von a_1 und a_2 bestimmte Diametralebene E, die ja auf E_2 senkrecht steht, ebenfalls auf E_1 ortogonal ist.

Wir betrachten deshalb eine Gerade p, die durch einen beliebigen Punkt P_1 auf a_1 gegen E_2 senkrecht gezogen ist und also a_2 in einem Punkt P_2 schneidet. Wir projizieren p auf E_1 und bezeichnen die Projektion mit p_1. Weiter projizieren wir p_1 auf E_2 und nennen die Projektion p_2. Es geht dann natürlich p_1 durch P_1 und p_2 durch P_2.

Wenn nun E_1 nicht auf E senkrecht steht, so fällt p_1 nicht mit a_1 zusammen. Folglich ist der Neigungswinkel (p, p_1) von p gegen E_1 kleiner als der Winkel (p, a_1). Der Winkel (p, a_1) ist aber der zum Abstand $P_1 P_2$ gehörende Parallelwinkel $\Pi(P_1 P_2)$. Also ist

$$(p\,p_1) < \Pi(P_1 P_2).$$

Betrachten wir nunmehr die in derselben Ebene liegenden Geraden p, p_1 und p_2, so bemerken wir, dass p_2 in P_2 gegen p senkrecht steht, während p_1 in P_1 mit p einen Winkel $(p\,p_1)$ einschliesst, der kleiner ist als $\Pi(P_1 P_2)$. Also schneiden sich p_1 und p_2. Daraus folgt

aber, dass die Ebenen E_1 und E_2 einander schneiden. Das ist aber gegen die Voraussetzung, womit dann bewiesen ist, dass E_1 senkrecht auf E stehen muss.

Aus dem obigen Beweis folgt, dass *jede Diametralebene E, die auf E_1 oder E_2 senkrecht ist, ebenfalls die andere Ebene ortogonal schneidet.* Steht nämlich E senkrecht auf E_1 und ist a_1 ihre Schnittlinie, so steht nach dem Beweis diejenige Ebene, die a_1 auf E_2 projiziert, ebenfalls auf E_1 senkrecht und fällt also mit E zusammen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Betrachten wir nunmehr alle Diametralebenen, die eine gegebene Diametralebene E_0 nicht schneiden, so stehen sie alle senkrecht auf jeder Diametralebene, die auf E_0 senkrecht steht. Daraus folgt dann insbesondere, dass zwei derartige Ebenen sich niemals schneiden können.

Wir sagen nunmehr, dass zwei Diametralebenen des Bündels zweiter Art, die sich nicht schneiden, *parallel* sind. Die obige Überlegung zeigt, dass alle Ebenen, die mit einer gegebenen E_0 parallel sind, ebenfalls mit einander parallel sind und ein Büschel paralleler Ebenen bilden. Ersichtlich bilden alle auf E_0 senkrechten Diametralebenen ein zweites Büschel paralleler Ebenen, die senkrecht auf den Ebenen des früheren Büschels stehen.

Wir können nunmehr auch schliessen, dass *durch jeden Bündelstrahl im Bündel zweiter Art eine und nur eine Ebene geht, die mit einer vorgegebenen Ebene des Bündels parallel ist.* Diese ausgezeichnete Ebene ist einfach diejenige Ebene, die durch den Bündelstrahl senkrecht auf diejenige Ebene gezogen ist, die den Bündelstrahl auf die vorgegebene Ebene projiziert. Alle anderen durch den Bündelstrahl gehenden Ebenen müssen die vorgegebene Ebene schneiden.

Ausser dem Büschel paralleler Ebenen haben wir natürlich auch wie in den anderen Fällen diejenigen Ebenenbüschel zu betrachten, deren Ebenen sämtlich durch denselben Bündelstrahl gehen.

4. Die hiermit abgeschlossene Überlegung zeigt, dass die Bündel erster und zweiter Art des Lobatscheffskij'schen Raums das genaue Analogen zu den beiden Strahlenbündeln des Euklid'schen Raums abgeben, nämlich zu dem Bündel aller durch einen Raumpunkt gehenden Strahlen und dem Bündel aller mit einer gegebenen Geraden parallelen Strahlen. Dem Bündel dritter Art entspricht keine besondere Konfiguration in dem Euklid'schen Raum, indem nämlich das Bündel aller auf einer Ebene senkrecht stehenden Strahlen sich auf das Parallelenbündel reduziert.

Mit dem hiermit entwickelten hängt zusammen, dass für die dreierlei Arten von Bündeln dreierlei Arten von Geometrieen gelten. Die oben durchgeführten Überlegungen über die Bündel zweiter Art zeigen, dass sie in dieser Hinsicht besonders ausgezeichnet sind, indem nämlich ihren Ebenen und Strahlen genau dieselben Eigenschaften zukommen wie den Ebenen und Strahlen des Parallelenbündels im Euklid'schen Raum. Besonders ist hervorzuheben, dass *die Summe der drei Kantenwinkel in einem von drei Diametralebenen gebildeten Dreikant zwei Rechte beträgt.*

Es bietet somit das Parallelenbündel oder das Bündel zweiter Art in vieler Hinsicht den natürlichen Eingang dar für die nähere Untersuchung des Lobatscheffskij'schen Raums, wie wir später sehen werden.

5. Die *ortogonalen Trajektorienflächen* der oben betrachteten räumlichen Strahlenbündel im Lobatscheffskij'schen Raum oder die s. g. *Sphären* sind im ersten Fall konzentrische *Kugelflächen* um das Bündelzentrum als Mittelpunkt. Im zweiten Fall erhalten wir konzentrische *Grenzkugeln* (*Parasphären*), während wir im dritten Fall *aeqvidistante Flächen* zur Polarebene (*Hypersphären*) bekommen.

In einer beliebigen Diametralebene des Bündels sind die Spuren dieser Flächen die ortogonalen Trajektorien der drei Arten von ebenen Strahlenbüscheln oder die s. g. *Zykeln*. Im ersten Fall bekommen wir konzentrische *Kreise*, im zweiten Fall konzentrische *Grenzkreise* (*Parazykeln*), während im dritten Fall die *aeqvidistanten Kurven* zur Polare (*Hyperzykeln*) auftreten.

Besonders wollen wir im *zweiten* Fall hervorheben, dass der Durchschnitt eines Diametralebenenbüschels mit der Grenzkugelfläche ein Grenzkreisbüschel ist. Das Zentrum dieses Büschels ist der Durchschnittspunkt zwischen der Büschelachse und der Grenzkugel. Besteht das Ebenenbüschel aus allen mit einer gegebenen Ebene parallelen Ebenen, so wird das Grenzkreisbüschel aus einer Schaar einander nicht schneidender Grenzkreise bestehen. Derartige einander nicht schneidende Grenzkreise nennen wir *parallel*.

Da auf der ortogonalen Trajektorienfläche der Winkel zweier Durchschnitte genau gleich dem Winkel der schneidenden Ebenen ist, so können wir alle Schlüsse über parallele Ebenen des Bündels zweiter Art auf die parallelen Grenzkreise übertragen. Jeder Grenzkreis, der auf einem von zwei parallelen Grenzkreisen senkrecht steht, schneidet also ebenfalls den anderen ortogonal. Diejenigen Grenzkreise, die mit je zwei einander ortogonal schneidenden Grenzkreisen parallel sind, bilden auf der Grenzkugel ein Ortogonalsystem. Insbesondere kann hervorgehoben werden, dass *durch jeden Punkt der Grenzkugel ein und nur ein Grenzkreis geht, der mit einem vorgegebenen Grenzkreis parallel ist.*

Hiermit hängt dann auch zusammen, dass *die Winkelsumme in einem Grenzkreisdreieck zwei Rechte beträgt.* Überhaupt deckt sich die Geometrie der Grenzkugel mit der Geometrie der Euklid'schen Ebene.

Der ebene Schnitt des Bündels zweiter Art.

6. Wir wollen im Folgenden näher untersuchen, wie eine Ebene E, die nicht Diametralebene des Bündels zweiter Art ist, das Bündel schneidet.

Um dabei die Untersuchung nicht zu unterbrechen, beweisen wir vorläufig folgenden Satz.

Wenn eine Ebene E zwei parallele Diametralebenen, E_1 und E_2, senkrecht schneidet, so ist sie selbst Diametralebene des Bündels.

Wir bezeichnen mit e_1 und e_2 die Schnitte zwischen E einerseits und E_1 und E_2 andererseits. Weiter legen wir durch einen beliebigen Punkt A_1 auf e_1 diejenige Diametralebene E', die E_1 und E_2 senkrecht schneidet. Falls wir nun annehmen, dass E keine Diametralebene ist, so sind die Ebenen E und E' verschieden. Die Schnittgeraden von E' mit E_1 und E_2 seien a_1 und a_2. Dann ist A_1 der Schnittpunkt von e_1 und a_1.

Weil E und E' den Punkt A_1 gemeinsam haben, schneiden sie sich längs einer von A_1 auslaufenden Geraden p. Die Gerade p ist weiter senkrecht sowohl auf E_1 wie E_2. Sie schneidet also E_2 in einem Punkt A_2, der sowohl auf e_2 wie a_2 liegt und somit ihren Schnittpunkt bildet.

Weil $A_1 A_2$ senkrecht sowohl auf E_1 wie auf E_2 ist, so ist sie die gemeinsame Senkrechte von a_1 und a_2. Diese Strahlen gehören aber dem Bündel zweiter Art an und sind folglich parallel. Sie können also keine gemeinsame Senkrechte haben. Hiermit fällt dann auch die Möglichkeit, dass E keine Diametralebene wäre, womit der Satz bewiesen ist.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir unmittelbar folgendes beweisen.

Ist E eine Ebene, die keine Diametralebene des Bündels ist, so giebt es im Bündel einen und nur einen Strahl, der auf E senkrecht steht.

Wir projizieren deshalb einen beliebigen Strahl g_1 des Bündels auf E und nennen die projizierende Ebene E_1. Weiter projizieren wir einen in E_1 nicht liegenden Strahl g_2 des Bündels auf E und nennen die projizierende Ebene E_2.

Die Ebenen E_1 und E_2 sind beide senkrecht auf E. Sie müssen sich folglich schneiden, denn sonst wäre nach dem vorigen Satz die Ebene E eine Diametralebene des Bündels. Die Schnittgerade g_0 ist dann die in dem Satz verlangte Senkrechte auf E.

Es kann nun nicht zwei derartige Senkrechten geben. Denn zwei parallele Geraden können nicht auf derselben Ebene senkrecht stehen.

Unter den übrigen Strahlen des Bündels sind diejenigen besonders hervorzuheben, die mit E zusammen ein Bündel zweiter Art bestimmen (vgl. Nr. 2). Diese Strahlen bilden ersichtlich einen Kegel mit g_0 als Achse, deren Mantelfläche M sich der Ebene E asymptotisch nähert, indem sie sich über die Ebene ausbreitet.

Von den übrigen Strahlen des Bündels gilt dann ersichtlich, dass sie die Ebene E schneiden oder nicht jenachdem sie innerhalb oder ausserhalb der Mantelfläche M verlaufen. Es bestimmen dabei die ersteren Strahlen mit E zusammen Bündel erster Art, während die letzteren Strahlen mit E zusammen Bündel dritter Art festlegen.

7. Wir betrachten jetzt die Ebenenbüschel des Bündels. Liegt dann die Büschelachse innerhalb von M, so schneidet das Ebenenbüschel aus der Ebene E ersichtlich ein Strahlenbüschel erster Art aus. Wenn dagegen die Büschelachse eine Erzeugende von M ist, so erhalten wir ein Strahlenbüschel zweiter Art, dessen sämtliche Strahlen mit der Projektion der Büschelachse auf E parallel sind. Wenn schliesslich die Büschelachse ausserhalb von M verläuft, so schneidet das Ebenenbüschel ein Strahlenbüschel dritter Art aus, dessen Polare von der gemeinsamen Perpendikularebene der Büschelachse und ihrer Projektion auf E ausgeschnitten wird.

Es giebt aber noch die aus parallelen Ebenen zusammengesetzten Büschel des Bündels. Legen wir durch g_0 die Ortogonalebene eines derartigen Büschels, so müssen die Spurlinien sämtlicher Ebenen des Büschels auf E senkrecht auf der Schnittlinie zwischen dieser Ortogonalebene und E stehen. Also wird durch ein Büschel paralleler Ebenen aus E ein Strahlenbüschel dritter Art ausgeschnitten, dessen Polare durch den Fusspunkt O von g_0 auf E geht.

8. Es lässt sich nun auch umgekehrt zeigen, dass alle Strahlenbüschel in E durch Ebenenbüschel des Bündels ausgeschnitten werden.

Ist das Strahlenbüschel von der ersten Art, so brauchen wir nur den durch das Büschelzentrum gehenden Strahl unseres Bündels zur Achse eines Ebenenbüschels zu nehmen.

Wenn das Strahlenbüschel von der zweiten Art ist, so bestimmt es ein Strahlenbündel zweiter Art im Raum. Wir betrachten die durch g_0 gehende Ebene dieses neuen Bündels. Diese schneidet die Mantelfläche M in einer Geraden, die gleichzeitig dem gegebenen und dem eben eingeführten Bündel angehört. Das Ebenenbüschel mit dieser Geraden als Achse schneidet ersichtlich aus der Ebene E das gegebene Strahlenbüschel zweiter Art aus.

Ist schliesslich das Strahlenbüschel von der dritten Art und geht die Polare nicht durch O, so ziehen wir durch die Polare eine Perpendikularebene auf E. Weil diese Perpendikularebene dem Bündel als Diametralebene nicht angehört, so giebt es im Bündel einen und nur einen Strahl, der auf dieser Ebene senkrecht steht. Wählen wir diesen Strahl zur Achse eines Ebenenbüschels, so wird dadurch das gegebene Strahlenbüschel dritter Art aus der Ebene E ausgeschnitten. Geht die Polare durch O, so wird das Strahlenbüschel durch Diametralebenen ausgeschnitten, die sämtlich senkrecht auf der durch g_0 und die Polare bestimmten Ebene stehen und die also ein Büschel paralleler Ebenen bilden.

Zusammenfassend können wir sagen. Ist ein Ebenenbüschel gegeben, so bestimmt die Achse des Büschels zusammen mit E ein Strahlenbündel im Raum. Jenachdem dieses Bündel von der ersten, zweiten oder dritten Art ist, wird der Durchschnitt des Ebenenbüschels mit E ein Strahlenbüschel erster, zweiter oder dritter Art. Wenn umgekehrt ein ebenes Strahlenbüschel in E gegeben ist, so bestimmt es ein Strahlenbündel im Raum. Jenachdem das gegebene Strahlenbüschel in E von der ersten, zweiten oder dritten Art ist, ist das neue Bündel von der ersten, zweiten oder dritten Art. Das neue Bündel hat mit dem gegebenen *einen Strahl gemein*. Dieser Strahl ist die Achse desjenigen Ebenenbüschels, welches das gegebene Strahlenbüschel aus E ausschneidet.

Wir haben hiermit eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Ebenenbüscheln des Bündels zweiter Art und den Strahlenbüscheln in E hergestellt. Besonders ist dabei hervorzuheben, dass die Büschelachse innerhalb der Mantelfläche M, auf M oder ausserhalb M liegt, jenachdem das Strahlenbüschel in E von der ersten, zweiten oder dritten Art ist.

9. Wir können die hiermit gewonnenen Ergebnisse erheblich präzisieren. Es besteht nähmlich, wenn das Strahlenbüschel von der dritten Art ist, eine einfache Beziehung zwischen der Lage der Polare in E und der Büschelachse des zugehörigen Ebenenbüschels im Raum.

Vorläufig machen wir uns folgende Sache klar. Liegt die Büschelachse a innerhalb von M, so schneiden alle Ebenen des Ebenenbüschels die Ebene E. Ist die Achse a eine Erzeugende von M, so ist die längs a die Fläche M tangierende Ebene die einzige des Büschels, die E nicht schneidet. Liegt schliesslich a ausserhalb von M, so trennen die beiden durch a gezogenen tangierenden Ebenen der Fläche M diejenigen Ebenen des Ebenenbüschels, die E schneiden, von denjenigen, die E nicht schneiden. Dies ist unmittelbar klar, denn jede Diametralebene, die M schneidet, schneidet ebenfalls die Ebene E und umgekehrt.

Wir fassen das letzte Ergebnis besonders ins Auge und bezeichnen mit t_1 und t_2 diejenigen Erzeugenden von M, längs deren die tangierenden Ebenen die Fläche M berühren. Weiter bezeichnen wir mit p die Polare des zugehörigen Strahlenbüschels in E. Wir wollen

dann zeigen, dass *die Erzeugenden t_1 und t_2 von derjenigen Diametralebene ausgeschnitten werden, die durch die Polare p hindurchgeht.* Es sind dabei t_1 und t_2 mit einander und mit p parallel.

Bei dem Beweis bemerken wir zuerst, dass jede Ebene des Ebenenbüschels, die M schneidet, ebenfalls E schneidet. Dabei schneidet sie aus E eine Gerade aus, die senkrecht auf p steht und die also p schneidet. Daraus erhellt, dass die betreffende Ebene ebenfalls die durch p gehende Diametralebene des Bündels schneidet und dies längs einem Bündelstrahl, der innerhalb von M liegt. Dieser Bündelstrahl liegt also zwischen denjenigen beiden Erzeugenden, in denen die betreffende Ebene des Ebenenbüschels die Mantelfläche M schneidet. Daraus erhellt, dass die tangierende Ebene gerade durch die Schnittlinie zwischen der Diametralebene durch p und der Mantelfläche M gehen muss. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Übrigens kann folgendes hervorgehoben werden. Die Büschelachse a und die Ebene E legen ein Bündel dritter Art fest. Wie in der ersten Abteilung gezeigt wurde, giebt es dann unter den durch a gehenden Ebenen zwei, die die durch a gehenden, die Ebene E schneidenden Ebenen von den nicht schneidenden trennen. Diese Ebenen sind die oben betrachteten tangierenden Ebenen.

Abbildung der Ebene auf die Grenzkugel.

10. Die oben durchgeführten Überlegungen erhalten eine besonders einfache Form, falls wir die Grenzkugeln des Bündels mit in Betracht ziehen. Wir wählen in erster Linie diejenige Grenzkugel aus, die durch O hindurchgeht und also die Ebene E in O berührt, und wollen die durch die Bündelstrahlen besorgte Projektion der Ebene E auf die Grenzkugel näher untersuchen.

Die Mantelfläche M und die Grenzkugel schneiden sich in einem Kreis. Es bildet dabei der innerhalb von M liegende Teil der Grenzkugel eine Grenzkugelkalotte K. Ersichtlich haben wir dann als erstes Ergebnis den Satz.

Die ganze Ebene E wird durch die Bündelstrahlen auf die Kalotte K ein-eindeutig projiziert.

Die unendlich fernen Punkte der Ebene werden dabei auf die Kalottengrenze abgebildet.

Die Geraden der Ebene werden ersichtlich durch die Diametralebenen auf Grenzkreise projiziert. Dabei wird die ganze Gerade der Ebene auf dasjenige Stück des Grenzkreises abgebildet, das innerhalb der Kalotte K liegt. Die unendlich fernen Punkte der Geraden werden auf die beiden Endpunkte dieser Grenzkreissehne abgebildet.

Die Strahlenbüschel der Ebene E werden durch Vermittelung der zugehörigen Ebenenbüschel auf Grenzkreisbüschel abgebildet. Das Zentrum dieses Grenzkreisbüschels ist der Durchschnittspunkt zwischen der Büschelachse und der Grenzkugel. Insbesondere geht also ein Büschel erster Art in ein Grenzkreisbüschel über, dessen Zentrum innerhalb der Kalotte liegt, während das Büschel zweiter Art zu einem Büschel Anlass giebt, dessen Zentrum auf dem Kalottenrand liegt. Bei dem Büschel dritter Art liegt das Zentrum des entsprechenden Büschels auf der Grenzkugel ausserhalb des Kalottenrands, wobei natürlich nur derjenige Teil jedes Grenzkreises in Betracht kommt, der innerhalb der Kalotte liegt.

In dem dritten Fall ist weiter besonders zu beachten, wie sich die Polare des Strahlenbüschels auf die Grenzkugel abbildet. Die beiden im vorigen Abschnitt eingeführten durch die Achse a des zugehörigen Ebenenbüschels gehenden tangierenden Ebenen zur Mantelfläche M schneiden aus der Grenzkugel zwei Grenzkreise aus, die durch das Zentrum des Grenzkreisbüschels gehen und den Kalottenrand tangieren, wobei die Berührungspunkte eben diejenigen Punkte sind, in denen die Erzeugenden t_1 und t_2 die Grenzkugel durchdringen. Ersichtlich wird nun die Polare p in denjenigen Grenzkreis übergeführt, der die beiden Berührungspunkte verbindet. Falls wir diesen Grenzkreis mit einem nahe liegenden Ausdruck die Polare des Büschelzentrums in Bezug auf den Kalottenrand nennen, so können wir zusammenfassend folgenden Satz formulieren.

Die Strahlenbüschel der Ebene werden auf Grenzkreisbüschel abgebildet. Dabei liegt das Zentrum des Grenzkreisbüschels innerhalb K, auf dem Rand von K oder ausserhalb K, jenachdem das gegebene Strahlenbüschel von der ersten, zweiten oder dritten Art ist. Insbesondere wird bei dem Büschel dritter Art die Polare des Büschels auf die Polare des Zentrums des Grenskreisbüschels in Bezug auf den Kalottenrand abgebildet.

Falls wir die Benennung harmonische Polaren für zwei Grenzkreise benützen, von denen der eine durch den Pol des anderen in Bezug auf den Kalottenrand geht, können wir ersichtlich den letzten Teil des Satzes kurz so aussagen:

Zwei auf einander senkrechte Geraden gehen in zwei harmonische Polaren über.

Geht insbesondere die Polare des Strahlenbüschels durch O, so geht das Büschel in ein Büschel paralleler Grenzkreise über, die sämtlich senkrecht auf dem Abbild der Polare stehen. Dies können wir dann auch folgendermassen ausdrücken.

Ein rechter Winkel der Ebene, dessen Schenkel durch O geht, wird auf einen rechten Winkel auf der Grenzkugel abgebildet.

Die hiermit gewonnenen Ergebnisse gelten natürlich für jede zum gegebenen Bündel gehörende Grenzkugel. Auf jeder wird nämlich durch die Mantelfläche M eine Kalotte begrenzt und die oben entwickelten Sätze lassen sich unverändert für alle diese Kalotten aussprechen.

11. Indem wir nunmehr zur ursprünglichen Grenzkugel zurückkehren, bezeichnen wir den Radius der Kalotte, von O aus längs der Grenzkugel gemessen, mit k und stellen uns die Aufgabe *die Länge ϱ des Abbilds auf der Grenzkugel einer in der Ebene E von O auslaufenden Strecke von der Länge r zu berechnen.*

Wir ziehen deshalb durch den anderen Endpunkt A der Strecke r die Senkrechte auf r in der Ebene E und durch O eine Parallele zu dieser Senkrechten. Der von der Strecke r und der Parallelen eingeschlossene Winkel ist der zum Abstand r gehörende Parallelwinkel $\Pi(r)$.

Auf der Grenzkugel ensteht bei der Abbildung ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse k, der Kathete ϱ und dem von diesen eingeschlossenen Winkel $\Pi(r)$. Weil die Geometrie auf der Grenzkugel euklidisch ist, wobei die Rolle der Geraden in der Euklid'schen

Ebene von den Grenzkreisen übernommen wird, können wir die Formeln der gewöhnlichen Trigonometrie der Euklid'schen Ebene anwenden und erhalten

$$\varrho = k \cos \Pi(r). \tag{1}$$

Dies ist die gewünschte Beziehung zwischen ϱ und r.

Aus demselben Dreieck geht hervor, dass die Länge des Abbilds der ganzen von A aus gezogenen Senkrechten $k \sin \Pi(r)$ ist. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe *die Länge σ des Abbilds einer von A aus längs der Senkrechten abgetragenen Strecke s zu berechnen.*

Um diese Aufgabe zu lösen müssen wir vorbereitend eine Sache klar machen. Wir betrachten deshalb eine beliebige andere Grenzkugel des Bündels und bezeichnen den Radius der auf dieser vorkommenden Kalotte mit k' und das Abbild von r mit ϱ'. Dann ist genau so wie oben

$$\varrho' = k' \cos \Pi(r). \tag{1'}$$

Aus (1) und (1') folgt, dass

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{k}{k'}. \tag{2}$$

Die Grenzkreisbögen ϱ und ϱ' sind aber Stücke zweier konzentrischer Grenzkreise, die zwischen denselben beiden Strahlen eines ebenen Büschels zweiter Art liegen. Falls wir derartige Bögen *entsprechende Bögen* nennen, so kann die Gleichung (2) durch folgenden Satz ausgedrückt werden.

Entsprechende Bögen zweier konzentrischer Grenzkreise sind proportional.

Nunmehr betrachten wir diejenige Grenzkugel des Bündels, die durch A geht und die also die oben eingeführte durch A gehende Senkrechte in A berührt. Die Projektion der Senkrechten auf dieser Grenzkugel ist k und die Projektion der Strecke s nach (1) gleich $k \cos \Pi(s)$. Es bilden folglich k und $k \sin \Pi(r)$, $k \cos \Pi(s)$ und σ entsprechende Bögen zweier konzentrischer Grenzkreise, woraus erhellt, dass

$$\frac{k}{k \cos \Pi(s)} = \frac{k \sin \Pi(r)}{\sigma}$$

oder

$$\sigma = k \sin \Pi(r) \cos \Pi(s). \tag{3}$$

Die Gleichung (3) löst die gestellte Aufgabe.

12. Wir führen nunmehr ein Koordinatensystem in der Ebene ein, indem wir als Koordinatenachsen zwei beliebige auf einander senkrechte Geraden durch O wählen. Als die y-Koordinate eines Punkts bezeichnen wir seinen Abstand von der x-Achse, während die x-Koordinate den Abstand von O nach dem Fusspunkt der von dem Punkt auf die x-Achse gezogenen Senkrechten (y) bedeutet. Es bilden also x, y und der radius vector des Punkts ein rechtwinkliges Dreieck.

Auf der Grenzkugel führen wir als Koordinatenachsen die Abbilder der Achsen in der Ebene ein und als Koordinaten ξ und η eines Punkts die Abbilder der Koordinaten des ent-

sprechenden Punkts der Ebene. Dabei stellt dann η den längs einem Grenzkreisbogen gemessenen Abstand des Punkts von der ξ-Achse dar und ξ den Abstand des Fusspunkts dieser Abstandlinie auf der ξ-Achse vom Koordinatenanfangspunkt.

Nach (1) und (3) ist unmittelbar für alle Punkte

$$|\xi| = k \cos \Pi(|x|),$$
$$|\eta| = k \sin \Pi(|x|) \cos \Pi(|y|).$$

Um hieraus ganz allgemeingültige Formeln zwischen (x, y) und (ξ, η) zu erhalten, müssen wir festlegen, dass für einen negativen Argumentenwert

$$\Pi(-x) = \pi - \Pi(x).$$

Dann stellen allgemein die Formeln

$$\xi = k \cos \Pi(x).$$
$$\eta = k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y) \tag{4}$$

die Übergangsformeln dar, die der Abbildung der Ebene auf die Grenzkugel entsprechen.

Übrigens kann bemerkt werden, dass auf der Grenzkugel, wo die Geometrie euklidisch ist, den Koordinaten ξ und η genau dieselben Eigenschaften zukommen wie den gewöhnlichen Cartesischen Koordinaten der Euklid'schen Ebene. ξ und η sind also die Abstände des Punkts (ξ, η) von den Koordinatenachsen, gemessen längs der von dem Punkt auf die Achsen gezogenen senkrechten Grenzkreise.

Die Gleichung der Geraden. Bestimmung des Parallelwinkels.

13. Wir sind nunmehr im Stande die Gleichung der Geraden in den Koordinaten x und y aufzustellen.

Es sei also g eine beliebige Gerade in der Ebene, die nicht durch O geht. Wir bezeichnen den Abstand der Geraden von O mit p und mit ω den von p und der x-Achse eingeschlossenen Winkel. Auf der Grenzkugel erhalten wir als Bild von g einen Grenzkreis γ, dessen Abstand, längs der Grenzkugel gemessen, vom Koordinatenanfangspunkt O gleich $k \cos \Pi(p)$ ist; weiter bildet die Abstandlinie mit der ξ-Achse den Winkel ω.

Die Gleichung des Grenzkreises γ in den Koordinaten ξ und η ist also

$$\xi \cos \omega + \eta \sin \omega = k \cos \Pi(p).$$

Tragen wir in diese Gleichung die Werte von ξ und η aus den Relationen (4) ein, so wird die Gleichung der Geraden g in den Koordinaten x und y nach Division mit k

$$\cos \Pi(x) \cos \omega + \sin \Pi(x) \cos \Pi(y) \sin \omega = \cos \Pi(p). \tag{5}$$

Diese Gleichung behält ihre Gültigkeit noch wenn die Gerade g durch O geht. Dann ist nämlich p gleich Null. Aus (1) folgt aber dann, dass $\cos \Pi(p) = 0$ ist, woraus erhellt, dass die Gleichung der durch O gehenden Geraden die Form

$$\cos \Pi(x) \cos \omega + \sin \Pi(x) \cos \Pi(y) \sin \omega = 0$$

hat. ω bedeutet dabei den Winkel, den die in O auf die Gerade gezogene Senkrechte mit der x-Achse bildet.

Die Gleichung (5) *stellt also die allgemeine Form der Gleichung der Geraden in der Lobatscheffskij'schen Ebene dar.*

14. Die Gleichung (5) erhält eine besonders einfache Form, wenn die Gerade g mit der x-Achse parallel ist. Dann ist nämlich $\omega = \Pi(p)$ und es wird nach leichter Umformung

$$\cos \Pi(y) = \cot \Pi(p) \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x). \tag{6}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung sind wir jetzt im Stande, *den analytischen Ausdruck für den Parallelwinkel* $\Pi(x)$ *abzuleiten.*

Wir nehmen deshalb an, dass die Gerade (6) die positive y-Achse schneidet und bezeichnen die Ordinate des Schnittpunkts mit y_0. Es bilden nun die gegebene Gerade, die Senkrechte p und die Ordinate y_0 ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse y_0, der Kathete p und dem von diesen eingeschlossenen Winkel $\frac{\pi}{2} - \Pi(p)$. Die Projektion dieses Dreiecks auf die Grenzkugel ist ein ebenfalls rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse $k \cos \Pi(y_0)$, der Kathete $k \cos \Pi(p)$ und dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \Pi(p)$. Also ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(p)\right) = \frac{k \cos \Pi(p)}{k \cos \Pi(y_0)}$$

oder

$$\cos \Pi(y_0) = \cot \Pi(p). \tag{7}$$

Mit Hilfe von (7) nimmt die Gleichung (6) die Form an

$$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(y_0) \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x). \tag{6'}$$

Die Gleichung (6') stellt ersichtlich eine ganz allgemeine Eigenschaft zweier paralleler Geraden dar. Diese Eigenschaft benützen wir, indem wir uns vorläufig auf positive x-Werte beschränken. Wir nehmen also zwei beliebige positive Werte x und x' und bezeichnen die Ordinaten in x und $x+x'$ bezw. mit y und y'. Dann ist nicht nur

$$\cos \Pi(y') = \cos \Pi(y_0) \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x + x')$$

sondern auch

$$\cos \Pi(y') = \cos \Pi(y) \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x').$$

Aus (6') und den beiden letzten Gleichungen folgt, dass für beliebige positive Werte x und x'

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x + x') = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x'). \tag{8}$$

Nun ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x)$ eine stetige Funktion und wir können aus der Gleichung (8) schliessen, dass für positive Werte von x

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{a}}, \tag{9}$$

wo a eine noch zu bestimmende Konstante ist. Vorläufig können wir sagen, dass diese Konstante positiv ist, denn für positive Werte von x ist ja $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)<1$. Nach Nr. 12 ist $\Pi(-x)=\pi-\Pi(x)$. Daraus folgt, dass die zuerst nur für positive Werte von x erklärte Beziehung (9) ebenfalls für negative Werte gilt.

Wir wollen nun die Bestimmung von a vornehmen und zeigen, *dass a der früher eingeführten Konstante k gleich ist.*

Falls wir dabei wieder zur Geraden (6) zurückkehren, so legen wir durch O den die y-Achse berührenden Grenzkreis des von der Geraden und der x-Achse definierten Büschels zweiter Art. Wir bezeichnen den zwischen den beiden Geraden liegenden Teil des Grenzkreises mit s. Weil der Grenzkreis eine konvexe Kurve ist, so folgt, dass

$$y_0 > s > p \tag{10}$$

ist.

Die erste dieser Ungleichungen können wir, weil $s=k\cos\Pi(y_0)$ ist, in die Form schreiben

$$y_0 > k\cos\Pi(y_0)$$

oder also nach (9)

$$\frac{y_0}{k} > \frac{e^{\frac{y_0}{a}}-e^{-\frac{y_0}{a}}}{e^{\frac{y_0}{a}}+e^{-\frac{y_0}{a}}}.$$

Da dies für jeden Wert von y_0 gelten soll, schliessen wir, indem wir beiderseits mit y_0 dividieren und dann y_0 gegen Null abnehmen lassen, dass $k\leqq a$ sein muss.

Da weiter auf Grund von (7) $s=k\cot\Pi(p)$, so ist also nach der zweiten Ungleichung

$$k\cot\Pi(p) > p$$

oder auf Grund von (9)

$$\frac{e^{\frac{p}{a}}-e^{-\frac{p}{a}}}{2} > \frac{p}{k}.$$

Hieraus folgt wieder, weil diese Ungleichung für jeden Wert von p gelten soll, dass $a<k$ ist.

Wir haben also gefunden, dass $a=k$ sein muss, und haben folglich für den Parallelwinkel die Beziehung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Pi(x)=e^{-\frac{x}{k}}. \tag{11}$$

Für $\sin\Pi(x)$, $\cos\Pi(x)$ und $\operatorname{tg}\Pi(x)$ erhalten wir daraus die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\Pi(x)&=\frac{2}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}=\frac{1}{\cos\frac{x}{ki}},\\
\cos\Pi(x)&=\frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}=i\operatorname{tg}\frac{x}{ki},\\
\operatorname{tg}\Pi(x)&=\frac{2}{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}=\frac{1}{i\sin\frac{x}{ki}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Weiter erhalten wir folgende Additionsteoreme, die leicht abgeleitet werden und schon in (8) enthalten sind

$$\sin \Pi(x+y) = \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{1+\cos \Pi(x) \cos \Pi(y)},$$

$$\cos \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1+\cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg} \Pi(x+y) = \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}.$$

15. Es kann noch von Interesse sein zu sehen, dass die Gleichung (6') eine bemerkenswerte Eigenschaft konzentrischer Grenzkreise aussagt.

Wir ziehen deshalb durch O und den Punkt x die Grenzkreise des von der Geraden und der x-Achse bestimmten Büschels und nennen die Längen dieser Grenzkreise zwischen den Geraden bezw. l_0 und l. Dann ist nach (1)

$$l_0 = k \cos \Pi(y_0)$$
$$l = k \cos \Pi(y)$$

und also nach (6')

$$l = l_0 \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) \tag{14}$$

oder schliesslich nach (11)

$$l = l_0 \cdot e^{-\frac{x}{k}}. \tag{14'}$$

Die Gleichung (14') drückt das Gesetz aus, das entsprechende Grenzkreisbögen im selben Büschel vereinigt.

Die Gleichungen der Zykeln.

16. Falls wir das vom radius vector r und den Koordinaten x und y gebildete Dreieck auf die Grenzkugel projizieren, so erhalten wir ein ebenfalls rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse $k \cos \Pi(r)$ und den Katheten $k \cos \Pi(x)$ und $k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y)$. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz ist also

$$\cos^2 \Pi(r) = \cos^2 \Pi(x) + \sin^2 \Pi(x) \cos^2 \Pi(y),$$

oder nach leichter Umformung

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(y). \tag{15}$$

Die Glechung (15) entspricht in der Lobatscheffskij'schen Ebene dem Pythagoräischen Lehrsatz. *Bei festgehaltenem r stellt sie die Gleichung eines Kreises dar, dessen Mittelpunkt in O liegt und dessen Radius gleich r ist.*

17. Wir betrachten nunmehr alle diejenigen Strahlenbüschel erster Art der Ebene, deren Zentrum auf der positiven x-Achse liegt, weiter das Büschel zweiter Art, das von der positiven x-Achse festgelegt wird, und schliesslich alle diejenigen Büschel dritter Art, deren Polare senkrecht auf der positiven Teil der x-Achse steht oder mit der y-Achse zusammenfällt. Bei der Projektion auf die Grenzkugel entstehen aus diesen Büscheln alle diejenigen

Grenzkreisbüschel, deren Zentrum auf der positiven ξ-Achse liegt. Diese bilden eine stetige Schaar von Büscheln. In diesem Sinn ist dann auch die Büschelschaar der Ebene stetig. Diese Stetigkeit findet ihren einfachsten Ausdruck in der Tatsache, dass die Büschel der Ebene von einer stetigen Schaar von Ebenenbüscheln ausgeschnitten werden, indem nämlich die Büschelachse stetig alle in der einen Hälfte der von der x-Achse bestimmten Diametralebene liegenden Strahlen des Bündels durchwandert

Wir betrachten in jedem Fall die durch O gehende ortogonale Trajektorie des Strahlenbüschels. Wir bekommen dadurch eine stetige Schaar von Zykeln. Diese Zykeln sind dabei anfänglich Kreise, wenn das Büschel von der ersten Art ist, sie dehnen sich aber allmählich aus, wenn das Büschelzentrum sich enfernt, um in den Grenzkreis überzugehen, wenn das Büschel zweiter Art vorliegt. Dann folgen, wenn das Büschel von der dritten Art ist, aeqvidistante Kurven zur Polare, die sich einerseits dem Grenzkreis als Grenze nähern, wenn die Polare sich von O entfernt, während sie andererseits immer flacher werden und schliesslich in die y-Achse als Grenze übergehen, wenn die Polare sich der y-Achse nähert. Wir zählen die y-Achse als Zykel mit.

Unsere nächste Aufgabe wird *die gemeinsame Gleichung aller dieser Zykeln aufzustellen.*

Was zuerst den *Kreis* betrifft, so hat er, wenn der Mittelpunkt auf der x-Achse den Abstand r von dem Anfangspunkt O hat, nach (15) die Gleichung

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x-r) \sin \Pi(y)$$

oder

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = 1 - \cos \Pi(r) \cos \Pi(x). \tag{16}$$

Liegt der *Grenzkreis* vor, so ziehen wir eine beliebige Parallele zur x-Achse und bezeichnen die Koordinaten des Schnittpunkts zwischen der Parallelen und dem Grenzkreis mit x und y. Dann ist nach (6)

$$\cos \Pi(y) = \cot \Pi(p) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x),$$

wo p den Abstand der Parallelen von O bedeutet. Hier ist aber $p = y$ und wir bekommen folglich zwischen x und y die Gleichung

$$\sin \Pi(y) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x).$$

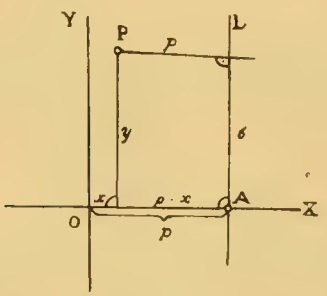


Fig. 1.

Diese kann geschrieben werden

$$\sin \Pi(y) = e^{-\frac{x}{k}}$$

oder auch in der mit (16) analogen Form

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = 1 - \cos \Pi(x). \tag{16'}$$

Haben wir schliesslich die *aeqvidistante Kurve*, so sei in nebenstehender Figur P ein Punkt dieser Kurve. Weiter sei L die Polare und p der Abstand der Polare von O.

Weil die Diagonale PA des dreirechtwinkligen Vierecks Hypothenuse zweier rechtwinkliger Dreiecke ist, so ist nach (15)

$$\sin \Pi(p) \sin \Pi(\sigma) = \sin \Pi(y) \sin \Pi(p-x).$$

Falls wir nun das Viereck auf die in A die Ebene berührende Grenzkugel projizieren, so muss es in ein Grenzkreisrechteck übergehen, wo also die Abbilder der gegenüberliegenden Seiten p und $p-x$ gleich sind oder

$$\cos \Pi(p) \sin \Pi(\sigma) = \cos \Pi(p-x).$$

Wenn σ aus den beiden letzten Gleichungen eliminiert wird, so ist nach leichter Rechnung

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = 1 - \frac{1}{\cos \Pi(p)} \cos \Pi(x). \tag{16''}$$

Wie man unmittelbar sieht geht die Gleichung (16') aus (16) hervor, wenn wir $r = \infty$ setzen. Es sind also die Grenzkreise als Kreise mit unendlich grossem Radius aufzufassen. Beachten wir aber weiter, dass nach (12)

$$\cos \Pi\left(k \cdot \frac{\pi i}{2} + p\right) = i \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{p}{ki}\right) = \frac{1}{i \operatorname{tg} \frac{p}{ki}} = \frac{1}{\cos \Pi(p)},$$

so sehen wir, dass auch die Gleichung (16'') aus (16) hervorgeht; wir brauchen nur $r = k \cdot \frac{\pi i}{2} + p$ zu setzen. Also ist dann auch eine aeqvidistante Kurve als Kreis aufzufassen, dessen Radius gleich $k \cdot \frac{\pi i}{2} + p$ ist.

Falls wir noch in (16'') mit $\cos \Pi(p)$ multiplizieren und hinterher p gleich Null setzen, so wird

$$\cos \Pi(x) = 0, \tag{16'''}$$

welche Gleichung die y-Achse darstellt. Es ist somit auch die Gerade in diesem Sinn ein Kreis, dessen Radius $k \cdot \frac{\pi i}{2}$ ist.

Die Gleichung (16) *ist also die gemeinsame Gleichung aller Zykeln, die für verschiedene Werte des Parameters r die verschiedenen Arten von Zykeln darstellt.*

18. Die Gleichungen (16), (16') und (16'') können in der gemeinsamen Form

$$k \sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = k - \xi_0 \cos \Pi(x) \tag{17}$$

geschrieben werden, wo ξ_0 bezw.

$$k \cos \Pi(r), \quad k, \quad \frac{k}{\cos \Pi(p)}$$

bedeutet.

Die Grösse ξ_0 hat dabei eine einfache geometrische Bedeutung. Sie ist einfach die Abzisse des auf der ξ-Achse liegenden Zentrums desjenigen Grenzkreisbüschels, welches das Abbild desjenigen Strahlenbüschels ist, dessen ortogonale Trajektorie die Kurve bildet.

Bei dem Büschel erster Art ist die Sache unmittelbar einleuchtend. Das Büschelzentrum in der Ebene liegt nämlich auf der x-Achse in dem Kreiszentrum, d. h. in dem Abstand r von O. Also ist $k\cos\Pi(r)$ der entsprechende Abstand auf der Grenzkugel.

Bei dem Büschel zweiter Art liegt ja das entsprechende Büschelzentrum auf der Grenzkugel auf dem Kalottenrand und folglich im dem Punkt k der ξ-Achse.

Bei dem Büschel dritter Art liegt das Büschelzentrum auf der Grenzkugel ausserhalb der Kalotte und in dem Pol des Abbilds der Polare. Nun schneidet die Polare, die senkrecht auf der x-Achse steht, diese Achse im Punkt mit der Abszisse p, woraus hervorgeht, dass ihr Abbild die ξ-Achse im Punkt $k\cos\Pi(p)$ der ξ-Achse schneidet. Daraus folgt dann, dass

$$\xi_0 = \frac{k}{\cos\Pi(p)} = \frac{k^2}{k\cos\Pi(p)}$$

der Pol dieses Abbilds in Bezug auf den Kalottenrand ist und dass also ξ_0 das Büschelzentrum auf der Grenzkugel festlegt.

Obwohl wir später untersuchen, wie sich die Zykeln auf die Grenzkugel durch unsere Abbildung übertragen, können wir hier schon eine vorläufige Bemerkung machen. Falls wir nämlich die Gleichung (17) in den Koordinaten ξ und η umrechnen, so ist zuerst nach (15)

$$k\sin\Pi(x)\sin\Pi(y) = k\sin\Pi(r)$$

wo r den radius vector des Punkts (x, y) bedeutet. Nun ist aber

$$k\sin\Pi(r) = \sqrt{k^2 - k^2\cos^2\Pi(r)} = \sqrt{k^2 - \varrho^2},$$

wo ϱ den radius vector des entsprechenden Punkts (ξ, η) auf der Grenzkugel darstellt. Da nun

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

so wird

$$k\sin\Pi(x)\sin\Pi(y) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Da weiter auf der rechten Seite in (17) nach (4)

$$\cos\Pi(x) = \frac{\xi}{k},$$

so geht (17) in folgende Gleichung über

$$\sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2} = \frac{k^2 - \xi_0\xi}{k},$$

oder falls wir noch in die zweite Potenz erheben,

$$k^2 - \xi^2 - \eta^2 = \frac{(k^2 - \xi_0\xi)^2}{k^2}. \tag{18}$$

Dies ist die Gleichung der Projektion des Zykels (17) auf der Grenzkugel. Die Projektion ist also eine Kurve zweiter Ordnung in den Koordinaten ξ und η; ξ_0 ist der Parameter der Kurve, der zwischen 0 und $+\infty$ frei veränderlich ist.

Falls wir die Benennungen aus der Euklid'schen Ebene auf die Grenzkugel übertragen, so können wir sagen, dass (18) eine Ellipse ist. Bei veränderlichen ξ_0 erhalten wir eine Schaar von Ellipsen, die sämtlich durch den Anfangspunkt gehen.

Weil

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2$$

die Gleichung des Kalottenrands ist, so geht aus (18) unmittelbar hervor, dass die Kurven niemals aus der Kalotte austreten; die rechte Seite in (18) ist nämlich niemals negativ.

Ist $\xi_0 < k$ d. h. das Büschel von der ersten Art, so kann $\xi_0 \xi$ niemals gleich k^2 sein und die Ellipse kann somit in keinem Punkt den Kalottenrand erreichen.

Ist $\xi_0 = k$ oder also das Büschel von der zweiten Art, so berührt die Kurve (18) den Kalottenrand im Punkt $\xi = k$.

Wenn schliesslich $\xi_0 > k$ ist oder also das Büschel von der dritten Art, so ist zu beachten, dass die Polare von ξ_0 in Bezug auf den Kalottenrand,

$$\xi_0 \xi = k^2,$$

den Kalottenrand schneidet. Aus (18) geht dann hervor, dass die Kurve grade durch die beiden Schnittpunkte geht, wo sie dann natürlich den Kalottenrand berührt.

Die hiermit betrachteten drei Arten von Kurven des Kurvenbüschels (18) sind also die Abbilder der drei Arten von Zykeln der Ebene. Falls ξ_0 sich von 0 bis $+\infty$ verändert, so dehnen sich zuerst, so lange $\xi_0 < k$ ist, die Ellipsen aus, indem jede Ellipse den zugehörigen Punkt ξ_0 umschliesst. Als ξ_0 den Kalottenrand überschreitet, geht die Ellipse durch ξ_0 und berührt den Kalottenrand. Wenn ξ_0 weiter fortrückt, so zieht sich die Kurve gewissermassen zurück, indem sie durch die Schnittpunkte der Polare mit dem Kalottenrand geht und daselbst den Rand berührt. Für $\xi_0 = \infty$ geht sie schliesslich in den doppelten längs der η-Achse fallenden Diameter des Kalottenrands über.

Die hiermit beendeten Untersuchungen können wir übrigens direkt aus (18) ablesen, falls wir nämlich beachten, dass die Kurve (18) in derjenigen Kurvenschaar zweiter Ordnung eingeht, die von dem Kalottenrand

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2$$

und der doppelt gezählten Polare

$$(k^2 - \xi_0 \xi)^2 = 0$$

des Punkts ξ_0 festgelegt wird. Es ist nämlich die Kurve (18) diejenige Kurve dieser Schaar, die durch den Anfangspunkt hindurchgeht.

Die Sphären und ihre Trigonometrie.

19. Die in der vorigen Abteilung betrachtete Schaar von Strahlenbüscheln der Ebene ist ein Diametralschnitt einer Schaar von räumlichen Strahlenbündeln, nämlich von allen denjenigen Bündeln, die durch die positive x-Achse festgelegt werden. Die Zykeln sind dabei die Spurlinien in der Diametralebene von der Schaar der durch O gehenden ortogonalen Trajektorienflächen dieser räumlichen Bündel.

Diese Sphären bilden eine stetige Schaar von Flächen, die allmählich in immer grössere Kugeln sich ausdehnen um durch eine Grenzkugel in die aeqvidistanten Flächen überzugehen. Diese werden immer flacher und gehen schliesslich in die durch O senkrecht auf der x-Achse stehende Ebene über.

Da die hiermit entstandene räumliche Konfiguration dadurch entsteht, dass die in der vorigen Abteilung betrachtete ebene Konfiguration um die x-Achse sich herumdreht, so hängen die Sphären von demselben Parameter r ab. Diesen Parameter nennen wir den Radius der Sphäre.

Die Diametralebenen des zugehörigen Bündels nennen wir ebenfalls Diametralebenen der Sphäre. Die Diametralebenen schneiden aus der Sphäre Zykeln aus und zwar bei der Kugel gewöhnliche Kreise, bei der Grenzkugel Grenzkreise und bei der aeqvidistanten Fläche aeqvidistante Kurven zu den Durchschnitten der Diametralebene mit der Polarebene. Schliesslich ist noch, wenn die Sphäre eine Ebene ist, der Durchschnitt mit der Diametralebene natürlich eine Gerade.

Wir werden im Folgenden die Trigonometrie der von Zykeln gebildeten Dreiecke auf einer Sphäre näher entwickeln.

20. Wir fangen mit der *Ebene* an.

Es sei also in der Ebene ein geradliniges Dreieck mit den Winkeln A, B, C und den gegenüberliegenden Seiten a, b, c gegeben. Wir ziehen von C aus die Senkrechte CD auf AB und erhalten dadurch zwei rechtwinklige Dreiecke ACD und BCD. Wir bezeichnen CD mit h und die Projektionen von a und b auf c mit α und β.

Falls wir nun das Dreieck ACD auf die in A berührende Grenzkugel projizieren, so erhalten wir auf der Grenzkugel ein ebenfalls rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse $k\cos\Pi(b)$, der Kathete $k\sin\Pi(\beta)\cos\Pi(h)$ und dem gegenüberliegenden Winkel A oder $\pi-A$ jenachdem A kleiner oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist. Also ist

$$\sin A = \frac{\sin\Pi(\beta)\cos\Pi(h)}{\cos\Pi(b)}$$

Nach (15) ist aber

$$\sin\Pi(b) = \sin\Pi(h)\sin\Pi(\beta).$$

Falls wir aus diesen Gleichungen β eliminieren, so erhalten wir

$$\sin A = \cot\Pi(h)\cdot\operatorname{tg}\Pi(b).$$

In genau gleicher Weise ist natürlich

$$\sin B = \cot\Pi(h)\cdot\operatorname{tg}\Pi(a)$$

und also

$$\sin A : \sin B = \frac{1}{\operatorname{tg}\Pi(a)} : \frac{1}{\operatorname{tg}\Pi(b)}. \tag{19}$$

Nach (12) ist aber

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\Pi(a)} = i\sin\frac{a}{ki}$$

und wir erhalten somit schliesslich die allgemeine Formel, den s. g. *Sinussatz:*

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \frac{a}{ki} : \sin \frac{b}{ki} : \sin \frac{c}{ki}. \tag{20}$$

Aus dieser Formel lassen sich alle anderen Formeln der Trigonometrie ableiten. Man sieht das unmittelbar ein, wenn man bedenkt, dass die Gleichung (20) mit dem Sinussats der sphärischen Trigonometrie des Euklid'schen Raums formal zusammenfällt; sie unterscheidet sich nur dadurch, das der Kugelradius mit ki ersetzt ist.

21. Wir gehen jetzt zu der *aeqvidistanten Fläche* über und nehmen also auf ihr ein von aeqvidistanten Kurven gebildetes Dreieck an mit den Winkeln A, B, C und den Seiten a, b, c.

Wenn wir dieses Dreieck aut die Polarebene projizieren, so erhalten wir ein gradliniges Dreieck, das genau dieselben Winkel A, B und C aufweist. Seine Seiten seien a', b' und c'. Dann ist nach (20)

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \frac{a'}{ki} : \sin \frac{b'}{ki} : \sin \frac{c'}{ki}. \tag{21}$$

Nun lassen sich aber die Seiten a', b' und c' einfach durch bezw. a, b und c ausdrücken. Wir nehmen um dies zu zeigen auf einer aeqvidistanten Kurve zwei Punkte R und T und projizieren sie als R' und T' auf die Polare. Wir bezeichnen die Sehne RT mit σ und ihre Projektion $R'T'$ mit σ'. Weiter sei S der Mittpunkt der Sehne RT und S' die Projektion von S. Es ist dann S' der Mittpunkt von $R'T'$. SS' sei mit p' bezeichnet.

Wenn wir nun das Viereck $STT'S'$ auf die in S' berührende Grenzkugel projizieren, so geht es in ein Rechteck der Grenzkugel über, dessen gegenüberliegende Seiten also gleich lang sind. Folglich ist

$$\cos \Pi\left(\frac{\sigma'}{2}\right) = \sin \Pi(p') \cos \Pi\left(\frac{\sigma}{2}\right).$$

Lassen wir R und T sich einander unbegrenzt nähern, so entsteht hieraus durch Grenzübergang die Formel

$$d\sigma' = \sin \Pi(p)\, d\sigma$$

wo $d\sigma$ und $d\sigma'$ bezw. die Linienelemente der Kurve und der Polare und p den Abstand der Kurve von der Polare bedeuten. Hieraus folgt dann die Formel

$$\sigma' = \sigma \cdot \sin \Pi(p) \tag{22}$$

zwischen dem Bogen σ und seiner Projektion σ' auf der Polare.

Kehren wir nunmehr zur Formel (21) zurück, so ist nach (22)

$$a' = a \sin \Pi(p), \quad b' = b \sin \Pi(p), \quad c' = c \sin \Pi(p),$$

und infolgedessen nach (21)

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \frac{a \sin \Pi(p)}{ki} : \sin \frac{b \sin \Pi(p)}{ki} : \sin \frac{c \sin \Pi(p)}{ki}. \tag{23}$$

Dies ist die Grundformel der Trigonometrie auf der aeqvidistanten Fläche.

Die Gleichung (23) enthält die Formel (20) als Spezialfall für $p = 0$. Sie kann allgemein aufgefasst werden als die Grundformel der Trigonometrie des Bündels dritter Art, indem sie nämlich falls p von 0 bis ∞ variiert die Grundformel der Trigonometrie sämtlicher ortogogonalen Trajektorienflächen darstellt.

22. Wir gehen jetzt zur *Kugel* über und bezeichnen wieder die Winkel des Dreiecks mit A, B und C und die Längen der Seiten mit a, b und c.

Wir bezeichnen mit α, β und γ die zu a, b und c gehörenden Zentriwinkel und wollen vorläufig eine beziehung zwischen A, B, C, α, β und γ ableiten. Deshalb führen wir dieselbe Konstruktion wie in der Ebene aus und bekommen das rechtwinklige Dreieck ACD. Wir bezeichnen den zu CD hörenden Zentriwinkel mit $\varkappa$. Wird das Zentrum der Kugel mit O bezeichnet, so legen wir durch C eine Ebene senkrecht auf OA und bekommen das rechtwinklige Dreieck $A'CD'$ als Durchschnitt dieser Ebene mit der Ecke $OACD$.

In dem Dreieck $A'CD'$ ist der Winkel $A' = A$. Bezeichnen wir $A'C$ mit b' und CD' mit h', so ist nach Nr. 20

$$\sin A = \cot \Pi(h') \cdot \operatorname{tg} \Pi(b').$$

Aus dem ebenfalls rechtwinkligen Dreieck $OA'C$ erhalten wir

$$\sin \beta = \cot \Pi(b') \cdot \operatorname{tg} \Pi(r),$$

wo r der Radius der Kugel ist, und aus dem rechtwinkligen Dreieck $OD'C$

$$\sin \varkappa = \cot \Pi(h') \cdot \operatorname{tg} \Pi(r).$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt, dass

$$\sin A = \sin \varkappa \cdot \frac{1}{\sin \beta}.$$

In genau gleicher Weise bekommen wir

$$\sin B = \sin \varkappa \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

oder schliesslich die Grundformel

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma. \tag{24}$$

Die nächste Aufgabe ist nun, die Winkel α, β und γ durch die Längen a, b und c auszudrücken. Um dies leisten zu können kehren wir nach der Gleichung (6) zurück um zuerst die Beziehung zwischen einem Bogen auf einem Grenzkreis und der zugehörigen Sehne abzuleiten. Wir legen daselbst Grenzkreise mit der x-Achse als Achse durch O und den Punkt x und bezeichnen ihre Bögen zwischen der x-Achse und der Gerade g mit l_0 und l. Dann ist nach (14)

$$l = l_0 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x).$$

Andererseits ist nach (1)

$$l = k \cos \Pi(y).$$

Da aber nach (6)

$$k \cos \Pi(y) = k \cot \Pi(p) \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x),$$

so muss

(25) $$l_0 = k \cot \Pi(p)$$

sein.

Dies ist die Beziehung zwischen dem halben Grenzkreisbogen l_0 und der halben Sehne p.

Liegt nun ein beliebiger Kreis mit dem Radius r vor, so können wir ihn auf der Grenzkugel niedergelegt denken, so dass er daselbst einen Kreis mit dem Mittelpunkt O ausmacht. Seine Ebene steht dann senkrecht auf der Achse g_0 durch O. Bezeichnen wir den Radius auf der Grenzkugel mit σ, so ist nach (25)

$$\sigma = k \cot \Pi(r).$$

Ziehen wir nunmehr zwei Radien, die den Winkel α einschliessen, so begrenzen sie den Bogen a auf der Peripherie. Die entsprechenden Radien auf der Grenzkugel bilden ebenfalls mit einander den Winkel α und es ist also

$$a = \alpha \cdot \sigma$$

oder schliesslich nach der vorigen Gleichung

(26) $$a = \alpha \cdot k \cot \Pi(r).$$

Insbesondere ist *der Umfang des Kreises mit dem Radius r gleich* $2\pi k \cot \Pi(r)$.

Die Formel (26) giebt uns die gewünschte Beziehung zwischen dem Zentriwinkel und dem Bogen. Wenn wir nunmehr mit Hilfe von (26) die Ausdrücke für α, β und γ durch bezw. a, b und c in (24) eintragen, so lautet die Grundformel auf der Kugel

(27) $$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \frac{a}{k \cot \Pi(r)} : \sin \frac{b}{k \cot \Pi(r)} : \sin \frac{c}{k \cot \Pi(r)}.$$

23. Falls wir noch die *Grenzkugel* berücksichtigen, wo natürlich

(28) $$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c,$$

so haben wir die im Anfang dieser Abteilung gestellte Aufgabe erledigt. Wir haben nämlich für alle Arten von Sphären die zugehörige Trigonometrie entwickelt.

Es ist nun wieder besonders von Interesse zu sehen, wie die gefundenen Formeln (20), (23), (27) und (28) alle von derselben Formel, nämlich von der Formel (27) für verschiedene Werte von r geliefert werden.

Weil nämlich nach (12)

$$k \cot \Pi(r) = ki \sin \frac{r}{ki}$$

ist, so erhalten wir für $r = k \cdot \frac{\pi i}{2}$

$$k \cot \Pi\left(k \cdot \frac{\pi i}{2}\right) = ki.$$

und für $r = k \cdot \frac{\pi i}{2} + p$

$$k \cot \Pi\left(k \cdot \frac{\pi i}{2} + p\right) = ki \cos \frac{p}{ki} = \frac{ki}{\sin \Pi(p)}.$$

Also gehen die Formeln (20) und (23) aus (27) hervor, falls wir r gleich bezw. $k\frac{\pi i}{2}$ und $k\frac{\pi i}{2} + p$ setzen. Setzen wir schliesslich $r = \infty$, so geht die Formel (28) aus (27) hervor. Die Formel (27) ist folglich die gemeinsame Grundformel sämtlicher Sphären und wir können infolgedessen zusammenfassend den Satz aussprechen:

Auf allen Sphären gilt die Formel (27), *wo* r *den Radius der Sphäre bedeutet. Für die Kugel hat* r *einen reellen Wert, für die Ebene ist* $r = k \cdot \frac{\pi i}{2}$, *für die aeqvidistante Fläche* $r = k \cdot \frac{\pi i}{2} + p$ *und für die Grenzkugel* $r = \infty$ *zu setzen.*

Die Cayley'sche Maassbestimmung auf der Grenzkugel.

24. Wir kehren nunmehr zur anfänglichen Abbildung der Lobatscheffskij'schen Ebene auf die Grenzkugel zurück und wollen die bei dieser Abbildung auftretenden Maassverhältnisse zwischen der Ebene und der Grenzkugel näher in Betracht ziehen. Wir haben gefunden, dass eine Strecke der Ebene auf eine Grenzkreisstrecke abgebildet wird und dass also ein Winkel der Ebene auf einen von zwei Grenzkreisen eingeschlossenen Winkel übertragen wird. Wir werden nun zeigen, *dass die Maasszahlen der Strecke und des Winkels in der Ebene einfach mit denjenigen Maasszahlen zusammenfallen, die ihren Abbildern auf der Grenzkugel zukommen, falls wir auf der Grenzkugel eine Cayley'sche Maassbestimmung mit dem Kalottenrand als absolutem Gebilde durchführen.*

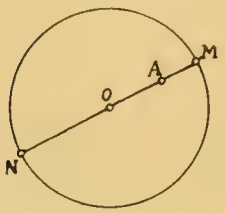


Fig. 2.

Wir fangen mit der *Strecke* an.

In nebenstehender Figur (Fig. 2). sehen wir auf der Grenzkugel das Abbild OA einer von O auslaufenden Strecke OA von der Länge r in der Ebene. Die Punkte M und N sind diejenigen Punkte, wo der von O und A bestimmte Grenzkreis, der das Abbild der von O und A bestimmten Geraden ist, den Kalottenrand schneidet. M und N sind also die Abbilder der unendlich fernen Punkte der genannten Geraden.

Nach (1) ist

$$\mathrm{OA} = k \cos \Pi(r)$$

woraus folgt, dass

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} \Pi(r) = \frac{k - \mathrm{OA}}{k + \mathrm{OA}}$$

oder

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} \Pi(r) = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{NA}}.$$

Nach der Formel (11) ist also

$$e^{-\frac{2r}{k}} = \frac{AM}{NA}$$

oder schliesslich

(29) $$r = \frac{k}{2} \log \frac{NA}{AM}.$$

Liegt nun eine Strecke AB vor, deren Abbild AB die nebenstehende Lage hat, so ist nach (29)

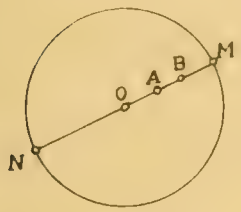


Fig. 3.

$$\overline{OB} = \frac{k}{2} \log \frac{NB}{BM}$$

$$\overline{OA} = \frac{k}{2} \log \frac{NA}{AM}$$

und also

(30) $$r = \frac{k}{2} \log \frac{NB}{BM} : \frac{NA}{AM}.$$

Haben wir schliesslich die nebenstehende Figur, so ist

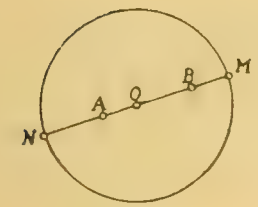


Fig. 4.

$$OB = \frac{k}{2} \log \frac{NB}{BM}$$

$$OA = \frac{k}{2} \log \frac{AM}{NA}$$

und also

(31) $$r = \frac{k}{2} \log \frac{NB}{BM} : \frac{NA}{AM}.$$

Wir schreiben

$$\lambda = \frac{NB}{BM} : \frac{NA}{AM}$$

und haben also allgemein

(32) $$r = \frac{k}{2} \log \lambda.$$

Hier bedeutet λ das Doppelverhältniss der vier Punkte N, A, B, M.

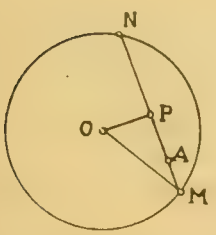


Fig. 5.

Wir betrachten in nebenstehender Figur das Abbild PA einer Strecke PA, die senkrecht von einer durch O gehenden Geraden OP ausläuft. Dann ist nach (8)

$$PA = k \sin \Pi(OP) \cos \Pi(r)$$

Es ist aber der Winkel $\Pi(OP)$ genau gleich dem Winkel POM auf der Grenzkugel, woraus folgt, dass

$$k \sin \Pi(OP) = PM$$

ist. Also ist nach den beiden letzten Gleichungen

$$\cos \Pi(r) = \frac{PA}{PM}$$

und folglich wie oben

(33) $$r = \frac{k}{2} \log \frac{NA}{MA}.$$

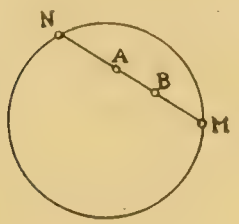


Fig. 6.

Aus (33) wird nun ganz wie oben geschlossen, dass für eine beliebige Strecke

$$r = \frac{k}{2} \log \frac{NB}{BM} : \frac{NA}{AM}$$

oder

(34) $$r = \frac{k}{2} \log \lambda.$$

Wir haben also ganz allgemein bewiesen, dass die Maasszahl einer Strecke in der Lobatscheffskij'schen Ebene gleich ist derjenigen Maasszahl, die das Abbild auf der Grenzkugel bekommt, falls wir die Cayley'sche Maassbestimmung mit dem Kalottenrand als absolutem Gebilde zu Grunde legen.

25. Es erübrigt noch den *Winkel* zu betrachten.

Wir nehmen zuerst einen Winkel w, dessen einer Schenkel durch O hindurchgeht, und wollen vorläufig eine Beziehung zwischen w und seiner Projektion φ auf der Grenzkugel ableiten.

Wir bezeichnen die Entfernung der Winkelspitze von O mit h und ziehen von O die Senkrechte a auf den anderen Schenkel des Winkels; den so abgegrenzten Teil des Schenkels nennen wir b.

In dem so entstandenen rechtwinkligen Dreieck ist der Winkel bei O ersichtlich $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Also erhalten wir

$$\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} \Pi(b) \cos \Pi(a)$$
$$\cot \varphi = \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b)$$

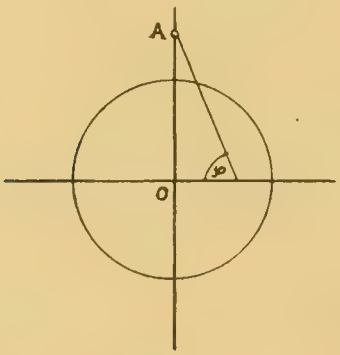


Fig. 7.

und folglich

$$\operatorname{tg} w \cdot \cot \varphi = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$$

oder nach (15)

$$\operatorname{tg} w \cdot \cot \varphi = \sin \Pi(h),$$

welche Gleichung wir schliesslich schreiben

(35) $$\operatorname{tg} w = \sin \Pi(h) \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Dies ist die gewünschte Beziehung zwischen w und φ.

Wir betrachten nunmehr das nebenstehende Bild auf der Grenzkugel. Der Einfachheit halber haben wir den durch O gehenden Schenkel von φ zur ξ-Achse gewählt. Aus dieser Figur sehen wir, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{OA}}{k\cos\Pi(h)}$$

ist. In Verbindung mit (35) giebt das die Gleichung

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{tg}\Pi(h)}{k}\,\mathrm{OA}.$$

Setzen wir

$$\sigma = \frac{k}{i\operatorname{tg}\Pi(h)} \tag{36}$$

so nimmt diese Gleichung die Form an

$$\operatorname{tg} w = \frac{1}{i}\,\frac{\mathrm{OA}}{\sigma}. \tag{37}$$

Aus (37) folgt nun, dass

$$e^{2iw} = \frac{\sigma + \mathrm{OA}}{\sigma - \mathrm{OA}}$$

oder

$$w = \frac{1}{2i}\log\frac{\sigma + \mathrm{OA}}{\sigma - \mathrm{OA}}. \tag{38}$$

Hier hat σ eine bestimmte geometrische Bedeutung. Ziehen wir nämlich vom Punkt $k\cos\Pi(h)$ auf der ξ-Achse die Grenzkreistangenten des Kalottenrands $\xi^2+\eta^2=k^2$, so schneiden diese die η-Achse in den Punkten

$$\pm\frac{k\cdot k\cos\Pi(h)}{\sqrt{k^2\cos^2\Pi(h)-k^2}},$$

d. h. in den Punkten

$$\pm\frac{k}{i\operatorname{tg}\Pi(h)} = \pm\sigma.$$

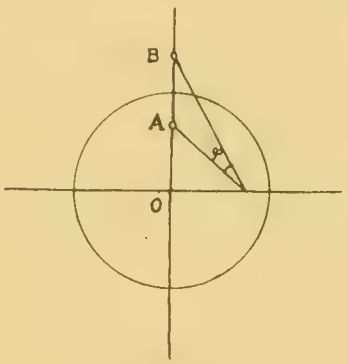


Fig. 8.

Betrachten wir jetzt in der nebenstehenden Figur den Winkel φ als Abbild eines Winkels w in der Ebene, so ist natürlich nach (38)

$$w = \frac{1}{2i}\log\frac{\sigma+\mathrm{OB}}{\sigma-\mathrm{OB}}:\frac{\sigma+\mathrm{OA}}{\sigma-\mathrm{OA}}. \tag{39}$$

Aus der folgenden Figur folgt in genau derselben Weise genau dieselbe Formel.

In der Formel (39), zu der wir hiermit gekommen sind, hat der Ausdruck

$$\mu = \frac{\sigma+\mathrm{OB}}{\sigma-\mathrm{OB}}:\frac{\sigma+\mathrm{OA}}{\sigma-\mathrm{OA}}$$

eine einfache Bedeutung. Er ist nämlich das Doppelverhältniss derjenigen vier Strahlen, die von den beiden

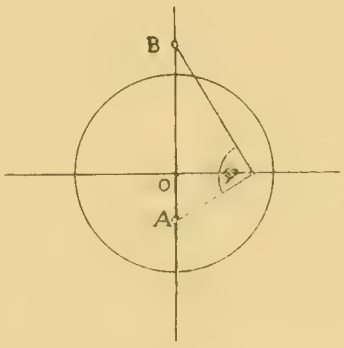


Fig. 9.

Schenkeln des Winkels und den beiden nach den Punkten $+\sigma$ und $-\sigma$ hinlaufenden von der Winkelspitze ausgehenden Grenzkreisen bestehen. Da diese aber wie gezeigt wurde den Kalottenrand berühren, so haben wir in der Gleichung

$$w = \frac{1}{2i} \log \mu \tag{40}$$

eine Formel, die zeigt, dass die Maasszahlen der Winkel in der Lobatschelfskij'schen Ebene mit denjenigen Maasszahlen zusammenfallen, die den Abbildern auf der Grenzkugel zukommen, falls wie eine Cayley'sche Maassbestimmung mit dem Kalottenrand als absolutem Gebilde durchführen.

26. Wir können nunmehr mit Anwendung bekannter Sätze aus der analytischen Geometrie neue Ausdrücke für r und w aufschreiben.

Wir bezeichnen deshalb die Endpunkte des Abbilds von r mit $(\xi_1\ \eta_1)$, $(\xi_2\ \eta_2)$ und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \Phi &= \xi^2 + \eta^2 - k^2, \\ \Phi_1 &= \xi_1^2 + \eta_1^2 - k^2, \\ \Phi_2 &= \xi_2^2 + \eta_2^2 - k^2, \\ \varphi &= \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 - k^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\Phi = 0$$

die Gleichung des absoluten Gebildes in Punktkoordinaten. Nach bekannten Sätzen ist dann

$$\lambda = \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \Phi_1 \Phi_2}}{\varphi - \sqrt{\varphi^2 - \Phi_1 \Phi_2}}$$

und also

$$r = \frac{k}{2} \log \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \Phi_1 \Phi_2}}{\varphi - \sqrt{\varphi^2 - \Phi_1 \Phi_2}}. \tag{41}$$

Diese letzte Formel kann auch in der Form geschrieben werden

$$r = i k \arccos \frac{\varphi}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}}. \tag{42}$$

Wir haben hiermit r als Funktion von ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 dargestellt.

Wir können einen gleichartigen Ausdruck auch für den Winkel w ableiten. Dabei haben wir nur zu beachten, dass wir die Grenzkreise auf der Grenzkugel genau so durch Koordinaten festlegen können wie die Geraden in der Euklid'schen Ebene. Wir sprechen infolgedessen von Linienkoordinaten auf der Grenzkugel und verstehen hiermit die Koeffizienten u und v in der Gleichung des Grenzkreises

$$u\xi + v\eta + 1 = 0.$$

Falls wir die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 - k^2 = 0$$

in Linienkoordinaten umrechnen, so bekommen wir genau so wie in der Euklid'schen Ebene

$$k^2(u^2+v^2)-1=0.$$

Wir bezeichnen also jetzt die Koordinaten der Schenkel des Winkels w mit $(u_1\,v_1)$ und $(u_2\,v_2)$ und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}\Psi &= k^2(u^2+v^2)-1,\\ \Psi_1 &= k^2(u_1^2+v_1^2)-1,\\ \Psi_2 &= k^2(u_2^2+v_2^2)-1,\\ \psi &= k^2(u_1u_2+v_1v_2)-1.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\mu=\frac{\psi+\sqrt{\psi^2-\Psi_1\Psi_2}}{\psi-\sqrt{\psi^2-\Psi_1\Psi_2}}$$

und folglich

$$r=\frac{1}{2i}\log\frac{\psi+\sqrt{\psi^2-\Psi_1\Psi_2}}{\psi-\sqrt{\psi^2-\Psi_1\Psi_2}} \tag{43}$$

oder schliesslich

$$w=\arccos\frac{\psi}{\sqrt{\Psi_1\Psi_2}}. \tag{44}$$

Hiermit haben wir w als Funktion von u_1, v_1, u_2, v_2 dargestellt.

27. Die Formeln (42) und (44) sowie schon die Formeln (34) und (40) stellen mehrdeutige Ausdrücke für r und w dar.

Knüpfen wir besonders an die Formel (42) an, so merken wir uns zuerst, dass $\varphi^2-\Phi_1\Phi_2>0$ ist, was ja nur aussagt, das die von $(\xi_1\,\eta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2)$ bestimmte Punktreihe reelle Punkte mit $\Phi=0$ gemein hat. Weiter ist aber $\Phi_1\Phi_2>0$, weil $(\xi_1\,\eta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2)$ beide innerhalb der Kurve $\Phi=0$ liegen. Also ist

$$\frac{\varphi}{\sqrt{\Phi_1\Phi_2}}$$

eine reelle Grösse, deren Modul grösser als 1 ist.

Hieraus folgt, dass es unter den Werten von $\arccos\frac{\varphi}{\sqrt{\Phi_1\Phi_2}}$, wo die Wurzel mit doppeltem Vorzeichen zu rechnen ist, zwei entgegengesetzte rein imaginäre giebt. Falls wir diese mit $\pm\frac{r_0}{k\,i}$ bezeichnen, so stellt der Ausdruck

$$\pm r_0+\nu\,k\,\pi i$$

sämtliche Werte von r nach der Gleichung (42) dar.

In der Gleichung (44) wieder ist $\psi^2-\Psi_1\Psi_2<0$, was ja nur aussagt, dass das von den Grenzkreisen $(u_1\,v_1)$ und $(u_2\,v_2)$ bestimmte Grenzkreisbüschel keine reellen Grenzkreise enthält, die der Kurve $\Psi=0$ angehören. Also ist auch $\Psi_1\Psi_2>0$ und infolgedessen

$$\frac{\psi}{\sqrt{\Psi_1\Psi_2}}$$

eine reelle Grösse, deren Modul kleiner als 1 ist. Das besagt aber, dass alle Werte von w aus der Formel (44) reel sind und in dem Ausdruck

$$\pm w_0 + \nu\pi$$

enthalten, wo $-\frac{\pi}{2} < w_0 < \frac{\pi}{2}$.

27. Es ist nun ein nahe liegender Gedanke die hiermit gewonnenen Formeln auf die ganze Grenzkugel auszudehnen. Wir bekommen dadurch zu jedem Punktpaar $(\xi_1\,\eta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2)$ die durch die Formeln (34) und (42) definierten Werte r und zu jedem Grenzkreispaar $(u_1\,v_1)$ und $(u_2\,v_2)$ die durch die Formeln (40) und (44) festgelegten Werte w.

Falls wir die Sache noch einmal zusammenfassen, so können wir sagen. Jedes Punktpaar $(\xi_1\,\eta_1)$, $(\xi_2\,\eta_2)$ bestimmt einen Grenzkreis oder eine Punktreihe die mit dem Kalottenrand oder der Ordnungskurve $\Phi = 0$ zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein hat. Es ist dann

$$r = \frac{k}{2}\log\,\lambda,$$

wo λ das Doppelverhältniss der vier Punkte bedeutet. In genau gleicher Weise legt jedes Grenzkreispaar $(u_1\,v_1)$, $(u_2\,v_2)$ ein Grenzkreisbüschel fest, welches mit der Klassenkurve $\Psi = 0$ zwei reelle oder imaginäre Grenzkreise gemein hat. Dabei ist

$$w = \frac{1}{2i}\log\,\mu,$$

wo μ das Doppelverhältniss der vier Grenzkreise ist. Besonders ist dabei hervorzuheben, dass, wenn das Punktpaar innerhalb des Kalottenrands liegt oder wenn das Grenzkreispaar seinen Schnittpunkt innerhalb des Kalottenrands hat, unter den Werten r und w auch die Maasszahlen der entsprechenden Strecke und des entsprechenden Winkels in der Ebene sich befinden.

Falls wir dies durchführen, so tritt uns sofort eine Beziehung entgegen. Die zwei Grenzkreise eines Büschels, die der Klassenkurve $\Psi = 0$ angehören, berühren nämlich die Kurve in den Durchschnittspunkten zwischen der Kurve und der Polare des Büschelzentrums. Daraus folgt dann, dass zwei Grenzkreise des Büschels mit jenen berührenden Grenzkreisen genau dasselbe Doppelverhältniss bilden, wie die Durchschnittspunkte der beiden Grenzkreise

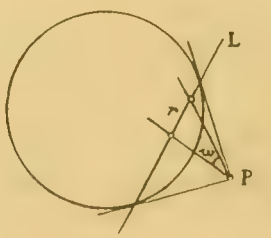


Fig. 10.

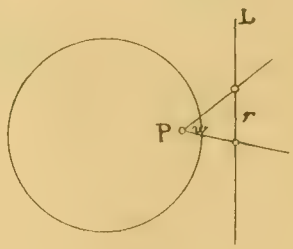


Fig. 11.

und der Polare mit den Schnittpunkten zwischen der Polare und der Kurve.. Es ist also $\lambda = \mu$ oder

$$\cos^2 \frac{r}{ki} = \cos^2 w \tag{45}$$

wo r und w zu der Strecke und dem Winkel in nebenstehender Figur gehören. P und L sind dabei Pol und Polare in Bezug auf den Kalottenrand.

Die Zykeln.

23. Die hiermit eingeführten neuen Anschauungen ermöglichen in die Natur der Abbilder der Zykeln näher einzudringen.

Betrachten wir zuerst den Kreis, so ist dieser die ortogonale Trajektorie eines Strahlenbüschels erster Art und hat die Eigenschaft

$$r = \text{const.},$$

wo r den Abstand eines Punkts der Kurve von dem Büschelzentrum bedeutet.

Falls wir nun auf die Grenzkugel projizieren, so wird die daselbst entstandene Kurve die Eigenschaft

$$\lambda = \text{const.}$$

besitzen, wo dann λ das Doppelverhältniss des Kurvenpunkts mit dem festen Büschelzentrum und den beiden Schnittpunkten zwischen dem Büschelstrahl und dem Kalottenrand bedeutet. Das Abbild des Kreises ist also der geometrische Ort aller durch einen festen Wert jenes Doppelverhältnisses karaktärisierten Kurven.

Bei der aeqvidistanten Kurve liegt das entsprechende Büschelzentrum auf der Grenzkugel ausserhalb des Kalottenrands und genau in dem Pol des Abbilds der Büschelpolare. Da nun die Kurve in der Ebene aeqvidistant von der Büschelpolare ist, so besagt dies, dass das Abbild auf der Grenzkugel die Grenzkreise des Büschels so schneidet, dass der Schnittpunkt mit den drei Punkten, in denen der betreffande Grenzkreis den Kalottenrand und das Abbild der Büschelpolare scheidet, ein festes Doppelverhältniss bildet. Da aber auch das Büschelzentrum mit denselben Punkten ein festes Doppelverhältnisss bildet, indem sie nämlich harmonisch liegen, so folgt, dass auch das Abbild der aeqvidistansen Kurve das zugehörige Grenzkreisbüschel so schneidet, dass der Schnittpunkt mit dem Büschelzentrum und den Schnittpunkten zwischen dem Grenzkreis und dem Kalottenrand ein festes Doppelverhältniss bildet.

Das Abbild des Grenzkreises bildet ersichtlich denjenigen Grenzfall, der entsteht, wenn das Büschelzentrum auf dem Kalottenrand liegt.

Falls wir nach der Formel (42) zurückgreifen, können wir die Gleichung der oben besprochenen Abbilder der Zykeln in den Koordinaten ξ und η hinschreiben. Wir erhalten

$$\frac{q^2}{\varphi_1 \varphi_2} = \cos^2 \frac{r}{ki}. \tag{46}$$

In dieser Gleichung ist z. B. (ξ_1, η_1) das feste Büschelzentrum und (ξ_2, η_2) ein Punkt auf der Kurve. r ist die konstante Cayley'sche Masszahl desjenigen Grenzkreisbogens, der (ξ_2, η_2) mit (ξ_1, η_1) verbindet.

Die Glechung (46) stellt ersichtlich eine Kurve zweiter Ordnung dar. Man sieht übrigens unmittelbar dass sie der durch den Kalottenrand und die doppelt gezählte Polare des Punkts (ξ_1, η_1) festgelegten Schaar von Kurven zweiter Ordnung angehört.

Übrigens kann bemerkt werden, dass die Polare selbst für $r = k\frac{\pi i}{2}$ hervortritt. Weiter findet man, dass die Abbilder der aeqvidistanten Kurven durch $r = k\frac{\pi i}{2} + p$ karaktärisiert sind. Das steht alles in Übereinstimmung mit unseren früheren Anschauungen.

Projektive Begründung der Maasszahlen r und w.

29. Wir wollen jetzt zur Nummer 12 zurückkehren und von da aus die ganze folgende Entwicklung gewissermassen in umgekehrter Ordnung noch einmal durchlaufen. Wir wollen nämlich, indem wir uns nur auf die Abbildung der Ebene auf die Grenzkugel beziehen, durch Hinzuziehung projektiver Anschauungen die Cayley'sche Maassbestimmung einführen und von da aus die ganze oben durchgelaufene Überlegung neu begründen.

Weil die Geometrie auf der Grenzkugel euklidisch ist, können wir frei mit den Begriffen der Euklid'schen Geometrie auf der Grenzkugel operieren. Insbesondere fassen wir jetzt die *Kollineationen* ins Auge, die dann genau so wie in der Euklid'schen Ebene definiert werden, wobei die Rolle der Geraden von den Grenzkreisen übernommen wird.

Unter den Kollineationen giebt es dann insbesondere solche, die das Innere der Kalotte in sich überführen. Diese bilden ersichtlich eine Gruppe Γ.

Die formale Übereinstimmung mit der Euklid'schen Ebene wird vollständig, falls wir die Koordinaten ξ und η benützen. Die Mannigfaltigkeit der Kollineationen deckt sich dann mit der Mannigfaltigkeit der linearen Substitutionen

$$\xi' = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a_3\xi + b_3\eta + c_3},$$

$$\eta' = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a_3\xi + b_3\eta + c_3},$$

und die Gruppe Γ besteht ersichtlich aus denjenigen Substitutionen dieser Form, die die Kurve

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2$$

in sich überführen.

Dies vorausgesetzt, stellen wir uns die Aufgabe zu zeigen, *dass die Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen in der Ebene und die Gruppe Γ auf der Grenzkugel durch Projektion aus einander hervorgehen*. Da, wie wir unmittelbar sehen, jede Bewegung oder Umlegung zu einer Substitution in Γ Anlass giebt, erübrigt nur noch das umgekehrte zu zeigen.

Durch Projektion entsteht in der Ebene aus der Gruppe Γ ersichtlich eine Gruppe G von *affinen Kollineationen*. Wir werden die hiermit definierte Gruppe G näher untersuchen.

Wir beobachten dabei sogleich, dass ein Grenzkreisbüschel, dessen Zentrum innerhalb der Kalotte, auf dem Kalottenrand oder ausserhalb der Kalotte liegt, in ein ebensolches Büschel durch Vermittelung einer Substitution in Γ übergeht. Dies besagt, dass die Büschel der Ebene durch eine Kollineation der Gruppe G in Büschel derselben Art übergehen.

Liegt besonders ein Büschel dritter Art vor, so ist das Abbild der Büschelpolare auf der Grenzkugel die Polare des Zentrums des daselbst entstandenen Grenzkreisbüschels in Bezug auf den Kalottenrand. Da nun bei jeder Substitution aus Γ Pol und Polare in Bezug auf den Kalottenrand wiederum Pol und Polare werden, so sehen wir also, dass die Büschel dritter Art in der Ebene durch G so auf Büschel derselben Art übertragen werden, dass die Büschelpolare des gegebenen Büschels in die Polare des transformierten Büschels übergeht. Dieses Resultat können wir auch folgendermassen aussagen.

Die Gruppe G führt einen rechten Winkel in einen rechten Winkel über.

30. Jede Substitution in Γ lässt einen bestimmten Punkt und seine Polare in Bezug auf den Kalottenrand fest. Schneidet dabei die Polare den Kalottenrand, kann die Kollineation die beiden Seiten der Polare vertauschen und wird dann *uneigentlich* genannt. Sonst nennen wir sie immer *eigentlich*. Die Niveaukurven der eigentlichen Substitution sind ersichtlich die Grenzkreise desjenigen Büschels, dessen Zentrum in dem festen Punkt liegt.

Es giebt nun weiter zu jeder eigentlichen Substitution in Γ eine Schaar von Bahnkurven. Die Bahnkurven bilden dabei die durch den Kalottenrand und die doppelt gezählte festbleibende Polare festgelegte Schaar von Kurven zweiter Ordnung, also genau diejenige Kurvenschaar, die in der vorigen Abteilung erwähnt wurde. Dabei muss als besonders wichtig für unsere Zwecke hervorgehoben werden, dass alle Kurven der Schaar, die innerhalb der Kalotte liegen, denjenigen Grenzkreis, der O mit dem festen Punkt verbindet, senkrecht schneiden. Es sind somit der durch diesen Schnittpunkt gehende Grenzkreis des Büschels und der die Bahnkurve berührende Grenzkreis harmonische Polaren in Bezug auf den Kalottenrand.

Nun ist zu beachten, dass der feste Punkt auf der Grenzkugel eine stetige Schaar von eigentlichen Substitutionen in Γ festlegt, die dieselben Niveau- und Bahnkurven haben. Es kann somit jede beliebige Niveaukurve mit jeder anderen zur Deckung gebracht werden durch eine dieser Substitutionen in Γ. Insbesondere kann die durch O gehende Niveaukurve mit jeder beliebigen zur Deckung gebracht werden. Wir können somit den Satz aussprechen.

Die Bahnkurve schneidet jeden Grenzkreis des Büschels so, dass dieser und der berührende Grenzkreis harmonische Polaren sind.

Jenachdem der feste Punkt innerhalb der Kalotte, auf dem Rand oder ausserhalb liegt, bekommen wir drei verschiedene Arten von eigentlichen Substitutionen in Γ, die wir dann wieder Substitutionen erster, zweiter und dritter Art nennen.

Falls wir nunmehr auf die Ebene projizieren, so entsteht aus der eigentlichen Substitution in Γ eine eigentliche Substitution in G, der wir dieselbe Art zuteilen. Aus den Niveau- und Bahnkurven der Substitution in Γ entstehen die entsprechenden Kurven der Substitution in G. Insbesondere sehen wir sogleich, dass die Niveaukurven ein Strahlenbüschel bilden, dessen Art mit der Art der Substitution zusammenfällt. Bei der Substitution dritter

Art geht die Büschelpolare aus der festbleibenden Polare auf der Grenzkugel hervor und wird also bei der entsprechenden Substitution in sich verschoben.

Was nun die Bahnkurven betrifft, so gehen sie aus den Bahnkurven auf der Grenzkugel durch Projektion hervor. Da harmonische Polaren bei der Projektion in auf einander senkrechte Geraden übergehen, können wir aus unserem obigen Satz schliessen, dass die Bahnkurven in der Ebene das Strahlenbüschel der Niveaukurven ortogonal schneiden und also Zykeln sind.

Zusammenfassend können wir den Satz aussprechen:

Zu jeder eigentlichen Substitution in G gehört ein Strahlenbüschel in der Ebene, dessen Strahlen Niveaukurven der Substitution sind. Die Zykeln des Strahlenbüschels sind Bahnkurven der Substitution. Umgekehrt gehören zu jedem Büschel in der Ebene unendlich viele eigentliche Substitutionen in G.

31. Hiermit sind wir nun soweit gekommen, dass wir zeigen können, dass jede eigentliche Substitution in G eine Bewegung ist.

Wir bemerken dann zuerst, dass nach der obigen Entwickelung jede Strecke, die auf einem Büschelstrahl liegt, bei einer zugehörigen Substitution ihre Länge behält. Sowohl die gegebene Strecke als ihr Abbild messen nämlich dabei den Abstand zwischen zwei Zykeln desselben Büschels.

Es giebt aber eine andere Art von Strecken, deren Invarianz unmittelbar hervorgeht. Haben wir nämlich zwei zum selben Büschel gehörenden Zykeln, und ziehen eine Sehne der einen, die die andere berührt, so sind alle diese Sehnen gleich. Hieraus folgt, dass jede von einem Büschelstrahl senkrecht auslaufende Strecke ihre Länge behält bei den zum Büschel gehörenden Substitutionen. Dies gilt noch, wenn die Strecke bei einer Substitution dritter Art auf der Büschelpolare liegt. Es kann nämlich eine derartige Strecke AB aufgefasst werden als Ortogonalprojektion einer Strecke A_0B_0, die senkrecht auf dem durch B gehenden Büschelstrahl steht. Das dreirechtwinklige Viereck ABB_0A_0 geht in das ebenfalls dreirechtwinklige Viereck $A'B'B_0'A_0'$ über. Dabei ist $A_0B_0 = A_0'B_0'$, $AA_0' = A'A_0'$ und $BB_0 = B'B_0'$ und infolgedessen $AB = A'B'$.

Ist nun AB eine ganz beliebige Strecke so legen wir durch A und B Büschelstrahlen der betrachteten Substitution. Fallen dann diese Strahlen zusammen, so liegt AB auf einem Büschelstrahl und behält seine Länge. Steht die Strecke AB senkreht auf dem einen Strahl, so behält sie auch ihre Länge. Trifft keine dieser Möglichkeiten zu, so projizieren wir AB auf den einen Strahl und bekommen das rechtwinklige Dreieck ABC. Dieses geht in das ebenfalls rechtwinklige Dreiek $A'B'C'$ über, wo nach dem eben Gesagten $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$. Es ist also $AB = A'B'$.

Hiermit haben wir also die Invarianz der Maasszahl r gegenüber jeder eigentlichen Substitution in G nachgewiesen. Hiermit ist dann auch die Invarianz der Maasszahl w sichergestellt, wie aus den Sätzen über kongruente Dreiecke geschlossen werden kann. Die eigentliche Substitution in G ist somit eine Bewegung (*Drehung*).

Wir betrachten nun schliesslich, wenn der festbleibende Punkt asserhalb der Kalotte liegt, diejenige uneigentliche Kollineation, die wir kurz als eine *Umklappung* um die Polare

bezeichnen können und die durch die Polare eindeutig festgelegt ist. Bei der Projektion entsteht aus der Polare eine Gerade in der Ebene. Der Umlegung der Ebene um diese Gerade entspricht auf der Grenzkugel eine uneigentliche Kollineation, die dann ersichtlich mit der genannten Umklappung identisch sein muss. Es geht somit jede Umklappung in Γ in eine Umlegung in der Ebene über.

Hiermit ist dann gezeigt, dass die Gruppe G aus lauter Bewegungen und Umlegungen zusammengesetzt ist. Folglich ist auch bewiesen, dass die Gruppe Γ und die Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen aus einander durch Projektion hervorgehen; die Gruppe G fällt mit der letzteren Gruppe zusammen.

32. Die obigen Entwickelungen zeigen, dass die Grössen r und λ stetige, ein-eindeutige Funktionen von einander sind. Speziell geht die Ein-eindeutigkeit aus der Tatsache hervor, dass jedesmal, wo die eine Grösse in sich übergeht, dasselbe mit der anderen stattfindet.

Sind nun drei Punkte A, B, C auf derselben Geraden der Ebene und ihre Abbilder A, B, C auf der Grenzkugel gegeben und setzen wir $AB = r_1$, $BC = r_2$, $AC = r_{12}$ und bezeichnen die entsprechenden Werte von λ mit λ_1, λ_2 und λ_{12}, so ist, falls B zwischen A und C liegt

$$r_{12} = r_1 + r_2.$$

Auf der Grenzkugel ist dabei nach einer bekannten Eigenschaft des Doppelverhältnisses

$$\lambda_{12} = \lambda_1 \lambda_2.$$

Hieraus folgt dann in bekannter Weise dass

$$r = C \log \lambda, \tag{47}$$

wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist.

In genau gleicher Weise folgt, dass die reellen Grössen

$$w \quad \text{und} \quad \frac{1}{i} \log \mu$$

ebenfalls nur durch einen konstanten Faktor sich unterscheiden und dass also

$$w = \frac{C'}{i} \log \mu. \tag{48}$$

Hierbei ist beidemal der Hauptwert des Logaritmus genommen.

Hiermit sind wir durch unsere neuen Entwickelungen wiederum zu der Cayley'schen Maassbestimmung gekommen. Dabei haben wir ersichtlich einen Weg eingeschlagen, der den wahren Charaktär der hier auftretenden Beziehungen besser ins Licht bringt.

Die Konstanten C und C' hängen natürlich von den Maasseinheiten ab, die wir in der Ebene einführen. Falls wir die Einheit festlegen, so wird dadurch die zugehörige Konstante bestimmt.

Wählen wir nun insbesondere die Winkeleinheit so, dass der Vollwinkel die Maasszahl 2π erhält, so kann C' durch eine einfache Bemerkung ausgewertet werden. Wir wissen näm-

lich, wie wir öfters hervorgehoben haben, dass zwei senkrechte Geraden in der Ebene in zwei harmonische Polaren auf der Grenzkugel übergehen. Es sind also $w=\frac{\pi}{2}$ und $\mu=-1$ entsprechende Werte, woraus folgt, dass

$$C'=\frac{1}{2}$$

oder also

(49) $$w=\frac{1}{2i}\log\mu.$$

Die Festlegung der Längeneinheit wollen wir fortan so durchführen, dass die Maasszahl des Kalottenradius, längs der Grenzkugel gemessen, gleich k ist. Das führt natürlich zu einer Bestimmung von C, wie wir auch bald sehen werden. Vorläufig wollen wir aber zeigen, dass die Gleichung (47) die Frage nach dem analytischen Ausdruck des Parallelwinkels $\Pi(x)$ erledigt.

33. Wir hatten in Nr. 11 bewiesen, dass ein Punkt A der Ebene, dessen Abstand vom Anfangspunkt O gleich x ist, auf einen Punkt A der Grenzkugel abgebildet wird, dessen entsprechender Abstand ξ von O auf der Grenzkugel aus der Formel

(50) $$\xi=k\cos\Pi(x)$$

berechnet wird. Hieraus folgt, dass

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)=\frac{k-\xi}{k+\xi}.$$

Falls wir die Schnittpunkte des durch O und A bestimmten Grenzkreises mit dem Kalottenrand M und N nennen, wo die vier Punkte in der Reihenfolge M O A N folgen, so ist ersichtlich die rechte Seite der letzten Gleichung gleich $\frac{1}{\lambda}$, wo λ das Doppelverhältniss der vier genannten Punkte bedeutet, und wir haben folglich

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)=\frac{1}{\lambda}.$$

Nach (47) ist aber

$$\lambda=e^{\frac{x}{C}}$$

und es ist also

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-\frac{x}{C}}$$

oder schliesslich

(51) $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-\frac{x}{2C}}.$$

Dies ist die gewünschte analytische Beziehung für den Parallelwinkel $\Pi(x)$.

34. Von hier aus lässt sich nunmehr die Bestimmung der Konstante C vollziehen.

Falls wir nämlich von O aus die Senkrechte OA' auf den projizierenden Strahl AA ziehen und mit p bezeichnen, so ist OAA' ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse x, der Kathete p und dem von diesen eingeschlossenen Winkel $\frac{\pi}{2} - \Pi(p)$. Zeichnen wir dieses Dreieck in der Ebene, so dass die Spitze des genannten Winkels in O liegt, und projizieren auf die Grenzkugel, so erhalten wir ein ebenfalls rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse $k \cos \Pi(x)$, der Kathete $k \cos \Pi(p)$ und dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \Pi(p)$. Es ist also

$$\frac{k \cos \Pi(p)}{k \cos \Pi(x)} = \sin \Pi(p)$$

oder

$$k \cos \Pi(x) = k \cot \Pi(p),$$

woraus folgt, dass

(52) $$\xi = k \cot \Pi(p).$$

Mit Hilfe von (50) und (52) lässt sich nunmehr genau so wie in Nr. 14 die Bestimmung von C in (51) durchführen. Es wird genau wie daselbst

$$2C = k$$

oder

$$C = \frac{k}{2}.$$

Folglich haben wir für den Parallelwinkel die schliessliche Formel

(53) $$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

oder genau dieselbe Formel wie früher gefunden. Hierbei ist dann die Längeneinheit so gewählt, dass die Maasszahl des Radius des Kalottenrands gleich k ist.

Hiermit haben wir auch den vollen Anschluss mit den Entwickelungen der früheren Abschnitte hergestellt und können von jetzt an wieder alle früheren Resultate ableiten. Besonders können wir die Trigonometrie der Ebene und auf Grund derselben dann überhaupt die Trigonometrie der Sphären aufstellen. Es kann aber von Interesse sein zu sehen, dass wir die in dieser Hinsicht grundlegende Trigonometrie der Ebene einfach von der Cayley'schen Massbestimmung aus begründen können. Dabei wollen wir die Cayley'sche Maassbestimmung wie, in Nr. 27 geschah, auf die ganze Grenzkugel ausdehnen und insbesondere die dabei gefundene Formel (45) benützen.

Neue Begründung der Trigonometrie der Ebene.

35. Wir nehmen in der Ebene ein Dreieck, das von drei Geraden L_1, L_2 und L_3 gebildet wird und bezeichnen den von L_ϱ und L_σ eingeschlossenen Winkel mit $\alpha_{\varrho\sigma}$. Die gegenüberliegende Seite bezeichnen wir mit $a_{\varrho\sigma}$.

Wir führen weiter in Anschluss an Nr. 26 folgende Bezeichnungen auf der Grenzkugel ein

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\varrho &= k^2 (u_\varrho^2 + v_\varrho^2) - 1, \\ \psi_{\varrho\sigma} &= k^2 (u_\varrho u_\sigma + v_\varrho v_\sigma) - 1, \end{aligned}$$

wo wir mit u_ϱ, v_ϱ die Linienkoordinaten des Grenzkreis L_ϱ bezeichnen, die das Abbild von L_ϱ ist. Es ist offenbar $\mathfrak{P}_{\varrho\sigma} = \mathfrak{P}_{\sigma\varrho}$.

Dann ist nach (44)

$$\cos \alpha_{12} = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2}}$$

und also

$$\sin^2 \alpha_{12} = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 - \psi_{12}^2}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2}. \tag{54}$$

Das Abbild der dem Winkel α_{12} gegenüberliegenden Seite a_{12} liegt auf dem Grenzkreis L_3. Wir ziehen von ihren Endpunkten die Grenzkreise nach dem Pol P_3 von L_3 und führen bei dem Pol den Wert α'_{12} von w ein. Dann ist nach (45)

$$\cos^2 \frac{a_{12}}{ki} = \cos^2 \alpha'_{12}$$

und also

$$\sin^2 \frac{a_{12}}{ki} = \sin^2 \alpha'_{12}. \tag{55}$$

Von den eben eingeführten Grenzkreisen, die von den Endpunkten des Abbildes von a_{12} nach P_3 führen, geht der eine also durch P_3 und den Schnittpunkt zwischen den Grenzkreisen $(u_3 v_3)$ und $(u_1 v_1)$, während der andere P_3 mit dem Schnittpunkt zwischen $(u_3 v_3)$ und $(u_2 v_2)$ verbindet. Wir bezeichnen ihre Linienkoordinaten bezw. mit $u_1' v_1'$ und $u_2' v_2'$ und setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\varrho' &= k^2 (u_\varrho'^2 + v_\varrho'^2) - 1 \\ \psi'_{\varrho\sigma} &= k^2 (u_\varrho' u_\sigma' + v_\varrho' v_\sigma') - 1. \end{aligned}$$

Dann ist ebenfalls nach (44) genau so wie oben

$$\sin^2 \alpha'_{12} = \frac{\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' - \psi'^2_{12}}{\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2'}. \tag{56}$$

Die Koordinaten $u_1' v_1'$ und $u_2' v_2'$ lassen sich aber leicht durch die Koordinaten von L_1, L_2 und L_3 ausdrücken. Weil nämlich der Grenzkreis $u_1' v_1'$ dem von $u_1 v_1$ und $u_3 v_3$ definirten Büschel angehört, ist

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{u_1 + t_3' u_3}{1 + t_3'} \\ v_1' &= \frac{v_1 + t_3' v_3}{1 + t_3'}, \end{aligned} \tag{57}$$

wo t_3' noch so zu bestimmen ist, dass $u_1' v_1'$ durch den Pol P_3 von $u_3 v_3$ geht. Die Bedingung hierfür ist aber

(58) $$\overline{\psi}_{13} = 0,$$

wo

$$\overline{\psi}_{13} = k^2 (u_1' u_3 + v_1' v_3) - 1$$

bedeutet. Falls wir die Werte (57) von u_1' und v_1' eintragen, so wird

$$\overline{\psi}_{13} = \frac{1}{1 + t_3'} \left\{ \psi_{13} + t_3' \psi_3 \right\}$$

und also nach (58)

(59) $$t_3' = - \frac{\psi_{13}}{\psi_3}.$$

In genau gleicher Weise erhalten wir

(60) $$u_2' = \frac{u_2 + t_3'' u_3}{1 + t_3''}$$
$$v_2' = \frac{v_2 + t_3'' v_3}{1 + t_3''},$$

wo

(61) $$t_3'' = - \frac{\psi_{23}}{\psi_3}.$$

Gehen wir jetzt nach der Formel (56) zurück, so ist, wenn wir die Werte aus (57) und (60) eintragen

$$\psi_1' = \frac{1}{(1 + t_3')^2} \left\{ \psi_1 + 2 t_3' \psi_{13} + t_3'^2 \psi_3 \right\}$$
$$\psi_2' = \frac{1}{(1 + t_3'')^2} \left\{ \psi_2 + 2 t_3'' \psi_{23} + t_3''^2 \psi_3 \right\}$$

oder wenn wir die Werte von t_3' und t_3'' nach (59) und (61) einführen und die so entstandenen Werte der ersten Faktoren mit t_1 und t_2 bezeichnen

$$\psi_1' = t_1 \frac{\psi_1 \psi_3 - \psi_{13}^2}{\psi_3}$$
$$\psi_2' = t_2 \frac{\psi_2 \psi_3 - \psi_{23}^2}{\psi_3}.$$

In gleicher Weise wird

$$\psi_{12}'^2 = t_1 t_2 \frac{(\psi_{12} \psi_3 - \psi_{13} \psi_{23})^2}{\psi_3^2}$$

und also

$$\psi_1' \psi_2' - \psi_{12}'^2 = \frac{t_1 t_2}{\psi_3^2} \left\{ (\psi_1 \psi_3 - \psi_{13}^2)(\psi_2 \psi_3 - \psi_{23}^2) - (\psi_{12} \psi_3 - \psi_{13} \psi_{23})^2 \right\}$$

oder schliesslich

$$\psi_1' \psi_2' - \psi_{12}'^2 = \frac{t_1 t_2}{\psi_3} \left\{ \psi_1 \psi_2 \psi_3 - \psi_1 \psi_{23}^2 - \psi_2 \psi_{31}^2 - \psi_3 \psi_{12}^2 + 2 \psi_{23} \psi_{31} \psi_{12} \right\}.$$

Hieraus folgt, dass

$$(62)\qquad \frac{\psi_1'\psi_2' - \psi_{12}'^2}{\psi_1'\psi_2'} = \psi_1\psi_2\psi_3 \frac{\psi_1\psi_2\psi_3 - \psi_1\psi_{23}^2 - \psi_2\psi_{31}^2 - \psi_3\psi_{12}^2 + 2\psi_{23}\psi_{31}\psi_{12}}{(\psi_1\psi_2 - \psi_{12}^2)(\psi_2\psi_3 - \psi_{23}^2)(\psi_3\psi_1 - \psi_{31}^2)} \cdot \frac{\psi_1\psi_2 - \psi_{12}^2}{\psi_1\psi_2}$$

oder also

$$(63)\qquad \frac{\psi_1'\psi_2' - \psi_{12}'^2}{\psi_1'\psi_2'} = \varkappa^2 \frac{\psi_1\psi_2 - \psi_{12}^2}{\psi_1\psi_2}$$

wo $\varkappa^2$ bei jeder zyklischen Verschiebung der Indizes invariant bleibt.

Hiermit ist dann nach (54) und (56) auch bewiesen, dass

$$\sin^2\alpha_{12}' = \varkappa^2 \sin^2\alpha_{12}$$

und also nach (55), dass

$$\sin^2\frac{\alpha_{12}}{ki} = \varkappa^2 \cdot \sin^2\alpha_{12}.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt dann, dass

$$\sin^2\frac{\alpha_{12}}{ki} : \sin^2\frac{\alpha_{23}}{ki} : \sin^2\frac{\alpha_{31}}{ki} = \sin^2\alpha_{12} : \sin^2\alpha_{23} : \sin^2\alpha_{31}.$$

Da nun sämtliche Winkel α_{ik} kleiner als π sind und die links auftretenden sinus-Werte positive rein imaginäre Grössen sind, so kann weiter gefolgert werden, dass

$$(64)\qquad \sin\frac{\alpha_{12}}{ki} : \sin\frac{\alpha_{23}}{ki} : \sin\frac{\alpha_{32}}{ki} = \sin\alpha_{12} : \sin\alpha_{23} : \sin\alpha_{31}.$$

Hiermit ist der Sinussatz bewiesen.

Konforme Abbildung der Ebene auf die Grenzkugel.

31. Die bisher nach vielen Richtungen hin verfolgte, von den Strahlen des Bündels zweiter Art besorgte Projektion der Ebene auf die Grenzkugel ist keine konforme Abbildung. Wir können aber, wie wir unten zeigen, durch eine sehr einfache Überlegung zu einer konformen Abbildung gelangen.

Wir nehmen deshalb zwei einander schneidende Geraden L_1 und L_2 der Ebene und projizieren sie auf die Grenzkugel. Daselbst erhalten wir dann zwei innerhalb der Kalotte sich schneidende Grenkreise L_1 und L_2. Wir bezeichnen den von L_1 und L_2 in der Ebene eingeschlossenen Winkel mit α_{12} und die Linienkoordinaten von L_1 und L_2 bezw. mit $u_1\, v_1$ und $u_2\, v_2$. Dann ist nach (44), falls wir die Bezeichnung ψ_{12} statt ψ anwenden,

$$(65)\qquad \cos\alpha_{12} = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}.$$

Wir bezeichnen nunmehr die Koordinaten der Pole von $(u_1\, v_1)$ und $u_2\, v_2)$ in Bezug auf den Kalottenrand bezw. mit $\xi_1\, \eta_1$ und $\xi_2\, \eta_2$ und ziehen auf der Grenzkugel die beiden Kreise K_1 und K_2, die diese Pole zu Mittelpunkte haben und durch die Schnittpunkte der zugehörigen Polare mit dem Kalottenrand gehen. K_1 und K_2 sind also die Ortogonalkreise des Ka-

lottenrands, die durch die genannten Schnittpunkte gehen. Wir bezeichnen den Winkel der Kreise K_1 und K_2 mit ω_{12} und *beabsichtigen zu zeigen, dass* $\omega_{12} \doteq \alpha_{12}$ *ist.*

ω_{12} ist ersichtlich der Winkel eines Grenzkreisdreiecks, wo das Qvadrat der gegenüberliegenden Seite gleich

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2$$

und die Qvadrate der beiden übrigen Seiten bezw.

$$\Phi_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2 - k^2, \qquad \Phi_2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 - k^2$$

sind. Setzen wir

$$\varphi_{12} = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 - k^2,$$

so können wir die hieraus durch den cosinussatz erhaltene Gleichung für $\cos \omega_{12}$ in die Form schreiben

$$\cos \omega_{12} = \frac{\varphi_{12}}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}}. \tag{66}$$

Man erkennt leicht, dass die Ausdrücke links in (65) und (66) genau gleich sind. Es ist nämlich

$$\xi_1 = -k^2 u_1, \qquad \xi_2 = -k^2 u_2,$$
$$\eta_1 = -k^2 v_1, \qquad \eta_2 = -k^2 v_2.$$

und infolgedessen

$$\varphi_{12} = k^2 \psi_{12}, \quad \Phi_1 = k^2 \Psi_1, \quad \Phi_2 = k^2 \Psi_2,$$

woraus folgt, dass

$$\frac{\varphi_{12}}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}} = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{\Psi_1 \Psi_2}}.$$

Hieraus folgt dann nach (65) und (66), dass

$$\cos \omega_{12} = \cos \alpha_{12}. \tag{67}$$

Wählen wir beidemal denjenigen Winkel, der nach O gerichtet ist, so sind die Winkel gleichzeitig spitz oder stumpf und wir haben also

$$\omega_{12} = \alpha_{12} \qquad \text{q. e. d.} \tag{68}$$

Es kann übrigens vorbeigehend bemerkt werden, dass ω_{12} ersichtlich die Cayley'sche Maasszahl der Verbindungslinie der Pole von L_1 und L_2 bezeichnet. Wir sehen also, dass zwischen der Cayley'schen Maasszahl des Winkels zweier Grenzkreise und der Cayley'schen Maasszahl des Abstands ihrer Pole die Beziehung (67) besteht.

37. Wir kehren aber nach unserer obigen Entwickelung zurück. Wir haben gezeigt, dass wir den Winkel zweier Geraden L_1 und L_2 der Ebene auf der Grenzkugel wiederfinden. Dieser Winkel ist nämlich genau gleich demjenigen Winkel ω_{12}, den die Ortogonalkreise K_1 und K_2 zu dem Kalottenrand mit den Polen der Abbilder L_1 und L_2 von L_1 und L_2 als Mittelpunkten mit einander einschliessen. Falls wir nunmehr das Innere der Kalotte auf sich

selbst so stetig abbilden, dass jeder Grenzkreis L in den zugehörigen Ortogonalkreis K des Kalottenrands übergeht, so wird das so entstandene Bild ersichtlich mit der Ebene konform.

Dies wird nun in der Tat sehr einfach durchgeführt. Wir betrachten die nebenstehende Figur, wo L der genannte Grenzkreis und K der Ortogonalkreis ist.

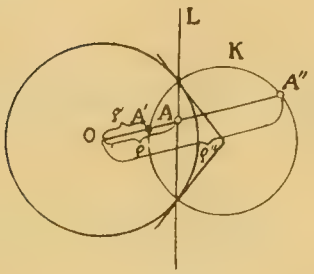


Fig. 12.

Wir sehen unmittelbar, dass

$$\varrho' \varrho'' = k^2 \tag{69}$$

ist. Da weiter O, A', A, A'' harmonisch sind, so sind auch ihre Spiegelbilder in Bezug auf den Kalottenrand harmonisch. Da aber das Bild von O unendlich weit enfernt liegt, so liegt $\frac{k^2}{\varrho}$ in der Mitte zwischen $\frac{k^2}{\varrho'}$ und $\frac{k^2}{\varrho''}$ oder es ist

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{2}{\varrho}. \tag{70}$$

Aus (69) und (70) folgt, dass

$$\varrho' = \frac{k\varrho}{k + \sqrt{k^2 - \varrho^2}}.$$

Bezeichnen wir nunmehr die Koordinaten von A mit $\xi\ \eta$ und von A' mit $\xi'\ \eta'$, so erhalten wir ersichtlich hieraus die Formeln

$$\xi' = \frac{k\xi}{k + \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}}$$
$$\eta' = \frac{k\eta}{k + \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}}. \tag{71}$$

Diese Formeln vermitteln dann die gewünschte stetige Abbildung des Inneren der Grenzkugelkalotte auf sich selbst, wobei jeder Grenzkreis L in den zugehörigen Ortogonalkreis K übergeht und der Punkt A in A'. Hiermit haben wir auch die Aufgabe gelöst die Ebene konform auf die Grenzkugelkalotte abzubilden. Falls wir die Werte von ξ und η durch x und y eintragen, so lauten die zu dieser Abbildung gehörenden Formeln

$$\xi' = \frac{k \cos \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(r)}$$
$$\eta' = \frac{k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y)}{1 + \sin \Pi(r)}, \tag{72}$$

wo r den radius vector des Punkts (x, y) bedeutet.

38. Es ist nun von Interesse zu sehen, wie die verschiedenen Strahlenbüschel der Ebene und ihre Zykeln sich transformieren bei der konformen Abbildung.

Ein Strahlenbüschel der Ebene geht zuerst durch die Projektion in ein Grenzkreisbüschel über. Es sei P das Büschelzentrum und p die Polare von P in Bezug auf den Kalottenrand.

Dann kann unmittelbar geschlossen werden, dass das Grenzkreisbüschel durch die Abbildung (71) in ein Büschel von Ortogonalkreisen zu dem Kalottenrand übergeht, deren Mittelpunkte auf der Polare p liegen. Es liegt nämlich der Mittelpunkt jedes einzelnen Kreises K in dem Pol des zugehörigen Grenzkreises L. Wenn L das Grenzkreisbüschel durchwandert, ist der Ort dieses Pols gerade die Polare p des Büschelzentrums.

Dies besagt aber, dass das Grenzkreisbüschel in das eine Kreisbüschel derjenigen Steiner'schen Kreisschaar übergeht, die von dem Kalottenrand und der Polare p festgelegt wird, und zwar in dasjenige Kreisbüschel, dem der Kalottenrand und die Polare nicht angehören.

Das genannte Kreisbüschel stellt dann auch das Abbild des Geradenbüschels der Ebene bei der konformen Abbildung dar. Weil die Abbildung konform ist, müssen dabei die Zykeln des Geradenbüschels in die ortogonalen Trajektorien des genannten Kreisbüschels oder also in das andere Kreisbüschel derselben Steiner'schen Kreisschaar übergehen.

Zusammenfassend können wir also den Satz aussprechen.

Das System der Strahlen und Zykeln eines Geradenbüschels der Ebene geht bei der konformen Abbildung in die beiden Kreisbüschel derjenigen Steinerschen Kreisschaar über, die von dem Kalottenrand und der Polare des Zentrums des zu dem Geradenbüschel gehörenden Grenzkreisbüschels festgelegt wird. Besonders gehen dann die Strahlen des Büschels in dasjenige der beiden Kreisbüschel über, welches den Kalottenrand nicht enthält, während die Zykeln grade in dasjenige Kreisbüschel übergehen, dem der Kalottenrand angehört.

Wenn wir nun zu den drei verschiedenen Arten von Geradenbüscheln gehen, wollen wir der Einfachheit halber dasjenige Kreisbüschel einer Steinerschen Kreisschaar, dessen Kreise durch die Grundpunkte gehen, das *elliptische* Kreisbüschel nennen, während wir das andere Kreisbüschel das *hyperbolische* nennen.

Liegt nun erstens ein Geradenbüschel *erster Art* in der Ebene vor, so liegt das Zentrum des zugehörigen Grenzkreisbüschels auf der Grenzkugel innerhalb der Kalotte. Es liegt also die Polare dieses Zentrums ganz ausserhalb der Kalotte und schneidet den Rand nicht. Der Kalottenrand gehört also dem hyperbolischen Kreisbüschel der oben besprochenen Steinerschen Kreisschaar an und wir haben folglich den Satz.

Die Strahlen und Zykeln eines Geradenbüschels erster Art gehen bei der konformen Abbildung bezw. in das elliptische und das hyperbolische Kreisbüschel der zugehörigen Steinerschen Kreisschaar über. Die Grundpunkte der Schaar sind Spiegelbilder in Bezug auf den Kalottenrand.

Wenn das Geradenbüschel von der *dritten* Art ist, so liegt das Zentrum des zugehörigen Grenzkreisbüschels ausserhalb der Kalotte. Es schneidet also seine Polare, die übrigens nichts anders als das Abbild der Polare des Geradenbüschels ist, den Kalottenrand in zwei Punkten. Folglich gehört der Kalottenrand dem elliptischen Kreisbüschel der oben besprochenen Steinerschen Kreisschaar an, deren Grundpunkte nun einfach die genannten Schnittpunkte sind. Wir können also folgenden Satz aussprechen.

Die Strahlen und Zykeln eines Geradenbüschels dritter Art gehen bei der konformen Abbildung bezw. in das hyperbolische und das elliptische Kreisbüschel der zugehörigen Steinerschen Kreisschaar über. Die Grundpunkte der Schaar liegen auf dem Kalottenrand.

Schliesslich haben wir noch die Büschel *zweiter* Art zu betrachten. Hier liegt das Zentrum des zugehörigen Grenzkreisbüschels auf dem Kalottenrand. Seine Polare ist also der berührende Grenzkreis zum Kalottenrand in dem Zentrum selbst. Hieraus geht der folgende Satz hervor.

Die Strahlen eines Geradenbüschels zweiter Art in der Ebene gehen in das Büschel aller durch einen Punkt des Kalottenrands gehenden Ortogonalkreise zum Kalottenrand über. Die Zykeln gehen dabei in das Büschel der durch denselben Punkt gehenden, den Kalottenrand berührenden Kreise über.

Dieser Fall ist als ein Grenzfall aufzufassen, wenn die beiden Grundpunkte der Steinerschen Kreisschaar zusammenfallen.

Als Ergebnis der hiermit abgeschlossenen Untersuchung können wir auch folgenden Satz aussprechen, indem wir die Gerade als Zykel mitzählen.

Die Zykeln der Ebene gehen bei der konformen Abbildung sämtlich in Kreise über. Insbesondere geht der Kreis in einen Kreis über, der gänzlich innerhalb der Kalotte liegt, der Grenzkreis der Ebene geht in einen Kreis über, der den Kalottenrand berührt, die Gerade wird auf einen Ortogonalkreis des Kalottenrands abgebildet, während der Kreis, der einer aeqvidistanten Kurve entspricht, den Kalottenrand unter schiefem Winkel schneidet.

Natürlich kommen nur diejenigen Teile der Kreise in Betracht die innerhalb der Kalotte liegen.

39. Wie in der vorigen Abteilung nachgewiesen wurde, gehören zu jedem Geradenbüschel der Ebene unendlich viele Drehungen. Eine Drehung führt dabei das Strahlenbüschel in sich so über, dass die Strahlen Niveaukurven und die Zykeln Bahnkurven der Drehung sind. Es fragt sich, wie eine derartige Drehung sich bei der konformen Abbildung überträgt.

Wir können dann vorläufig sagen, dass wir in dem konformen Abbild eine eindeutig umkehrbare konforme Verschiebung des Inneren der Kalotte in sich erhalten. Bei dieser Verschiebung geht die zugehörige Steiner'sche Kreisschaar in sich über, wobei jedesmal die Kreise desjenigen Kreisbüschels der Schaar, dem der Kalottenrand angehört, als Bahnkurven auftreten, während das andere Kreisbüschel die Niveaukurven giebt. Die Grundpunkte der Steiner'schen Schaar sind *Fixpunkte* der Verschiebung.

Setzen wir nunmehr

$$\zeta' = \xi' + i\,\eta',$$

so wissen wir, dass eine ein-eindeutige konforme Verschiebung des Inneren der Kalotte in sich durch eine lineare Substitution

$$\frac{\alpha\,\zeta' + \beta}{\gamma\,\zeta' + \delta}$$

der komplexen Veränderlichen ζ' vermittelt wird. Es entspricht also jeder Drehung in der Ebene bei der konformen Abbildung auf der Grenzkugel eine lineare Substitution der komplexen Veränderlichen ζ', die das Innere der Kalotte in sich überführt.

Die zugehörige Steiner'sche Kreisschaar stellt das System der Bahnkurven und Niveaukurven der linearen Substitution dar. Insbesondere werden die Grundpunkte der Schaar Fixpunkte der Substitution.

Ist die Drehung eine Drehung *erster* Art, d. h. gehört sie zu einem Geradenbüschel erster Art der Ebene, so sind wie oben gezeigt wurde die Fixpunkte Spiegelbilder in Bezug auf den Kalottenrand. Wir erkennen dann in der Substitution eine *elliptische* Substitution Entsprechend sehen wir ein, dass die einer Drehung *zweiter* oder *dritter* Art entsprechende lineare Substitution eine *parabolische* bezw. *hyperbolische* Substitution ist.

Zusammenfassend sprechen wir den Satz aus.

Den Drehungen in der Ebene entsprechen auf der Grenzkugel durch die konforme Abbildung lineare Substitutionen der komplexen Veränderlichen $\zeta' = \xi' + i\,\eta'$, die das Innere der Kalotte in sich überführen. Jenachdem die Drehung von der ersten, zweiten oder dritten Art ist, ist die zugehörige lineare Substitution eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Substitution.

Die linearen Substitutionen bilden ersichtlich eine Gruppe, die wir Γ' nennen.

Offenbar entspricht einer Umlegung in der Ebene eine *Spiegelung* auf der Grenzkugel.

40. Wir können nun auch die Masszahl r einer Strecke in der Ebene in einfache Beziehung zu dem zugehörigen Abbild der Strecke im konformen Bild bringen.

Wir sehen unmittelbar, dass in nebenstehender Figur, die zeigt, wie der Punkt A $(\xi,\ \eta)$ in A' $(\xi',\ \eta')$ auf der Grenzkugel übergeführt wird,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1'\,a_1''}{a_2'\,a_2''}$$

und

$$\frac{a_1'}{a_2'} = \frac{a_1''}{a_2''}.$$

Hieraus folgt, dass

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2.$$

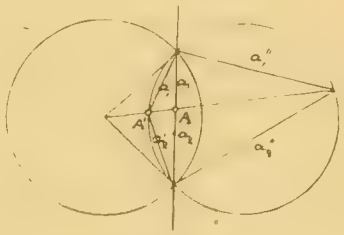


Fig. 13.

Betrachten wir jetzt die nebenstehende Figur, die zeigt, wie durch die Abbildung (71) eine Strecke AB auf dem Grenzkreis L in den Bogen A'B' übergeführt wird, so sehen wir nach dem eben bewiesenen unmittelbar ein, dass für die Sehnen folgende Gleichung gilt

$$\left(\frac{A'M}{A'N} : \frac{B'M}{B'N}\right)^2 = \lambda,$$

wo λ das früher besprochene Doppelverhältniss der vier Punkte M, B, A, N bedeutet. Setzen wir also

$$\lambda' = \frac{A'M}{A'N} : \frac{B'M}{B'N},$$

so ist folglich

$$\lambda = \lambda'^2$$

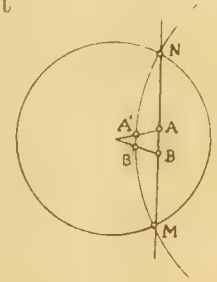


Fig. 14.

und infolgedessen

$$r = \frac{k}{2} \log \lambda = k \log \lambda' . \tag{73}$$

Hiermit hat dann auch r eine einfache Bedeutung im konformen Abbild der Ebene erhalten.

Dass die hiermit eingeführte Grösse λ' tatsächlich eine Invariante der Gruppe Γ' ist, sieht man unmittelbar ein, denn λ' ist einfach das Doppelverhältniss derjenigen vier komplexen Zahlenwerte, die nach der obigen Verabredung zu den vier Punkten M, B', A' und N gehören.

41. Übrigens kann in diesem Zusammenhang noch folgendes hervorgehoben werden. Zwei beliebige Kreise mit den Radien r_1 und r_2 und der Zentrale e auf der Grenzkugel haben gegenüber linearen Substitutionen eine Invariante j, nämlich den Ausdruck

$$j = \frac{e^2 - r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} .$$

Sind nun insbesondere die Kreise Ortogonalkreise zu dem Kalottenrand und bezeichnen wir ihre Mittelpunkte mit $\xi_1 \eta_1$ und $\xi_2 \eta_2$, so ist

$$e^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2$$
$$r_1^2 = \Phi_1 , \quad r_2^2 = \Phi_2$$

und also

$$j = 2 \frac{q_{12}}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}} .$$

Bezeichnen wir jetzt die Linienkoordinaten der Polaren von $\xi_1 \eta_1$ und $\xi_2 \eta_2$ mit $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$, so haben wir ja früher (Vgl. Nr. 36) bewiesen, dass

$$\frac{q_{12}}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}} = \frac{v_{12}}{\sqrt{v_1 v_2}}$$

und so ist also

$$j = 2 \cos \alpha_{12} , \tag{74}$$

wo α_{12} die Cayley'sche Maasszahl ist, die von den Grenzkreisen $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$ festgelegt wird. Schneiden sich insbesondere die beiden Ortogonalkreise, so ist α_{12} gleich dem Winkel der beiden Kreise.

Falls wir die Cayley'sche Masszahl α_{12} der beiden Grenzkreise auf die Ebene übertragen, so gehört also zu jedem Strahlenpaar der Ebene insbesondere die Invariante $\cos \alpha_{12}$ der Gruppe aller Drehungen. Zwischen dieser Invariante und der bekannten Invariante j des entsprechenden Kreispaars auf der Kalotte, die zur Gruppe Γ' gehört, besteht dann die Beziehung (74). Schneiden sich die beiden Strahlen der Ebene, so schneiden sich die entsprechenden Kreise auf der Grenzkugel und es ist dann α_{12} der gemeinsame Wert der beiden gleich grossen Schnittwinkel.

Die Koordinaten auf der Grenzkugel als Koordinaten in der Ebene. Abbildung auf die Euklid'sche Ebene.

42. Falls wir nunmehr zu unserer ursprünglichen Abbildung der Ebene auf die Grenzkugel zurückkehren, die dadurch hergestellt wurde, dass die Punkte (x, y) der Ebene einfach durch Projektion auf die Punkte (ξ, η) der Grenzkugelkalotte übertragen wurden, so liegt der Gedanke nahe die Koordinaten ξ und η auf der Grenzkugel durch die betreffende Projektion über die Ebene auszubreiten. Wir bekommen dadurch in der Ebene (x, y) eine Art krummliniger Koordinaten (ξ, η), die durch die Formeln

$$\xi = k \cos \Pi(x)$$
$$\eta = k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y)$$

festgelegt werden.

Wie wir oben gefunden haben, *ist dann die Gleichung der Geraden in diesen neuen Koordinaten eine lineare Gleichung.* Falls wir diese Gleichung in die Form

$$u\,\xi + v\,\eta + 1 = 0$$

schreiben, so gehören u und v als Linienkoordinaten der Geraden an.

Die unendlich fernen Punkte der Ebene werden in den neuen Koordinaten durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2$$

dargestellt.

Die Drehungen und Umlegungen der Ebene werden in den neuen Koordinaten einfach als diejenigen Transformationen von der Form

$$\xi = \frac{a_1\,\xi + b_1\,\eta + c_1}{a_3\,\xi + b_3\,\eta + c_3}$$

$$\eta = \frac{a_2\,\xi + b_2\,\eta + c_2}{a_3\,\xi + b_3\,\eta + c_3}$$

auftreten, die das unendlich ferne oder absolute Gebilde $\xi^2 + \eta^2 = k^2$ in sich überführen. Dabei werden die Invarianten r und w identisch mit den Maasszahlen einer Cayley'schen Maassbestimmung, die auf dem absoluten Gebilde begründet wird, wie des näheren oben ausführlich dargestellt wurde.

Die Zykeln der Ebene werden in den neuen Koordinaten durch die Gleichung (46) dargestellt.

Falls wir nun auch die Koordinaten ξ' und η' durch die Formeln (71) als Koordinaten in der Ebene einführen, so werden dadurch neue krummlinige Koordinaten über die Ebene ausgebreitet. In diesen Koordinaten werden dann auch die unendlich fernen Punkte durch die Gleichung

$$\xi'^2 + \eta'^2 = k^2$$

dargestellt.

Den Drehungen entsprechen in den neuen Koordinaten lineare Transformationen

$$\zeta' = \frac{\alpha\,\zeta' + \beta}{\gamma\,\zeta' + \delta}$$

der komplexen Veränderlichen

$$\zeta' = \xi' + i\,\eta',$$

die das Innere von $\xi'^2 + \eta'^2 = k^2$ in sich überführen.

Die Zykeln, zu denen wir dann auch die Gerade mitzählen, treten in den neuen Koordinaten als Kreise auf, wie oben ausführlich untersucht wurde.

Schliesslich wollen wir noch hervorheben, dass das Bogenelement $d\sigma$ der Ebene sich einfach in den hiermit eingeführten krummlinigen Koordinaten darstellen lässt.

Aus der Formel (42) geht unmittelbar hervor, dass

$$\sin^2 \frac{r}{ki} = \frac{\Phi_1\,\Phi_2 - \varphi_{12}^2}{\Phi_1\,\Phi_2}.$$

Falls wir nun mittels dieser Formel den Abstand $d\sigma$ der Punkte (ξ, η) und $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ berechnen, so wird links $-\frac{d\sigma^2}{k^2}$ erhalten und das ganze Resultat wird nach einfacher Rechnung

$$d\sigma^2 = k^2\,\frac{(k^2 - \xi^2 - \eta^2)\,(d\xi^2 + d\eta^2) + (\xi\,d\xi + \eta\,d\eta)^2}{(k^2 - \xi^2 - \eta^2)^2}.$$

Hieraus wird durch Einführung von ξ' und η' nach der Formel (71)

$$d\sigma^2 = \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2}{\left(1 - \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{k^2}\right)^2}.$$

Hiermit haben wir also das Linienelement der Ebene in den Koordinaten $\xi\,\eta$ bezw. $\xi'\,\eta'$ berechnet. Insbesondere sehen wir aus der letzten Formel unmittelbar, dass die Beziehung zwischen der Ebene und der Grenzkugel bei der Abbildung (72) eine konforme ist.

43. Wir können nun schliesslich die hiermit eingeführten Koordinaten der Lobatscheffskij'schen Ebene als Cartesische Koordinaten in der Euklid'schen Ebene eintragen. Wir bekommen dadurch zwei bemerkenswerte Abbildungen zwischen den beiden Ebenen, wobei jedes mal die Lobatscheffskij'sche Ebene auf das Innere eines Kreises mit dem Radius k in der Euklid'schen Ebene abgebildet wird.

Falls wir nach unseren Entwickelungen über die Abbildung auf die Grenzkugel zurückgreifen, können wir unmittelbar schliessen, dass wenn wir die Koordinaten ξ und η in der Euklid'schen Ebene deuten, wir ein Abbild der Lobatscheffskij'schen Ebene erhalten, bei dem die Geraden wieder in Geraden übergehen. Wenn wir dagegen ξ' und η' in der Euklid'schen Ebene absetzen, erhalten wir eine konforme Abbildung, wobei insbesondere die Geraden in Orthogonalkreise zu dem Kreis $\xi'^2 + \eta'^2 = k^2$ übergehen. Übrigens gilt natürlich bei diesen Abbildungen alles, was wir bei den entsprechenden Abbildungen auf der Grenzkugelkalotte entwickelt haben. Es ist nämlich das Innere des Kreises mit dem Radius k in der Euklid'schen Ebene einfach mit der Kalotte kongruent.

Es ist schliesslich besonders hervorzuheben, dass wir die hiermit gewonnenen Abbildungen besonders einfach herstellen können. Es besteht nämlich zwischen den durch die Anfangs-

punkte der beiden Ebenen bestimmten Strahlenbüscheln eine Kongruenz, die z. B. dadurch hergestellt werden kann, dass wir diejenigen Strahlen einander zuordnen, die denselben Winkel mit der Abszissenachse der zugehörigen Ebene bilden. Zwei Strahlen durch den Anfangspunkt der einen Ebene bilden dann ersichtlich denselben Winkel wie die entsprechenden Strahlen der anderen Ebene.

Falls wir mit r und ϱ die radii vectores in der Lobatscheffskij'schen bezw. Euklid'schen Ebene bezeichnen und nun eine Abbildung zwischen den Punkten zweier entsprechender Strahlen dadurch herstellen, dass wir zwischen ihren radii vectores die Gleichung

$$\varrho = k \cos \Pi(r) \tag{75}$$

vorschreiben, so wird ersichtlich dadurch die ganze Lobatscheffskij'sche Ebene auf das Innere des Kreises mit dem Radius k in der Euklid'schen Ebene abgebildet.

Liegt nun eine Gerade in der ersteren Ebene vor und bezeichnen wir mit r_0 den Abstand der Geraden von dem Anfangspunkt, mit r den radius vector eines beliebigen Punktes der Geraden und mit φ den von r_0 und r eingeschlossenen Winkel, so ist in dem von r_0, r und der Geraden gebildeten rechtwinkligen Dreieck

$$k \cos \Pi(r) = \frac{k \cos \Pi(r_0)}{\cos \varphi}.$$

Hieraus folgt aber für das Abbild der Geraden in der Euklid'schen Ebene die Gleichung

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos \varphi}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Geraden, deren Abstand von dem Anfangspunkt gleich ϱ_0 ist. Wir sehen also, dass eine Gerade der Lobatscheffskij'schen Ebene bei unserer Abbildung wieder in eine Gerade in der Euklid'schen Ebene übergeführt wird. Insbesondere geht ein rechter Winkel, dessen Schenkel durch den Anfangspunkt hindurchgeht, in einen rechten Winkel über.

Führen wir jetzt die Koordinaten x, y und ξ, η der entsprechenden Punkte in den beiden Ebenen ein, so sind nach dem eben bewiesenen ξ und η die Abbilder von x und y. Hieraus folgt dann unmittelbar, dass

$$\xi = k \cos \Pi(x).$$

Weiter ist

$$\eta^2 = \varrho^2 - \xi^2$$

und also

$$\eta^2 = k^2 (\cos^2 \Pi(r) - \cos^2 \Pi(x).$$

Da aber in dem von r, x und y gebildeten rechtwinkligen Dreieck

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(y)$$

ist, so folgt, dass

$$\eta = k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y).$$

In genau gleicher Weise können wir die zweite Abbildung herstellen, indem wir nämlich zwischen den radii vectores der Punkte zweier entsprechender Strahlen die Beziehung

$$\varrho' = \frac{k \cos \Pi(r)}{1 + \sin \Pi(r)} \tag{76}$$

vorschreiben. Dabei gehen dann die Geraden in Ortogonalkreise zu dem Kreis mit dem Radius k über.

Abbildung des Lobatscheffskij'schen Raums auf den Euklid'schen Raum.

44. Es bietet nun keine Schwierigkeiten dar die zuletzt durchgeführten Anschauungen auf den Raum zu übertragen.

Um dies durchzuführen nehmen wir in dem Lobatscheffskij'schen Raum drei auf einander senkrechte, durch den Anfangspunkt O gehende Geraden zu Achsen eines Koordinatensystems. Ein Punkt des Raums ist dabei durch drei Koordinaten x, y und z festgelegt, wo z den Abstand des Punktes von der xy-Ebene und y den Abstand der Projektion des Punktes auf der xy-Ebene von der x-Achse bedeuten, während x der Abstand auf der x-Achse von dem Anfangspunkt bis zu dem Fusspunkt der y-Koordinate auf der x-Achse ist. Den radius vector des Punktes (x, y, z) bezeichnen wir mit r. Den Winkel zwischen r und und seiner Projektion r_{xy} in der xy-Ebene bezeichnen wir mit β und den Winkel zwischen r_{xy} und der x-Achse mit α.

In dem Euklid'schen Raum führen wir ebenfalls ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und bezeichnen die Koordinaten eines Punktes mit ξ, η, ζ. Der radius vector wird mit ϱ bezeichnet und die oben genannten Winkel ebenfalls mit β und α.

Falls wir nun diejenigen Strahlen durch die Anfangspunkte der beiden Räume einander zuordnen, die durch dieselben Werte von β und α festgelegt werden, so wird behauptet, *dass der Winkel zweier Strahlen des einen Raums gleich dem Winkel entsprechender Strahles den anderen Raums ist.*

Sind nämlich zwei Strahlen des Euklid'schen Raums durch $\alpha_1 \beta_1$ und $\alpha_2 \beta_2$ festgelegt und ist ω der Winkel dieser Strahlen, so ist

$$\cos \omega = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)$$

Da aber in dem Lobatscheffskij'schen Raum genau dieselbe Formel der sphärischen Trigonometrie gilt, wie im Vorigen gezeigt ist, so folgt, dass wir daselbst genau denselben Winkel ω erhalten. Die Behauptung ist hiermit bewiesen.

Nachdem dies festgelegt ist, führen wir eine Zuordnung der Punkte der beiden Räume solcherweise durch, dass wir die Punkte zweier entsprechender Strahlen durch die Formel

$$\varrho = k \cos \Pi(r) \tag{77}$$

einander zuweisen. Wir bekommen dadurch ersichtlich eine Abbildung zwischen den Punkten der beiden Räume, wobei der ganze Lobatscheffskij'sche Raum auf das Innere einer Kugel mit dem Radius k in dem Euklid'schen Raum abgebildet wird.

Ersichtlich geht bei dieser Abbildung jede durch den Anfangspunkt gehende Ebene wieder in eine Ebene über. Die Abbildung dieser Ebenen ist genau die erste der in Nr. 42 besprochenen ebenen Abbildungen. Insbesondere folgt aus dieser Bemerkung, *dass jede Gerade des Raums wiederum in eine Gerade übergeht.*

Weiter können wir aus derselben Tatsache schliessen, dass jeder rechte Winkel, dessen Schenkel durch den Anfangspunkt hindurchgeht ebenfalls in einen rechten Winkel übergeht. Hieraus folgt dann, *dass jede Ebene des Raums wiederum in eine Ebene übergeführt wird.* Selbstverständlich kommen in dem Euklid'schen Raum nur diejenigen Teile der Geraden und der Ebenen in Betracht, die innerhalb der Kugel mit dem Radius k liegen; sie sind nämlich schon die Abbilder der ganzen Geraden bezw. Ebenen des Lobatscheffskij'schen Raums.

Dass eine Ebene in eine Ebene übergeht, kann auch folgendermassen gezeigt werden. Ist r_0 der Abstand der Ebene von dem Anfangspunkt, r der radius vector eines beliebigen Punktes der Ebene und φ der von r_0 und r eingeschlossene Winkel, so ist in dem von r_0 und r gebildeten rechtwinkligen Dreieck

$$k \cos \Pi(r) = \frac{k \cos \Pi(r_0)}{\cos \varphi}.$$

Hieraus folgt nach (77), dass

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos \varphi}.$$

Dies ist aber im Euklid'schen Raum die Gleichung einer Ebene, deren Abstand von dem Anfangspunkt gleich ϱ_0 ist.

45. Wir können nunmehr die dieser Abbildung entsprechenen Beziehungen zwischen den Koordinaten x, y, z und ξ, η, ζ entsprechender Punkte der beiden Räume ableiten.

Es ist dabei zu bemerken, dass nach den oben bewiesenden Sätzen die Strecken x, y und z bei der Abbildung in die Strecken ξ, η und ζ übergehen. Hieraus folgt unmittelbar, alls wir nach der in der vorigen Abteilung besprochenen ebenen Abbildung zurückgreifen, dass

$$\xi = k \cos \Pi(x)$$
$$\eta = k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y).$$

Die durch r und r_{xy} bestimmte Ebene wird aber durch genau dieselbe ebene Abbildung auf die von ϱ und ϱ_{xy} bestimmte Ebene abgebildet und es ist infolgedessen

$$\zeta = k \sin \Pi(r_{xy}) \cos \Pi(z).$$

Da aber in dem von r_{xy}, x und y gebildeten rechtwinkligen Dreieck

$$\sin \Pi(r_{xy}) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(y),$$

so wird

$$\zeta = k \sin \Pi(x) \sin \Pi(y) \cos \Pi(z).$$

Zusammenfassend erhalten wir also bei unserer Abbildung

$$\xi = k \cos \Pi(x)$$
$$\eta = k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y) \tag{78}$$
$$\zeta = k \sin \Pi(x) \sin \Pi(y) \cos \Pi(z).$$

46. Von hier aus können wir die analytische Geometrie des Raums genau so entwickeln wie wir im Vorigen die analytische Geometrie der Ebene behandelten.

Nehmen wir insbesondere eine Ebene und bezeichnen ihren Abstand von dem Anfangspunkt mit p und die Winkel zwischen der Abstandlinie p und den Koordinatenachsen mit α, β und γ, so ist das Abbild in dem Euklid'schen Raum ebenfalls eine Ebene, deren Abstand von dem Anfangspunkt gleich $k \cos \Pi(p)$ ist. Die Abstandlinie bildet dabei genau dieselben Winkel α, β und γ mit den Koordinatenachsen. Da die Gleichung einer derartigen Ebene

$$\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = k \cos \Pi(p)$$

ist, so folgt nach (78), dass die Gleichung der Ebene in dem Lobatscheffskij'schen Raum lautet

$$\cos \Pi(x) \cos \alpha + \sin \Pi(x) \cos \Pi(y) \cos \beta + \sin \Pi(x) \sin \Pi(y) \cos \Pi(z) \cos \gamma = \cos \Pi(p). \tag{79}$$

47. Die Cayley'sche Maassbestimmung überträgt sich nun unmittelbar auf den Raum. Wir setzen

$$\begin{aligned} \Phi &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - k^2 \\ \Phi_\sigma &= \xi_\sigma^2 + \eta_\sigma^2 + \zeta_\sigma^2 - k^2 \\ \varphi_{\varrho\sigma} &= \xi_\varrho \xi_\sigma + \eta_\varrho \eta_\sigma + \zeta_\varrho \zeta_\sigma - k^2 \end{aligned}$$

und betrachten eine beliebige Strecke r des Lobatscheffskij'schen Raums. Das Abbild der Strecke liegt in einer Diametralebene der Kugel $\Phi = 0$ und es ist nach dem Vorigen

$$r = \frac{k}{2} \log \lambda$$

wo λ das Doppelverhältnis der beiden Endpunkte $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ und $\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ des Abbilds und derjenigen beiden Punkte, in denen die durch das Abbild bestimmte Gerade die Kugelfläche schneidet. Folglich ist

$$\lambda = \frac{\varphi_{12} + \sqrt{\varphi_{12}^2 - \Phi_1 \Phi_2}}{\varphi_{12} - \sqrt{\varphi_{12}^2 - \Phi_1 \Phi_2}},$$

woraus dann genau so wir früher hervorgeht, dass

$$\cos \frac{r}{ki} = \frac{\varphi_{12}}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}}. \tag{80}$$

Indem wir weiter Ebenenkoordinaten im Euklid'schen Raum einführen, so schreiben wi

$$\begin{aligned} \Psi &= k^2 (u^2 + v^2 + w^2) - 1 \\ \Psi_\sigma &= k^2 (u_\sigma^2 + v_\sigma^2 + w_\sigma^2) - 1 \\ \psi_{\varrho\sigma} &= k^2 (u_\varrho u_\sigma + v_\varrho v_\sigma + w_\varrho w_\sigma) - 1. \end{aligned}$$

Liegen nun zwei Ebenen in dem Lobatscheffskij'schen Raum vor, so gehen sie in zwe Ebenen $(u_1\ v_1\ w_1)$ und $(u_2\ v_2\ w_2)$ in dem Euklid'schen Raum über. Der durch den Anfangspunkt

gehende Normalschnitt der von den beiden gegebenen Ebenen gebildeten Dieders geht in den entsprechenden Normalschnitt in dem Euklid'schen Raum über. Dieser Normalschnitt schneidet aus der Kugel einen Kreis mit dem Radius k aus und der Winkel w der gegebenen Ebenen, der ja eben durch den Normalschnitt gemessen wird, ist nach dem Vorigen durch die Gleichung

$$w = \frac{1}{2i} \log \mu$$

dargestellt, wo μ das Doppelverhältniss der beiden Schenkel des Normalschnitts in dem Euklid'schen Raum mit dem von der Winkelspitze gezogenen Tangenten nach dem Durchschnittskreis zwischen der Kugel und dem Normalschnitt bedeutet. Es ist aber dieses Doppelverhältniss genau gleich demjenigen Doppelverhältniss, welches die beiden Ebenen $(u_1\, v_1\, w_1)$ und $(u_2\, v_2\, w_2)$ mit den durch ihre Schnittlinie gehenden beiden tangierenden Ebenen der Kugelfläche bilden. Folglich ist

$$\mu = \frac{\psi_{12} + \sqrt{\psi_{12}^2 - \psi_1\, \psi_2}}{\psi_{12} - \sqrt{\psi_{12}^2 - \psi_1\, \psi_2}},$$

woraus dann wieder hervorgeht, dass

(81) $$\cos w = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{\psi_1\, \psi_2}}.$$

Es bestehen somit im Raum ganz analoge Formeln zu den Formeln in der Ebene.

Aus (81) kann abgelesen werden, dass zwei auf einander senkrechte Ebenen im Lobatscheffskij'schen Raum in zwei Ebenen übergehen, von denen die eine durch den Pol der anderen in Bezug auf die Kugelfläche geht.

Insbesondere geht hieraus hervor, dass ein Strahlenbündel dritter Art des Lobatscheffskij'schen Raums in ein Strahlenbündel des Euklid'schen Raums übergeht, dessen Zentrum ausserhalb der Kugel liegt und den Pol zu dem Abbild der Polarebene des Bündels bildet. Das Strahlenbündel zweiter Art, welches ja als Grenzfall auftritt, geht in ein Bündel über, dessen Zentrum auf der Kugelfläche liegt, während das Bündel erster Art in ein Bündel übergeht, dessen Zentrum innerhalb der Kugel liegt.

Zu jedem Bündel gehört die Schaar der ortogonalen Trajektorienflächen oder Sphären, wie wir sie nannten. Falls in dem Abbild im Euklid'schen Raum das Bündelzentrum in dem Punkt $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ liegt, so stellt die Gleichung (80) die Gleichung der Abbilder der Sphären des Bündels dar. r ist der Parameter der Sphäre und $\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2$ sind die laufenden Koordinaten. Wie wir sehen ist die Gleichung von dem zweiten Grad und stellt also eine Fläche zweiter Ordnung dar. Übrigens geht aus der Gleichung hervor, dass die Fläche demjenigen Flächenbüschel angehört, welches von der Kugelfläche und der doppelt gezählten Polarebene des Bündelzentrums $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ festgelegt wird.

Die hiermit für das Kugelinnere erklärte Cayley'sche Massbestimmung können wir natürlich genau so wie auf der Grenzkugel auf den ganzen Euklid'schen Raum ausdehnen.

48. Durch naheliegende Verallgemeinerung können wir nun auch eine konforme Abbildung des Lobatscheffskij'schen Raums auf das Innere der Kugel mit dem Radius k in dem Euklid'schen Raum herstellen.

Wir nehmen zwei Ebenen E_1 und E_2 im Lobatscheffskij'schen Raum und bezeichnen ihren Winkel mit α_{12}. Diese Ebenen werden auf zwei Ebenen E_1 und E_2 im Euklid'schen Raum abgebildet, deren Koordinaten $(u_1\, v_1\, w_1)$ und $(u_2\, v_2\, w_2)$ seien. Es ist dann

$$\cos \alpha_{12} = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{\psi_1\, \psi_2}}. \tag{82}$$

Wir betrachten jetzt diejenigen Ortogonalkugeln K_1 und K_2 zu unserer Kugelfläche, die ihre Mittelpunkte in den Polen der beiden Ebenen E_1 und E_2 haben und die also durch die Schnittlinien zwischen diesen Ebenen und unserer Kugelfläche hindurchgehen. Wir bezeichnen den Winkel zwischen K_1 und K_2 mit ω_{12} und zeigen, dass $\omega_{12} = \alpha_{12}$ ist (Vgl. Nr. 36).

Falls wir die Mittelpunkte von K_1 und K_2 mit $\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1$ und $\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2$ bezeichnen, so ist ω_{12} Winkel in einem geradlinigen Dreieck, wo das Qvadrat der gegenüberliegenden Seite gleich

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2$$

ist und die Qvadrate der beiden übrigen Seiten bezw. Φ_1 und Φ_2 sind. Hieraus folgt, dass

$$\cos \omega_{12} = \frac{\varphi_{12}}{\sqrt{\Phi_1\, \Phi_2}}.$$

Da aber wie in Nr. 36

$$\varphi_{12} = k^2\, \psi_{12}, \quad \Phi_1 = k^2\, \psi_1, \quad \Phi_2 = k^2\, \psi_2,$$

so ist

$$\cos \omega_{12} = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{\psi_1\, \psi_2}}. \tag{83}$$

Aus (82) und (83) folgt, dass

$$\cos \omega_{12} = \cos \alpha_{12} \tag{84}$$

ist. Wählen wir beidemal denjenigen Winkel, innerhalb dessen der Anfangspunkt liegt, können wir ersichtlich hieraus schliessen, dass

$$\omega_{12} = \alpha_{12} \qquad \text{q. e. d.}$$

Der Winkel zweier Ebenen E_1 und E_2 in dem Lobatscheffskij'schen Raum kommt also tatsächlich in dem Euklid'schen Raum zum Vorschein. Er ist nämlich gleich dem Winkel der beiden oben eingeführten Kugelflächen K_1 und K_2.

Es ist nun nicht schwierig zu sehen, dass wir eine Abbildung des Inneren der Kugelfläche auf sich selbst so durchführen können, dass jede Ebene E in die zugehörige Kugelfläche K gebogen wird. Die Kugel K ist dabei eine Ortogonalkugel zu unserer Kugelfläche, deren Zentrum in dem Pol der Ebene E in Bezug auf unsere Grundkugel liegt und die also die Schnittkurve zwischen E und der Grundkugel enthält.

Wir ziehen deshalb durch den Anfangspunkt O einen Strahl, der die Kugel K in den Punkten A′ und A″ und die Ebene E in dem Punkt A schneidet. Weiter setzen wir

$$OA = \varrho, \quad OA' = \varrho', \quad OA'' = \varrho''.$$

Dann ist wie in Nr. 37

$$\varrho' \varrho'' = k^2, \tag{85}$$

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{2}{\varrho}, \tag{86}$$

und also

$$\varrho' = \frac{k\varrho}{k + \sqrt{k^2 - \varrho^2}}. \tag{87}$$

Bezeichnen wir nunmehr die Koordinaten von A mit ξ, η, ζ und von A′ mit ξ', η', ξ', so ist

$$\xi' = \frac{k\xi}{k + \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}}$$

$$\eta' = \frac{k\eta}{k + \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}} \tag{88}$$

$$\zeta' = \frac{k\zeta}{k + \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}}.$$

Diese Formeln vermitteln die gewünschte Abbildung des Inneren der Grundkugel auf sich selbst, so dass jede Ebene E in die zugehörige Ortogonalkugel K der Grundkugel übergeführt wird.

Bei der durch die Formeln (88) besorgten Abbildung geht ersichtlich die Gerade als Durchschnitt zweier Ebenen in einen Ortogonalkreis zur Grundkugel über.

Weiter geht ein Ebenenbüschel in eine Kugelschaar über, deren Kugeln die Grundkugel ortogonal schneiden und ihre Mittelpunkte auf der harmonischen Polare zur Büschelachse des Ebenenbüschels haben. Schneidet insbesondere die Büschelachse die Grundkugel, so schneiden sich alle Kugeln der Kugelschaar in demjenigen Ortogonalkreis, der das Abbild der Büschelachse ist. Liegt die Büschelachse ausserhalb der Grundkugel so schneidet die harmonische Polare die Grundkugel und die Kugeln der Schaar umschliessen den einen oder anderen der beiden Schnittpunkte. Berührt schliesslich die Büschelachse die Grundkugel, so berührt ebenfalls die harmonische Polare die Grundkugel in demselben Punkt und die Kugelschaar wird aus allen Ortogonalkugeln der Grundkugel zusammengesetzt, die die Büschelachse in dem betreffenden Punkt berühren.

Ein Ebenenbündel geht ersichtlich in eine zweifach unendliche Schaar von Kugeln über, nämlich diejenige Schaar von Ortogonalkugeln zur Grundkugel, deren Mittelpunkte in der Polarebene des Bündelzentrums liegen. Daraus folgt dann, dass die Strahlen des zugehörigen Strahlenbündels in Ortogonalkreise zur Grundkugel übergehen, die sämtlich auf diese Polarebene senkrecht stehen. Liegt dabei das Bündelzentrum innerhalb der Grundkugel, so gehen

alle diese Kreise durch das Abbild des Bündelzentrums und das Spiegelbild dieses Abbilds in Bezug auf die Grundkugel. Liegt das Bündelzentrum auf der Grundkugel, so gehen sie alle durch dieses Zentrum. Liegt das Bündelzentrum ausserhalb der Grundkugel, so schneidet seine Polarebene die Grundkugel und die betreffenden Ortogonalkreise schneiden sich nicht. Sie stehen dann aber sämtlich senkrecht auf der zur Polarebene gehörenden Ortogonalkugel, die das Abbild der Polarebene durch die Abbildung (88) darstellt.

Durch die hiermit behandelte Abbildung des Inneren der Grundkugel auf sich selbst haben wir auch eine neue Abbildung des Lobatscheffskij'schen Raums auf das Innere der Grundkugel gewonnen. Die zugehörigen Formeln gehen aus (88) hervor falls wir die Werte für ξ, η und ζ aus (78) eintragen. Wir erhalten

$$\xi' = \frac{k \cos \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(r)}$$

$$\eta' = \frac{k \sin \Pi(x) \cos \Pi(y)}{1 + \sin \Pi(r)} \tag{89}$$

$$\zeta' = \frac{k \sin \Pi(x) \sin \Pi(y) \cos \Pi(z)}{1 + \sin \Pi(r)}.$$

Diese Formeln besorgen nun eine Abbildung des Lobatscheffskij'schen Raums auf das Innere der Kugel $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = k^2$ im Euklid'schen Raum, so dass die Ebenen in Ortogonalkugeln übergehen und so, dass dabei der Winkel zwischen zwei Ebenen gleich dem Winkel zwischen den entsprechenden Ortogonalkugeln ist [1]).

Wie oben bemerkt wurde, geht bei dieser Abbildung die Gerade in einen Ortogonalkreis zur Grundkugel über. Das Geradenbündel geht in eine Schaar von Kreisen über. Ist das Geradenbündel von der ersten Art, so gehen alle diese Kreise durch das Abbild des Bündelzentrums. Ist das Bündel von der zweiten Art, so gehen alle Kreise durch einen Punkt auf der Grundkugel. Liegt schliesslich ein Bündel dritter Art vor, so stehen alle Kreise senkrecht auf derjenigen Ortogonalkugel, die das Abbild der Polarebene des Bündels ist. Dies kann dann so ausgesagt werden: *Die Normale einer Ebene geht in einen Kreis über, der das Abbild der Ebene ortogonal schneidet.*

Da nun der Winkel zweier Ebenen bei der Abbildung erhalten bleibt, so folgt aus der letzten Bemerkung, dass der Winkel zweier Geraden genau gleich dem Winkel ihrer Bildkreise ist. Hiermit ist dann nachgewiesen, *dass die Abbildung* (89) *eine konforme ist.*

Der Vollständigkeit halber sei noch hervorgehoben, dass die Sphären als ortogonale Trajektorienflächen des Bündels in die Ortogonalen Trajektorienflächen der oben betrachteten Kreisschaaren übergehen. Diese Flächen sind Kugeln. Bei dem Bündel erster Art erhalten wir Kugeln, die das Abbild des Bündelzentrums umschliessen, bei dem Bündel zweiter Art erhalten wir Kugeln, die die Grundkugel berühren, während bei dem Bündel dritter Art Kugeln entstehen, die sämtlich einen Kreis mit der Grundkugel gemein haben.

Weiter können wir noch falls wir nach Nr. 40 zurückgreifen behaupten, dass eine Strecke r in dem Lobatscheffskij'schen Raum durch die Formel

[1]) Dieses Bild des Lobatscheffskij'schen Raums sowie das in Nr. 43 erwähnte entsprechende Bild der Ebene gehen auf POINCARÉ zurück

$$r = k \log \lambda'$$

in dem Abbild dargestellt wird, wo λ' eine entsprechende Bedeutung wie in Nr. 40 hat.

Übrigens kann die ganze Abbildung (89) kurz so beschrieben werden, dass wir auf zwei entsprechenden Strahlen der beiden Räume den radii vectores die Bedingung

$$\varrho' = \frac{k \cos \Pi(r)}{1 + \sin \Pi(r)}$$

vorschreiben.

49. Wir können naturlich nun die oben betrachtenen Grössen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' als Koordinaten nach dem Lobatscheffskij'schen Raum überführen. Wir bekommen dabei vor allen Dingen in den Grössen ξ, η, ζ Koordinaten, in denen die Gleichung der Ebene eine lineare ist, während in den Koordinaten ξ', η', ζ' alle Sphären als Kugeln dargestellt werden.

Die unendlich fernen Elemente des Raumes werden in den Koordinaten ξ, η, ζ durch die Gleichung

(90) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k^2$$

dargestellt und es werden der Abstand zweier Punkte des Raums und der Winkel zweier Ebenen genau diejenigen Masszahlen haben, die ihnen durch eine Cayley'sche Maassbestimmung zukommen, deren absolutes Gebilde die genannte Kugel (90) ausmacht.

Die Bewegungen des Raumes werden in ξ, η, ζ durch Formeln von der folgenden Form dargestellt

$$\bar{\xi} = \frac{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1}{a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4}$$

$$\bar{\eta} = \frac{a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2}{a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4}$$

$$\bar{\zeta} = \frac{a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3}{a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4}$$

mit der Bedingung, dass dabei die Kugel (90) in sich übergeht.

Durch genau dieselbe Überlegung wie in der Ebene erhalten wir für das Bogenelement im Raum in den neuen Koordinaten die Formeln

$$d\sigma^2 = k^2 \frac{(k^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2)(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + (\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta)^2}{(k^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2)^2}$$

und

$$d\sigma^2 = \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{\left(1 - \frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{k^2}\right)^2}.$$

Die letzte Formel zeigt dann wieder, dass die Beziehung (89) zwischen dem Lobatscheffskij'schen und dem Euklid'schen Raum eine konforme ist.

Der Sinussatz des allgemeinen Dreikants.

50. Wir haben im Vorhergehenden die Maasszahlen des Abstands zweier Punkte und des Winkels zweier Ebenen des Lobatscheffskij'schen Raums als einfache projektive Grössen im Euklid'schen Raum wiedergefunden. Diesen projektiven Grössen haben wir dann eine allgemeinere Fassung gegeben, indem wir sie auf den ganzen Raum ausdehnten.

Falls wir zwei sich schneidende Geraden des Lobatscheffskij'schen Raums betrachten, so ist ersichtlich ihr Winkel genau gleich dem Winkel, den die beiden durch die Geraden auf der von ihnen bestimmten Ebene gezogenen Ortogonalebenen mit einander bilden. Hiermit ist dann auch die Möglichkeit gegeben, ebenfalls den Winkel zweier sich schneidender Geraden durch eine projektive Grösse im Euklid'schen Raum auszudrücken. Die beiden Ortogonalebenen, um die es sich handelt, gehen in zwei Ebenen dieses Raums über, die durch den Pol der durch die Abbilder der beiden Geraden bestimmten Ebene in Bezug auf die Grundkugel $\Phi = 0$ hindurchgehen und es wird also die Maasszahl des Winkels der beiden Geraden genau gleich $\frac{1}{2i} \log r$, wo r das Doppelverhältniss der zuletzt genannten Ebenen mit den durch ihre Schnittlinie gehenden berührenden Ebenen der Grundkugel bedeutet. Die hiermit gewonnene projektive Grösse können wir natürlich auch auf den ganzen Euklid'schen Raum ausdehnen.

Nach dieser Vorbereitung nehmen wir ein beliebiges Dreikant des Euklid'schen Raums, gebildet von drei durch einen Punkt gehenden Ebenen $(u_1\, v_1\, w_1)$, $(u_2\, v_2\, w_2)$ und $(u_3\, v_3\, w_3)$ und wollen eine einfache Beziehung zwischen den Cayley'schen Maasszahlen der drei von den Ebenen gebildeten Winkel und der drei von den Kanten gebildeten Winkel ableiten.

Wir nehmen an, dass die Dreikantspitze nicht auf der Kugel $\Phi = 0$ liegt und dass weder eine Seitenfläche noch eine Kante die Kugel berührt. Wir bezeichnen die Cayley'sche Maasszahl des von den Ebenen $(u_1\, v_1\, w_1)$ und $(u_2\, v_2\, w_2)$ gebildeten Winkels mit α_{12} und des in $(u_3\, v_3\, w_3)$ liegenden Winkels zweier Kanten mit a_{12}. Dann ist unmittelbar

$$\cos \alpha_{12} = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{\Psi_1\, \Psi_2}}$$

und also

$$\sin^2 \alpha_{12} = \frac{\Psi_1\, \Psi_2 - \psi_{12}^2}{\Psi_1\, \Psi_2}. \tag{91}$$

Falls wir nun mit $(u_\varrho'\, v_\varrho'\, w_\varrho')$ diejenige Ebene verstehen, die durch die Schnittlinie zwischen $(u_\varrho\, v_\varrho\, w_\varrho)$ und $(u_3\, v_3\, w_3)$ und den Pol von $(u_3\, v_3\, w_3)$ geht (wobei $\varrho = 1$ oder 2 ist), und schreiben

$$\Psi_\varrho' = k^2 (u_\varrho'^2 + v_\varrho'^2 + w_\varrho'^2) - 1$$
$$\psi_{\varrho\sigma}' = k^2 (u_\varrho' u_\sigma' + v_\varrho' v_\sigma' + w_\varrho' w_\sigma') - 1,$$

so ist nach der einleitenden Vorbemerkung

$$\sin^2 a_{12} = \frac{\Psi_1'\, \Psi_2' - \psi'^2_{12}}{\Psi_1'\, \Psi_2'}. \tag{92}$$

Es lassen sich nun aber die Koordinaten $u_\varrho' v_\varrho' w_\varrho'$ durch $u_\varrho v_\varrho w_\varrho$ und $u_3 v_3 w_3$ einfach ausdrücken. Es hat nämlich jede Ebene des von $(u_\varrho v_\varrho w_\varrho)$ und $(u_3 v_3 w_3)$ bestimmten Ebenenbüschels die Koordinaten

$$\frac{u_\varrho + t_\varrho u_3}{1+t_\varrho}, \qquad \frac{v_\varrho + t_\varrho v_3}{1+t_\varrho}, \qquad \frac{w_\varrho + t_\varrho w_3}{1+t_\varrho} \tag{93}$$

und es ist nur noch der Parameter t_ϱ so zu bestimmen, dass die zuletzt genannte Ebene durch den Pol von $(u_3 v_3 w_3)$ geht. Dazu ist aber notwendig, dass

$$k^2 \left\{ \frac{u_\varrho + t_\varrho u_3}{1+t_\varrho} u_3 + \frac{v_\varrho + t_\varrho v_3}{1+t_\varrho} v_3 + \frac{w_\varrho + t_\varrho w_3}{1+t_\varrho} w_3 \right\} - 1 = 0$$

ist. Hieraus erhalten wir

$$t_\varrho = -\frac{\psi_{\varrho 3}}{\psi_3}. \tag{94}$$

Es haben also $u_\varrho' v_\varrho' w_\varrho'$ die Werte (93), wo t_ϱ der Wert (94) zukommt.

Falls wir nach einander $\varrho = 1$ und $\varrho = 2$ setzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi_1' &= T_1 \cdot \frac{\psi_1 \psi_3 - \psi_{13}^2}{\psi_3} \\ \psi_2' &= T_2 \cdot \frac{\psi_2 \psi_3 - \psi_{23}^2}{\psi_3}, \end{aligned} \tag{95}$$

wo

$$T_\varrho = \frac{1}{(1+t_\varrho)^2}.$$

Weiter erhalten wir

$$\psi'^2_{12} = T_1 T_2 \cdot \frac{(\psi_{12}\psi_3 - \psi_{13}\psi_{23})^2}{\psi_3^2}$$

und also

$$\psi_1' \psi_2' - \psi'^2_{12} = \frac{T_1 T_2}{\psi_3} \left\{ \psi_1 \psi_2 \psi_3 - \psi_1 \psi_{23}^2 - \psi_2 \psi_{31}^2 - \psi_3 \psi_{12}^2 + 2\psi_{23}\psi_{31}\psi_{12} \right\}. \tag{96}$$

Aus (95) und (96) folgt, dass

$$\frac{\psi_1' \psi_2' - \psi'^2_{12}}{\psi_1' \psi_2'} = \frac{\psi_1 \psi_2 \psi_3 - \psi_1 \psi_{23}^2 - \psi_2 \psi_{31}^2 - \psi_3 \psi_{12}^2 + 2\psi_{23}\psi_{31}\psi_{12}}{(\psi_1\psi_2 - \psi_{12}^2)(\psi_2\psi_3 - \psi_{23}^2)(\psi_3\psi_1 - \psi_{31}^2)} \cdot \frac{\psi_1\psi_2 - \psi_{12}^2}{\psi_1\psi_2}$$

oder also, dass

$$\frac{\psi_1' \psi_2' - \psi'^2_{12}}{\psi_1' \psi_2'} = \varkappa^2 \frac{\psi_1\psi_2 - \psi^2_{12}}{\psi_1\psi_2}, \tag{97}$$

wo $\varkappa^2$ bei jeder zyklischen Verschiebung der Indizes invariant bleibt.

Aus (97) schliessen wir auf Grund von (91) und (92), dass

$$\sin^2 a_{12} = \varkappa^2 \cdot \sin^2 \alpha_{12}. \tag{93}$$

Da aber hier $\varkappa^2$ bei jeder zyklischen Verschiebung der Indizes invariant bleibt, so schliessen wir weiter hieraus, dass bei geeigneter Festlegung der Winkel

$$\sin \alpha_{12} : \sin \alpha_{23} : \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{12} : \sin \alpha_{23} : \sin \alpha_{31}. \tag{99}$$

Dies ist der Sinussatz des allgemeinen Dreikants.

Bei spezieller Lage des Dreikants erhält man aus (99) die früher abgeleiteten Grundformeln der verschiedenen Trigonometrieen auf den verschiedenen Sphären.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 8.

ÜBER DIE TRACTRIX UND DIE PSEUDOSPHÄRE IN DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE

VON

SEVERIN JOHANSSON.

HELSINGFORS 1918.
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT.

Einleitung.

1. Es giebt bekanntlich unendlich viele hyperbolische Räume, deren jeder durch einen bestimmten Wert einer positiven, reellen Konstante k festgelegt wird. Der Euklid'sche Raum ist dabei als Grenzfall für $k=\infty$ aufzufassen.

In dem hyperbolischen Raum R_k gilt für die Seiten und die Winkel des geradlinigen Dreiecks eine Trigonometrie, deren Formeln aus der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie des Euklid'schen Raums dadurch formal hervorgehen, dass wir den Radius der Kugel mit ki ersetzen. Diese Formeln gehen für $k=\infty$ in die Formeln der ebenen Trigonometrie des Euklid'schen Raums über.

2. Es giebt nun weiter bekanntlich in dem Euklid'schen Raum R_∞ eine Rotationsfläche, die *Pseudosphäre*, deren geodätische Dreiecke genau die Trigonometrie in R_k aufweisen [1]). Die Meridiankurve der Fläche ist die *Tractrix von Huyghens* mit der konstanten Tangentenlänge k zwischen dem Berührungspunkt und der Asymptote.

Diese Eigenschaft der Pseudosphäre ist einfach abzuleiten. Wählen wir nämlich die Asymptote der Tractrix zur x-Achse und bezeichnen mit ω den Winkel zwischen der y-Koordinate und der Tangente, so ist $\cos\omega=\frac{y}{k}$. Andererseits ist aber, wenn wir das Bogenelement der Kurve mit $d\sigma$ bezeichnen, $\cos\omega=-\frac{dy}{d\sigma}$. Infolgedessen ist

$$\frac{d\sigma}{dy}=-\frac{k}{y}$$

und also

$$y=y^{(0)}\cdot e^{-\frac{\sigma}{k}},$$

wo y und $y^{(0)}$ $(y<y^{(0)})$ die Ordinaten zweier Punkte der Kurve und σ den längs der Kurve gemessenen Abstand der Punkte bedeuten. Hieraus folgt dann, dass zwei zwischen denselben

[1]) Dies ist eine bekannte Eigenschaft aller Flächen mit der konstanten negativen Krümmung $-\frac{1}{k^2}$, obwohl wir hier für unsere Zwecke nur die Pseudosphäre besonders hervorheben.

Meridianen liegende Bögen β und $\beta^{(0)}$ zweier Breitenkreise auf der Pseudosphäre durch die Gleichung

$$\beta = \beta^{(0)} \cdot e^{-\frac{\sigma}{k}}$$

mit einander verbunden sind.

Führen wir nunmehr krummlinige Koordinaten ein, wobei in gewöhnlicher Weise die Meridiane und Breitenkreise zu Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ gewählt werden, so ist auf Grund dieser Eigenschaft das Bogenelement ds auf der Fläche durch die Formel

$$ds^2 = e^{-\frac{2v}{k}} du^2 + dv^2$$

dargestellt.

Dies ist aber genau dieselbe Formel, die wir für das Bogenelement in der Ebene in R_k erhalten, falls wir daselbst als Kurven $u = \text{const.}$ ein Büschel paralleler Geraden und als Kurven $v = \text{const.}$ die zugehörigen Grenzkreise wählen. Es lässt sich somit die Pseudosphäre auf die Ebene in R_k abwickeln und zwar so, dass die Meridiane in parallele Geraden übergehen und die Breitenkreise in darauf ortogonale Grenzkreise. Da bei dieser Abwickelung die geodätischen Linien auf der Pseudosphäre in die Geraden der Ebene übergehen, so ist die oben hervorgehobene Eigenschaft der geodätischen Dreiecke auf der Pseudosphäre bewiesen.

3. In vorliegender Abhandlung werde ich in einem beliebigen hyperbolischen Raum R_{k_0} Rotationsflächen aufstellen, die das Analogon zu der Pseudosphäre in R_∞ bilden. Diese Flächen hängen wie die Pseudosphäre von einem Parameter k ab und es wird für jeden Wert von k auf den zugehörigen Flächen in R_{k_0} für die geodätischen Dreiecke die ebene Trigonometrie des Raums R_k gelten.

Die Rotationsflächen in einem hyperbolischen Raum.

4. Vorläufig werde ich den Begriff der Rotationsfläche in einem hyperbolischen Raum festlegen.

In einem hyperbolischen Raum giebt es drei Arten von Ebenenbüscheln. Das Büschel *erster Art* besteht aus allen Ebenen, die durch eine Raumgerade gehen. Die Ebenen des Büschels *zweiter Art* sind mit einander parallel, während schliesslich bei dem Büschel *dritter Art* sämtliche Ebenen des Büschels auf einer Raumgeraden senkrecht stehen.

Es gehört nun ersichtlich zu jedem Büschel ein Ortogonalbüschel von Ebenen, welches mit dem gegebenen zusammen ein *Doppelbüschel* bildet. Ist das gegebene Büschel von der ersten oder dritten Art, so ist offenbar das Ortogonalbüschel bezw. von der dritten oder ersten Art, und es wird dann jedesmal das Doppelbüschel aus allen durch eine Raumgerade gehenden und allen auf derselben Geraden senkrechten Ebenen zusammengesetzt. Wir nennen dann das Doppelbüschel *eigentlich* und die genannte Raumgerade die *Achse* des Doppelbüschels. Ist das gegebene Büschel von der zweiten Art, so ist bekanntlich auch das Ortogonalbüschel von der zweiten Art. Sie bilden dann ein *uneigentliches* Doppelbüschel.

Es giebt nun ersichtlich Bewegungen des Raums, die ein Doppelbüschel in sich so überführen, dass die Ebenen des einen Büschels Bahnebenen und die des anderen Niveauebenen

der Bewegung sind. Wir nennen jede derartige Bewegung eine *Drehung*. Es gehört dann offenbar zu jedem Doppelbüschel zwei Schaaren von Drehungen, jenachdem das eine oder andere Ebenenbüschel als Bahnebenen gewählt wird. Wir nennen diese Drehungen *konjugierte* Drehungen. Bei dem eigentlichen Doppelbüschel sind die konjugierten Drehungen ersichtlich von verschiedenem Typus und wir nennen sie dann Drehungen *erster* oder *dritter* Art, jenachdem das Niveauebenenbüschel von der ersten oder dritten Art ist. Bei dem uneigentlichen Doppelbüschel entsteht nur noch ein Typus von Drehungen, die wir dann Drehungen *zweiter* Art nennen.

Bei dem eigentlichen Doppelbüschel bleibt die Achse Punkt für Punkt fest oder aber sie wird in sich verschoben, jenachdem die Drehung von der ersten oder dritten Art ist. Sonst beschreibt bei jeder Drehung jeder Raumpunkt einen *Zykel* und zwar einen *Kreis*, einen *Grenzkreis* oder eine *aequidistante Kurve*, jenachdem eine Drehung erster, zweiter oder dritter Art vorliegt. Bei der Drehung dritter Art handelt es sich ersichtlich um eine Schiebung des Raums längs der Achse des Doppelbüschels.

Falls wir zwei konjugierte Drehungen zusammensetzen, entsteht eine *Schraubung* des Raums und zwar eine eigentliche oder uneigentliche Schraubung jenachdem das Doppelbüschel eigentlich oder uneigentlich ist.

5. Bei einer Drehung beschreibt eine in einer Niveauebene liegende Kurve eine *Rotationsfläche*. Wir sagen dabei, dass die Fläche von derselben Art ist wie die zugehörige erzeugende Drehung. Die verschiedenen Lagen der Ausgangskurve bei der Drehung nennen wir *Meridiane* und die von den Punkten der Kurve beschriebenen Zykeln *Breitenzykeln* auf der Fläche. Die Meridiane und Breitenzykeln werden von den Niveau- bezw. Bahn-ebenen ausgeschnitten.

Eine besonders bemerkenswerte Klasse von Rotationsflächen wollen wir sogleich hervorheben. Sie entstehen dadurch, dass wir als Meridiankurve die Bahnkurve einer Drehung wählen und dann die konjugierte Drehung ausüben. Bei dieser Fläche sind sowohl die Meridiane als die Breitenzykeln Zykeln und zwar ist bei dem eigentlichen Doppelbüschel die eine dieser Kurven ein Kreis und die andere eine aequidistante Kurve, während sie bei dem uneigentlichen Doppelbüschel beide Grenzkreise sind. In dem letzteren Fall ist die Fläche einfach eine *Grenzkugel*. In dem ersteren Fall erhalten wir eine Fläche, die dadurch entsteht, dass eine aequidistante Kurve zu der Achse um diese herum gedreht wird, oder aber eine Fläche, die von einem Kreis beschrieben wird, dessen Mittelpunkt längs der Achse gleitet, während seine Ebene auf der Achse senkrecht verbleibt. Diese Flächen sind aber nicht gestaltlich verschieden und wir kommen somit auch bei dem eigentlichen Doppelbüschel zu einem einzigen Flächentypus. Diese Fläche bildet dabei das Analogon zu dem *Kreiszylinder* in dem Euklid'schen und der *Clifford'schen Fläche* in dem elliptischen Raum.

Offenbar gehen die hiermit zu dem Doppelbüschel erklärten Flächen bei allen zu dem Doppelbüschel gehörenden Schraubungen in sich über.

Koordinaten in der Ebene.

6. Die Rotationsfläche entsteht durch Drehung einer Kurve, die in einer Niveauebene E liegt. Wir wollen nun vorläufig geeignete Koordinaten in E einführen und gewisse vorbereitende Formeln zusammenstellen.

Es giebt in E zwei ausgezeichnete Kurvenschaaren, die ein Ortogonalsystem bilden, nämlich die Spurlinien der Bahnebenen und die zu diesem Strahlenbüschel gehörende ortogonale Zykelschaar. Wir wählen die Koordinaten jedesmal so aus, dass die Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ bezw. mit den Strahlen und Zykeln zusammenfallen. Bei der konjugierten Drehung sind dann diese Kurven einfach Niveau- und Bahn-kurven.

Bei der Drehung *erster Art* stehen alle die genannten Spurlinien auf der Achse des Doppelbüschels senkrecht und bilden somit ein Büschel dritter Art mit dieser Achse als Büschelpolare. Wir wählen diese Polare zur x-Achse und messen die x-Koordinate von einem festen Ausgangspunkt. Die y-Koordinate wird längs einem Büschelstrahl von der x-Achse aus gemessen. Wir nennen die Koordinaten x_1 und y_1.

Bei der Drehung *zweiter Art* sind die Spurlinien parallel und bilden somit ein Büschel zweiter Art. Hier werden die Koordinaten x_2 und y_2 genau so wie im ersten Fall festgelegt nur mit dem Unterschied, dass wir hier einen beliebigen Grenzkreis aus der Ortogonalschaar zur Kurve $y_2 = 0$ wählen. y_2 wird nach der konvexen Seite dieses Grenzkreises positiv gerechnet.

Bei der Drehung *dritter Art* gehen alle die oben genannten Spurlinien durch den Schnittpunkt zwischen der Ebene E und der Achse des Doppelbüschels und bilden somit ein Büschel erster Art. Wir wählen jetzt als x-Koordinate den Winkel zwischen einem Büschelstrahl und einem festen Ausgangsstrahl und messen y als radius vector längs dem Büschelstrahl. Wir nennen die Koordinaten x_3 und y_3.

7. Liegt nun in irgend einem Fall eine Kurve

$$y = y(x)$$

vor, so bezeichnen wir mit ω den Winkel zwischen der Tangente und der y-Koordinate und mit $d\sigma$ das Bogenelement der Kurve. Es ist dann offenbar

$$\cos\omega = -\frac{dy}{d\sigma}. \tag{1}$$

Bezeichnen wir nun weiter mit $d\sigma'$ das Bogenelement auf der durch den Kurvenpunkt (x, y) gehenden Kurve $y = \text{const.}$, so ist $d\sigma^2 = d\sigma'^2 + dy^2$. Da in unseren drei Fällen die Beziehungen

$$d\sigma_1' = \frac{dx_1}{\sin \Pi(y_1)}, \qquad d\sigma_2' = e^{\frac{y_2}{k_0}}\, dx_2, \qquad d\sigma_3' = dx_3 \,.\, k_0 \cot \Pi(y_3)$$

gelten, wo k_0 die Konstante des hyperbolischen Raums bedeutet, so folgen für das Bogenelement der Kurve in den drei Fällen die Gleichungen

$$(2') \qquad d\sigma_1^2 = \frac{dx_1^2}{\sin^2 \Pi(y_1)} + dy_1^2,$$

$$(2'') \qquad d\sigma_2^2 = e^{\frac{2y_2}{k_0}} dx_2^2 + dy_2^2,$$

$$(2''') \qquad d\sigma_3^2 = k_0^2 \cot^2 \Pi(y_3)\, dx_3^2 + dy_3^2.$$

Die Tractrix im Raum R_{k_0}.

8. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zu unserem Problem. Wir nennen zwei zwischen denselben Meridianen liegende Bögen zweier Breitenzykeln *entsprechende Bögen* und stellen uns, in Übereinstimmung mit den in Nr. 2 durchgeführten Entwickelungen über die Pseudosphäre, die Aufgabe, *eine Rotationsfläche in R_{k_0} anzugeben, auf welcher entsprechende Breitenzykelbögen β und $\beta^{(0)}$ durch die Gleichung*

$$\beta = \beta^{(0)} \cdot e^{-\frac{\sigma}{k}}$$

vereinigt sind. Hier ist σ der längs einem Meridian gemessene Abstand der Breitenzykeln und k eine Konstante.

Die Meridiankurve dieser Fläche nennen wir *Tractrix* und bezeichnen sie mit $T_{k_0}^{(k)}$. Unseren drei Fällen entsprechend erhalten wir drei Arten von Tractricen, die wir mit $(T_{k_0}^{(k)})_1$, $(T_{k_0}^{(k)})_2$ und $(T_{k_0}^{(k)})_3$ bezeichnen.

Wir können nun einfach die obige Gleichung in eine Bedingung für diese Meridiankurve umsetzen. Wir bezeichnen deshalb mit y und $y^{(0)}$ die y-Koordinaten derjenigen beiden Punkte auf der Meridiankurve, von denen bei der Drehung die betrachteten Breitenzykeln beschrieben werden. Ersichtlich können wir nun durch eine zu dieser Drehung konjugierte Drehung die eine Breitenzykelebene in die andere überführen, wodurch β und $\beta^{(0)}$ in entsprechende Bögen zweier konzentrischer Zykeln übergehen. Hieraus folgt, dass das Verhältniss $\frac{\beta}{\beta^{(0)}}$ in den drei Fällen durch die Ausdrücke

$$\frac{\cot \Pi(y_1)}{\cot \Pi(y_1^{(0)})}, \qquad e^{\frac{y_2 - y_2^{(0)}}{k_0}}, \qquad \frac{1}{\sin \Pi(y_3)} : \frac{1}{\sin \Pi(y_3^{(0)})}$$

gegeben ist.

Indem wir nach der Fragestellung zurückgreifen, erhalten wir hieraus für die drei Kurven $T_{k_0}^{(k)}$ die Beziehungen

$$(3') \qquad \frac{\cot \Pi(y_1)}{\cot \Pi(y_1^{(0)})} = e^{-\frac{\sigma_1}{k}},$$

$$(3'') \qquad e^{\frac{y_2 - y_2^{(0)}}{k_0}} = e^{-\frac{\sigma_2}{k}},$$

$$(3''') \qquad \frac{1}{\sin \Pi(y_3)} : \frac{1}{\sin \Pi(y_3^{(0)})} = e^{-\frac{\sigma_3}{k}},$$

wo y und $y^{(0)}$ die y-Koordinaten zweier Punkte und σ die Kurvenlänge zwischen diesen Punkten bedeuten.

9. Aus diesen Gleichungen können wir nun unmittelbar die Differentialgleichungen der drei Kurven $T_{k_0}^{(k)}$ ableiten, indem wir jedesmal nach y differentiieren und dann $d\sigma$ aus (2) eintragen. Um dies durchzuführen, schreiben wir zuerst die Gleichungen (3) in die Form

$$\sigma_1 = -k \log \frac{\cot \Pi(y_1)}{\cot \Pi(y_1^{(0)})}, \qquad \sigma_2 = -\frac{k}{k_0}(y_2 - y_2^{(0)}), \qquad \sigma_3 = -k \log \frac{\sin \Pi(y_3^{(0)})}{\sin \Pi(y_3)},$$

woraus durch Differentiation folgende drei Gleichungen erhalten werden

$$(4') \qquad d\sigma_1 = -\frac{k}{k_0} \cdot \frac{1}{\cos \Pi(y_1)} dy_1,$$

$$(4'') \qquad d\sigma_2 = -\frac{k}{k_0} dy_2,$$

$$(4''') \qquad d\sigma_3 = -\frac{k}{k_0} \cos \Pi(y_3) dy_3.$$

Falls wir nun jedesmal $d\sigma$ aus der entsprechenden Gleichung (2) eintragen, kommen wir zu folgenden Differentialgleichungen der Kurven $(T_{k_0}^{(k)})_1$, $(T_{k_0}^{(k)})_2$ und $(T_{k_0}^{(k)})_3$:

$$(5') \qquad \frac{dx_1}{dy_1} = \frac{1}{k_0} \operatorname{tg} \Pi(y_1) \sqrt{k^2 - k_0^2 \cos^2 \Pi(y_1)},$$

$$(5'') \qquad \frac{dx_2}{dy_2} = e^{-\frac{y_2}{k_0}} \sqrt{\frac{k^2}{k_0^2} - 1},$$

$$(5''') \qquad \frac{dx_3}{dy_3} = \frac{1}{k_0^2} \operatorname{tg} \Pi(y_3) \sqrt{k^2 \cos^2 \Pi(y_3) - k_0^2}.$$

10. Aus den hiermit abgeleiteten Differentialgleichungen, wo jedesmal die Wurzelgrösse mit doppeltem Vorzeichen zu rechnen ist, können wir vorläufig einige Resultate ablesen.

Vor allem bemerken wir, dass x als Funktion von y bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Dies besagt, dass die Lösungen von (5) durch die zur vorgelegten Drehung konjugierten Drehungen aus einander hervorgehen.

Die Gleichung (5') behält für jeden Wert von k reelle Bedeutung, (5'') dagegen nur für $k \geqq k_0$ und (5''') nur für $k > k_0$.

Der Fall $k = \infty$ ist jedesmal besonders bemerkenswert. Es ist dann nämlich $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $y = \text{const}$. Die Kurve $T_{k_0}^{(\infty}$ ist also jedesmal eine Bahnkurve zu der konjugierten Drehung. Die zugehörige Rotationsfläche ist dann die in Nr. 5 besprochene Fläche, die bei jeder zu dem Doppelbüschel gehörenden Schraubung in sich verschoben wird. Auf dieser Fläche sind entsprechende Breitenzykelbögen gleich.

Für $k = k_0$ ist nach (5'') $\frac{dx_2}{dy_2} = 0$ oder $x_2 = \text{const}$. Die Kurven $(T_{k_0}^{(k_0)})_2$ fallen somit ein-

fach mit diesen Geraden zusammen und es ist also die von uns gesuchte Rotationsfläche in diesem Fall eine Ebene. Aus (5′) wieder folgt für $k = k_0$ die Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{dy_1} = \pm \frac{\sin^2 \Pi(y_1)}{\cos \Pi(y_1)}.$$

Hieraus folgt durch Integration, dass

$$\pm \cos \Pi(y_1) = e^{\pm \frac{x_1 - x_1^{(0)}}{k_0}}$$

ist, wo $x_1^{(0)}$ die Integrationskonstante ist und links das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem $y_1 > 0$ oder < 0 ist. Dies ist aber die Gleichung derjenigen vier Geraden, die mit der x_1-Achse und der Geraden $x_1 = x_1^{(0)}$ gleichzeitig parallel sind. Es fällt somit $(T_{k_0}^{(k_0)})_1$ mit diesen Geraden zusammen und die zugehörige Rotationsfläche ist einfach aus zwei asymptotischen Kegelmanteln zusammengesetzt.

Eigenschaften der Tractrix.

11. Die Kurven $T_{k_0}^{(k)}$ haben eine einfache Tangenteneigenschaft, die das Analogon zu der bekannten Eigenschaft der Tangente bei der gewöhnlichen Tractrix im Euklid'schen Raum bildet. Bei Ableitung dieser Eigenschaft werden wir jedesmal für die Konstante k eine einfache Bedeutung finden.

Wir kehren nach der Gleichung (1) zurück. Falls wir hier die Werte von $d\sigma$ aus den Gleichungen (4) eintragen, so erhalten wir in den drei Fällen die Beziehungen

$$\cos \omega_1 = \frac{k_0}{k} \cos \Pi(y_1), \tag{6′}$$

$$\cos \omega_2 = \frac{k_0}{k}, \tag{6″}$$

$$\cos \omega_3 = \frac{k_0}{k} \cdot \frac{1}{\cos \Pi(y_3)}. \tag{6‴}$$

Wir wollen diese Gleichungen jede für sich näher in Betracht ziehen.

12. Ist in der Gleichung (6′) zuerst $k < k_0$, so ist $\omega_1 < \Pi(y_1)$ und es schneidet somit die Tangente in jedem Punkt der Kurve die x_1-Achse. Bezeichnen wir die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und der x_1-Achse mit r, so erhalten wir aus dem von r, y_1 und der x_1-Achse gebildeten Dreieck die Beziehung

$$\cos \omega_1 = \frac{\cos \Pi(y_1)}{\cos \Pi(r)}.$$

Falls wir diese Gleichung mit (6′) vergleichen, so sehen wir, dass

$$k = k_0 \cos \Pi(r) \tag{7}$$

ist. Hieraus folgt dann insbesondere, *dass r längs der ganzen Kurve konstant ist.* Die Kurve $(T^{(k)}_{k_0})_1$ hat somit für $k < k_0$ genau dieselbe Eigenschaft der Tangente wie die Tractrix im Euklid'schen Raum.

Ist $k = k_0$, so ist nach (6′) $\omega_1 = \Pi(y_1)$. Dies steht in Übereinstimmung mit der in Nr. 10 entwickelten Tatsache, dass die Kurve $(T^{(k_0)}_{k_0})_1$ eine mit der x_1-Achse parallele Gerade ist.

Wenn schliesslich $k > k_0$ ist, so ist nach (6′) $\omega_1 > \Pi(y_1)$ und es haben somit die Tangente und die x_1-Achse eine gemeinsame Senkrechte, die dann eine Gerade $x_1 = \text{const.}$ ist. Bezeichnen wir das Stück der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und dieser Senkrechten mit p, so erhalten wir aus dem von y_1, der Tangente, der x_1-Achse und der Senkrechten gebildeten dreirechtwinkligen Viereck die Beziehung

$$\cos \omega_1 = \cos \Pi(p) \cos \Pi(y_1).$$

Falls wir nun wieder mit (6′) vergleichen, so wird

$$k = \frac{k_0}{\cos \Pi(p)}. \tag{8}$$

Hieraus schliessen wir, *dass p längs der ganzen Kurve konstant ist.*

13. Gehen wir jetzt zu der Kurve $(T^{(k)}_{k_0})_2$, so bemerken wir sogleich, dass nach der Gleichung (6″) *der Winkel ω_2 konstant ist.* Bestimmen wir in diesem Fall die Länge p durch die Gleichung

$$\Pi(p) = \omega_2,$$

und tragen die so festgelegte konstante Länge p längs der Tangente von dem Berührungspunkt ab, so steht die durch den anderen Endpunkt von p gehende Gerade $x_2 = \text{const.}$ auf p senkrecht. Da weiter nach (6″) k und p durch die Gleichung (8) verbunden sind, so sind wir somit zu genau derselben Tangenteneigenschaft gekommen wie in der vorigen Nummer für $k > k_0$.

Hierbei ist angenommen, dass $k > k_0$ ist. Es kann aber auch $k = k_0$ sein. Dann ist nach (6″) der Winkel $\omega_2 = 0$. Die Kurve ist dann, wie in Nr. 10 hervorgehoben wurde, selbst eine Gerade $x_2 = \text{const.}$

Die Eigenschaft der Kurve $(T^{(k)}_{k_0})_2$, die Geraden $x_2 = \text{const.}$ isogonal zu schneiden, führt übrigens unmittelbar zur Bestimmung der Kurve. Wird nämlich die Konstante q durch die Gleichung

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2} - \Pi(q) \tag{9}$$

bestimmt und betrachten wir diejenigen beiden aequidistanten Kurven, die im Abstand q von einer Geraden $x_2 = \text{const.}$ laufen, so schneiden diese offenbar jeden anderen Strahl $x_2 = \text{const.}$ unter dem Winkel ω_2. Da aber die Gesamtheit dieser Kurven keine Einhüllende haben, so sind sie die einzigen Kurven, die die genannte Eigenschaft besitzen, und es muss somit $(T^{(k)}_{k_0})_2$ eine derartige Kurve sein.

Übrigens folgt aus (6″) und (9), dass q durch die Gleichung

(10) $$k = \frac{k_0}{\sin \Pi(q)}$$

mit k verbunden ist. Wir können somit den Satz aussprechen

Die Kurve $(T_{k_0}^{(k)})_2$ *ist eine aequidistante Kurve, die in dem durch die Gleichung* (10) *bestimmten Abstand* q *von einer Geraden* $x_2 = const$ *läuft.*

14. In dem dritten Fall ist nach (6‴) für endliche Werte von k der Winkel ω_3 kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Es giebt somit eine von dem radius vector des Berührungspunkts verschiedene Gerade $x_3 = \text{const.}$, die auf der Tangente senkrecht steht. Falls wir nun wieder die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und dieser Senkrechten mit p bezeichnen, so erhalten wir aus dem von der Senkrechten, der Tangente und der y_3-Koordinate gebildeten Dreieck die Beziehung

$$\cos \omega_3 = \frac{\cos \Pi(p)}{\cos \Pi(y_3)}.$$

Durch Vergleichung mit (6‴) erhalten wir wieder zwischen k und p die Gleichung (8) und können somit wieder schliessen, *dass* p *längs der ganzen Kurve konstant ist.*

15. Die hiermit gewonnenen Ergebnisse fassen wir in folgenden Satz zusammen.

Für $k < k_0$ *schneidet die Tangente der Kurve* $(T_{k_0}^{(k)})_1$ *die* x_1*-Achse und es ist die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnittpunkt mit der* x_1*-Achse konstant gleich* r*, wo* r *durch die Gleichung* (7) *bestimmt ist. Für* $k > k_0$ *steht in jedem von den drei Fällen die Tangente der Kurve* $T_{k_0}^{(k)}$ *auf einer zugehörigen Geraden* $x = const.$ *senkrecht und es ist die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und der genannten Geraden konstant gleich* p*, wo* p *durch die Gleichung* (8) *festgelegt wird.*

Der Fall $k = k_0$ ist durchaus als ein Grenzfall zu betrachten. Es ist nämlich dann r oder p unendlich gross.

Ersichtlich können wir die hiermit gewonnene Tangenteneigenschaft als eine Trajektorieneigenschaft der Kurve aussprechen. Wir erhalten folgenden Satz, wo r und p die obigen Bedeutungen haben:

Die Tractrix im Raum R_{k_0} *ist ortogonale Trajektorie einer Zykelschaar und zwar für* $k < k_0$ *zu der Schaar aller Kreise mit dem Radius* r*, deren Mittelpunkte auf der* x_1*-Achse liegen, und für* $k > k_0$ *zu der Schaar aller aequidistanten Kurven, die im Abstand* p *von den Geraden* $x = const.$ *laufen.*

Für $k = k_0$ besteht die ortogonale Zykelschaar ersichtlich aus konzentrischen Grenzkreisen.

Für $k = \infty$ ist $p = 0$ und es fallen somit die aequidistanten Kurven mit den Geraden $x = \text{const.}$ zusammen. Die Kurve $T_{k_0}^{(\infty)}$ ist also ein beliebiger Zykel $y = \text{const.}$, wie schon in Nr. 10 hervorgehoben wurde.

Abbildung auf die Grenzkugel.

16. Die hiermit entwickelte Tangenteneigenschaft der Tractrix erhält eine besonders einfache Bedeutung, falls wir die xy-Ebene auf eine sie berührende Grenzkugel durch Vermittelung der Achsen der Grenzkugel projizieren [1]).

Bei dieser Projektion wird die ganze Ebene auf eine Kalotte mit dem längs der Grenzkugel gemessenen Radius k_0 ein-eindeutig abgebildet. Die Geraden der Ebene gehen in Grenzkreise auf der Grenzkugel über. Dabei sind die Maasszahlen der Strecke und des Winkels in der Ebene genau mit denjenigen Maasszahlen identisch, die ihren Abbildern auf der Grenzkugel zukommen, falls wir daselbst eine Cayley'sche Maassbestimmung mit dem Kalottenrand als absolutem Gebilde durchführen.

Dies vorausgeschickt bemerken wir zuerst, dass das Strahlenbüschel $x = \text{const.}$ jedesmal in ein Grenzkreisbüschel bei der Projektion übergeht und zwar liegt das Büschelzentrum Ω in unseren drei Fällen bezw. ausserhalb der Kalotte, auf dem Kalottenrand oder innerhalb der Kalotte. Betrachten wir nun jedesmal die Polare ω von Ω in Bezug auf den Kalottenrand, so fällt im ersten Fall das Abbild der x-Achse längs dieser Polare, während in den übrigen Fällen ω keinen Punkt im Inneren der Kalotte hat und somit keiner Geraden in der Ebene entspricht. In dem zweiten Fall berührt ω den Kalottenrand in Ω.

Die Kurve $T^{(k)}_{k_0}$ wird auf eine Kurve $\mathrm{T}^{(k)}_{k_0}$ projiziert. Insbesondere wird die Tangente in dem Punkt P der Kurve auf einen Grenzkreis abgebildet, der die Kurve $\mathrm{T}^{(k)}_{k_0}$ in dem Abbild P von P berührt. Wir bezeichnen den Schnittpunkt zwischen diesem berührenden Grenzkreis und ω mit A und die Schnittpunkte zwischen demselben Grenzkreis und dem Kalottenrand mit M und N, wobei N und A auf derselben Seite von P liegen. Betrachten wir nunmehr das Doppelverhältniss

$$\lambda = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} : \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PN}}, \tag{11}$$

so können wir die in der vorigen Abteilung abgeleitete Tangenteneigenschaft der Kurve $T^{(k)}_{k_0}$ als folgende Eigenschaft ihrer Projektion ausdrücken

Längs der ganzen Kurve $\mathrm{T}^{(k)}_{k_0}$ *ist das Doppelverhältniss* λ *konstant.*

Dies ist für $k < k_0$ unmittelbar einleuchtend, denn es ist in diesem Fall PA das Abbild einer Strecke PA von der Länge r und infolgedessen, wegen der Identität der Maasszahlen in der Ebene und der Cayley'schen Maasszahlen auf der Grenzkugel, $r = \frac{k_0}{2} \log \lambda$ oder

$$\lambda = e^{\frac{2r}{k_0}}. \tag{12}$$

Da r eine Konstante ist, so ist der Satz somit in diesem Fall bewiesen.

Ist $k > k_0$, so betrachten wir in der Ebene den Schnittpunkt B zwischen der Tangente

[1]) Vgl. die Abhandlung des Verfassers: *Zur Theorie der Lobatscheffskij'schen Geometrie*, Acta Soc. Sc. Fenn. T. XLVI № 7.

und der darauf senkrechten Geraden $x = \text{const.}$ und sein Abbild B auf der Grenzkugel. Es ist dann PB das Abbild einer Strecke von der Länge p und infolgedessen $p = \frac{k_0}{2} \log \mu$ oder

$$\mu = e^{\frac{2p}{k_0}},$$

wo

$$\mu = \frac{\text{BM}}{\text{BN}} : \frac{\text{PM}}{\text{PN}}$$

ist. Die Tangente und die darauf senkrechte Gerade $x = \text{const.}$ gehen aber in harmonische Polaren in Bezug auf den Kalottenrand über, woraus dann offenbar folgt, dass B und A harmonische Pole sind. Infolgedessen ist $\lambda = -\mu$ oder also

$$\lambda = -e^{\frac{2p}{k_0}}. \tag{13}$$

Da p konstant ist, so ist der Satz auch in diesem Fall bewiesen.

Die neue Konstante λ hängt ersichtlich mit der Konstante k durch die Gleichung

$$k = k_0 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \tag{14}$$

zusammen. Der Fall $k = k_0$ ist als Grenzfall für $|\lambda| = \infty$ anzusehen. Übrigens ist, wie aus (12) und (13) hervorgeht, $|\lambda| > 1$.

Der hiermit bewiesene Satz ermöglicht in die Natur der Kurven $T_{k_0}^{(k)}$ einzudringen. Wir bezeichnen deshalb mit $T(\lambda)$ eine Kurve auf der Grenzkugel, die die Eigenschaft hat, dass das oben besprochene Doppelverhältniss λ längs der Kurve invariant ist, und wollen diese Kurven näher untersuchen. Die Kurve $T_{k_0}^{(k)}$ besteht dann aus denjenigen Teilen der zugehörigen Kurve $T(\lambda)$, die innerhalb der Kalotte liegen. Unseren drei Fällen entsprechend erhalten wir drei Arten von Kurven $T(\lambda)$, die wir mit $T_1(\lambda)$, $T_2(\lambda)$ und $T_3(\lambda)$ bezeichnen.

17. Wir fangen mit dem *dritten* Fall an und lassen dabei die Grenzkugel die Ebene im Zentrum des Strahlenbüschels $x = \text{const.}$ berühren. Es liegt dann Ω im Mittelpunkt O der Kalotte und ω infolgedessen unendlich entfernt auf der Grenzkugel.

Infolgedessen ist

$$\lambda = \frac{\text{PN}}{\text{PM}}$$

und die Kurve $T_3(\lambda)$ ist somit dadurch charakterisiert, dass dieses Verhältniss längs der Kurve konstant ist. Hiermit treten wir aber in Verbindung mit wohlbekannten Tatsachen und können unmittelbar schliessen, dass die Kurven $T_3(\lambda)$ *zykloidale Kurven* sind, deren Scheitel auf dem Kalottenrand liegen. Der Basiskreis hat O zum Mittelpunkt und den Radius $k_0 \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$. Für $\lambda < 0$ erhalten wir Epizykloiden und für $\lambda > 0$ Hypozykloiden. Wird k durch die Gleichung (14) als Konstante der Kurve eingeführt, so sind die beiden genannten Fälle durch bezw. $k > k_0$ und $k < k_0$ charakterisiert, und es erhält der Radius des Basiskreises den Ausdruck $\frac{k_0^2}{k}$.

Wir schliessen nun hieraus, dass die Kurven $(T_{k_0}^{(k)})_3$ Epizykloiden sind und dass somit für unsere Zwecke nur der Fall $k > k_0$ in Betracht kommt. Der Basiskreis hat ersichtlich den Radius $k_0 \cos \Pi(p)$. Dies können wir dann so ausdrücken:

Die Tractrix $(T_{k_0}^{(k)})_3$ in der Ebene ist die Projektion einer Epizykloide auf der Grenzkugel.

Bei dieser Projektion geht der Basiskreis in einen Kreis mit dem durch die Gleichung (8) bestimmten Radius p über, während der Kalottenrand nach der Unendlichkeit projiziert wird. Es liegt somit die Tractrix in diesem Fall ausserhalb des Kreises mit dem Radius p, dessen Peripherie sie nur noch mit Spitzen erreicht. Von einer Spitze läuft die Kurve auf beiden Seiten der Spitzentangente nach der Unendlichkeit.

18. Wir gehen jetzt zu dem *ersten* Fall über und lassen diesmal die Grenzkugel die Ebene im Koordinatenanfangspunkt berühren. ω geht dann durch den Mittelpunkt O der Kalotte und Ω liegt unendlich fern.

Dieser Fall hängt mit dem eben behandelten eng zusammen. Um dies zu zeigen führen wir beidemal auf der Grenzkugel rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir zwei auf einander senkrechte Grenzkreise durch O zu Koordinatenachsen wählen und die Koordinaten längs auf diesen senkrechter Grenzkreise messen. In diesen Koordinaten ξ und η hat der Kalottenrand die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = k_0^2$.

Wir lassen in dem jetzt vorliegenden Fall die ξ-Achse mit ω zusammenfallen und betrachten die Projektivität

$$\xi_1' = \frac{k_0^2}{\eta_1}, \qquad \eta_1' = k_0 \frac{\xi_1}{\eta_1} \tag{15}$$

auf der Grenzkugel. Durch diese wird der Kalottenrand in die gleichseitige Hyperbel $\xi^2 - \eta^2 = k_0^2$ übergeführt, wobei ω nach der Unendlichkeit transformiert wird. Die Kurve $T_1(\lambda)$ geht in eine neue Kurve $T_1'(\lambda)$ über. Bezeichnen wir einen Punkt dieser Kurve mit P und mit M und N die Schnittpunkte zwischen dem berührenden Grenzkreis in P und der gleichseitigen Hyperbel, so geht offenbar das Doppelverhältniss λ in das Verhältniss $\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PM}}$ über und die Kurve $T_1'(\lambda)$ ist dadurch charakterisiert, dass dieses Verhältniss längs der Kurve konstant ist. Die Kurve $T_1'(\lambda)$ steht somit in genau derselben Beziehung zu der gleichseitigen Hyperbel wie die Kurve $T_3(\lambda)$ zu dem Kalottenrand.

Hieraus folgt aber offenbar, dass die Kurven $T_1'(\lambda)$ aus den zykloidalen Kurven $T_3(\lambda)$ durch die imaginäre Affinität

$$\xi_1' = \xi_3, \qquad \eta_1' = i\,\eta_3 \tag{16}$$

hervorgehen. Dabei gehen die reellen Zweige der Kurven $T_1'(\lambda)$ aus denjenigen Zweigen der zykloidalen Kurven hervor, die mit rein imaginärer η-Koordinate auftreten.

Falls wir (15) und (16) zusammensetzen, erhalten wir die imaginäre Projektivität

$$\xi_1 = k_0\, i \frac{\eta_3}{\xi_3}, \qquad \eta_1 = \frac{k_0^2}{\xi_3}, \tag{17}$$

die somit die Kurven $T_1(\lambda)$ und $T_3(\lambda)$ in einander überführt. Führen wir auch in dem vor-

liegenden Fall die Konstante k durch die Gleichung (14) ein, so erhalten wir, jenachdem $k > k_0$ oder $k < k_0$ ist, zwei Arten von Kurven $T_1(\lambda)$, wobei die ersteren aus den Epizykloiden und die letzteren aus den Hypozykloiden hervorgehen. Auf die dabei entstehenden metrischen Verhältnisse werden wir später eingehen.

19. Wir betrachten schliesslich den *zweiten* Fall. Hier liegt Ω auf dem Kalottenrand $\xi^2 + \eta^2 = k_0^2$ und die Polare ω berührt somit den Kalottenrand in diesem Punkt.

Lassen wir Ω in dem Punkt $(0, -k_0)$ liegen, so wird durch die Projektivität

$$\xi_2' = \frac{\xi_2}{\eta_2 + k_0}, \qquad \eta_2' = \frac{\eta_2 - k_0}{\eta_2 + k_0} \tag{18}$$

die Polare ω nach der Unendlichkeit transformiert, während der Kalottenrand $\xi_2^2 + \eta_2^2 = k_0^2$ in die Parabel $\xi_2'^2 = -\eta_2'$ übergeht. Wir können hieraus wieder schliessen, dass die durch die Projektivität (18) aus der Kurve $T_2(\lambda)$ entstandene Kurve $T_2'(\lambda)$ in Bezug auf die genannte Parabel genau dieselbe Eigenschaft hat wie die oben untersuchten Kurven $T_3(\lambda)$ und $T_1'(\lambda)$ in Bezug auf den Kreis und die Hyperbel.

Falls wir aber nach der Kalotte zurükkehren, können wir sehr leicht die Kurven $T_2(\lambda)$ überblicken. Wir betrachten deshalb dasjenige Grenzkreisbüschel, dessen Zentrum in Ω liegt, und bei jedem Grenzkreis dasjenige Büschel von Kurven zweiter Ordnung in ξ und η, welches von dem Grenzkreis, doppelt gezählt, und dem Kalottenrand festgelegt wird. Die so entstandene Mannigfaltigkeit von Kurven deckt sich offenbar mit der Mannigfaltigkeit der Kurven $T_2(\lambda)$. Da nämlich jede Kurve jedes so definierten Büschels von Kurven in sich übergeht bei einer Schaar von projektiven Umformungen, welche den Kalottenrand und ω in sich überführen, ist jede dieser Kurven eine Kurve $T_2(\lambda)$. Da sie aber keine Einhüllende haben, muss jede Kurve $T_2(\lambda)$ eine derartige Kurve zweiter Ordnung sein.

Wir bemerken noch, dass die eben betrachteten verschiedenen Büschel aus einander durch diejenigen projektiven Umformungen der Kalotte in sich hervorgehen, die Ω ungeändert lassen und somit ω in sich verschieben. Hieraus folgt, dass schon beim Durchwandern eines einzelnen Büschels nach und nach alle möglichen λ-Werte zum Vorschein kommen. Die verschiedenen Kurven mit demselben λ-Wert liegen in den verschiedenen Büscheln.

Für $\lambda < 0$ erhalten wir Kurven $T_2(\lambda)$, die innerhalb der Kalotte liegen. Diese sind dann die Kurven $(T_{k_0}^{(k)})_2$. Für $\lambda > 0$ liegen die Kurven $T_2(\lambda)$ ausserhalb der Kalotte. Wird k durch die Beziehung (14) als Konstante der Kurve $T_2(\lambda)$ eingeführt, so sind die ersteren Kurven durch $k > k_0$ und die letzteren durch $k < k_0$ charakterisiert.

20. Obwohl wir schon in Nr. 13 die Kurve $(T_{k_0}^{(k)})_2$ in der Ebene vollständig untersucht haben, wollen wir doch der Vollständigkeit halber von dem jetzt erreichten Standpunkt aus die Kurve festlegen. Wir führen deshalb ein anderes längs der Kurve $(T_{k_0}^{(k)})_2$ ebenfalls invariantes Doppelverhältniss ein. Wir bezeichnen mit a' den durch Ω gehenden Grenzkreis, der ein Kurvenbüschel von der oben betrachteten Art bestimmt, und betrachten den auf ω liegenden Pol A' von a'. Wir verbinden nun einen Punkt P auf einer bestimmten Kurve des

Büschels mit A′ und bezeichnen mit M′ und N′ die Schnittpunkte zwischen dem verbindenden Grenzkreis und dem Kalottenrand. Dann ist das Doppelverhältniss

$$\lambda' = \frac{A'M'}{A'N'} : \frac{PM'}{PN'}$$

längs der Kurve invariant, so lange P den Grenzkreis a' nicht überschreitet; dann geht es in $\frac{1}{\lambda'}$ über. Weiter sind der Grenzkreis PA′ und der berührende Grenzkreis PA harmonische Polaren in Bezug auf den Kalottenrand.

Alle Kurven mit demselben λ-Wert haben ersichtlich denselben λ'-Wert. Wir wollen eine Beziehung zwischen λ und λ' ableiten. Dabei bleiben wir bei dem Fall $\lambda < 0$.

Für jeden solchen Wert von λ giebt es offenbar bei geeigneter Wahl von a' eine zugehörige Kurve, die durch den Kalottenmittelpunkt geht. Lassen wir dann P mit diesem Punkt zusammenfallen, so ist

$$\lambda = -\frac{AM}{AN}, \qquad \lambda' = -\frac{A'M'}{A'N'}$$

und es stehen PA und PA′ auf einander senkrecht. Infolgedessen erhalten wir aus der Figur:

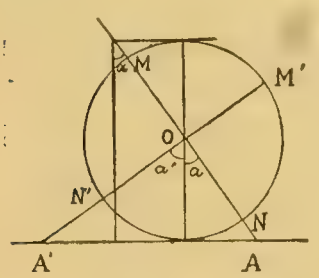


Fig. 1.

$$\cos\alpha = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}, \qquad \cos\alpha' = \frac{\lambda'+1}{\lambda'-1}$$

und folglich

$$\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda'+1}{\lambda'-1}\right)^2 = 1.$$

Dies ist die gewünschte Beziehung zwischen λ und λ'.

Für die Kurve $(T_{k_0}^{(k)})_2$ ist nach (13) $\alpha = \Pi(p)$. Setzen wir $\alpha' = \Pi(q)$, so wird dadurch eine neue Konstante q eingeführt, die offenbar der Bedingung

$$\Pi(p) + \Pi(q) = \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

genügt. Diese Konstante hat eine einfache geometrische Bedeutung, die hervortritt, falls wir nun auf die Ebene projizieren. Bezeichnen wir nämlich den Schnittpunkt von PA′ und a' mit P′ und setzen

$$\lambda'' = \frac{P'M'}{P'N'} : \frac{PM'}{PN'},$$

so ist $\lambda'' = -\lambda'$ und infolgedessen

$$\cos\Pi(q) = \frac{\lambda''-1}{\lambda''+1}.$$

Hieraus folgt aber, weil $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(q) = e^{-\frac{q}{k_0}}$ ist, dass

$$q = \frac{k_0}{2}\log\lambda''$$

ist. Es ist somit q die Länge der Projektion von PP′. Es geht aber bei der Projektion a' in

eine Gerade $x_2 = \text{const.}$ über und A′P in eine darauf senkrechte Gerade. Da nun q eine Konstante ist, so folgt, *dass die Tractrix* $(T_{k_0}^{(k)})_2$ *eine aequidistante Kurve ist, die in dem durch die Gleichung* (19) *festgelegten Abstand* q *von einer Geraden* $x_2 = \text{const.}$ *läuft.* Dies ist aber genau das Resultat, zu dem wir in Nr. 13 durch andere Überlegungen kamen.

21. Um in die Natur unserer Kurven tiefer einzudringen, werden wir nunmehr eine Enveloppeneigenschaft der Kurven $T(\lambda)$ entwickeln, die dann eine entsprechende Enveloppeneigenschaft der Tractricen $T_{k_0}^{(k)}$ zu Folge hat.

Wir knüpfen dabei an eine bekannte Eigenschaft der zykloidalen Kurven an. Falls nämlich zwei Punkte den Kalottenrand mit konstanten Geschwindigkeiten, deren Verhältniss gleich $-\lambda$ ist, durchlaufen, so umhüllt der die Punkte verbindende Grenzkreis eine zykloidale Kurve $T_3(\lambda)$. Jenachdem $\lambda < 0$ oder $\lambda > 0$ ist, so bewegen sich die Punkte in derselben oder in entgegengesetzter Richtung und der verbindende Grenzkreis umhüllt bezw. eine Epizykloide oder eine Hypozykloide. Die Scheitel entstehen da, wo die Punkte einander passieren. Ersichtlich können wir allgemeiner sagen, dass die Seiten eines in die Kalotte eingeschriebenen Rechtecks zykloidale Kurven $T_3(\lambda)$ umhüllen, falls die Diagonalen mit Winkelgeschwindigkeiten, deren Verhältniss in jedem Augenblick gleich $-\lambda$ ist, um den Mittelpunkt O der Kalotte gedreht werden. Die vier entstandenen Kurven gehen offenbar aus einander durch Drehung um O herum hervor und sind somit kongruent.

Falls wir auf die Ebene projizieren, gehen die Diagonalen in zwei Geraden über, die dem Büschel der Geraden $x = \text{const.}$ angehören. Die Seiten des Rechtecks werden auf diejenigen vier Geraden abgebildet, die mit diesen beiden Geraden gleichzeitig parallel sind. Da der Winkel zwischen zwei durch O gehenden Grenzkreisen ungeändert in den Winkel der entsprechenden Geraden $x = \text{const.}$ übergeht, sind wir somit in der Ebene, wo nur der Fall $\lambda < 0$ in Betracht kommt, zu dem Resultat gekommen, *dass falls zwei Geraden mit Winkelgeschwindigkeiten, deren Verhältniss gleich* $-\lambda$ *ist, um* O *herum in derselben Richtung gedreht werden, diejenigen vier Geraden, die gleichzeitig mit den beiden Geraden parallel sind, vier kongruente Tractricen* $(T_{k_0}^{(k)})_3$ *umhüllen.* Dabei sind k und λ durch die Gleichung (14) mit einander verbunden. Drehen sich die beiden Geraden in entgegengesetzter Richtung entsteht keine Einhüllende in der Ebene.

Wir werden nun die hiermit entwickelten Enveloppeneigenschaften in entsprechende Eigenschaften der Kurven $T_1(\lambda)$ und $(T_{k_0}^{(k)})_1$ überführen. Zuerst wollen wir dem oben entwickelten eine andere Fassung geben.

Wählen wir, nach der Grenzkugel zurückkehrend, einen derjenigen durch O gehenden Grenzkreise, die die Diagonalen bei der Umdrehung gleichzeitig überschreiten, zum Ausgangsgrenzkreis und bezeichnen mit ω' und ω'' die Anomalieen der Diagonalen in Bezug auf diesen Grenzkreis, so drückt sich die Bedingung über die Winkelgeschwindigkeiten durch die Gleichung

$$\omega' = -\lambda\,\omega'' \tag{20}$$

aus. Da aber der Winkel ω zweier durch O gehender Grenzkreise genau gleich dem Winkel der entsprechenden Geraden in der Ebene ist, können wir, wegen der Identität zwischen den

Maasszahlen in der Ebene und den Maasszahlen der Cayley'schen Maassbestimmung auf der Grenzkugel, schliessen, dass $\omega = \frac{1}{2i}\log\mu$ ist, wo μ hier, wo die Winkelspitze in dem Kalottenmittelpunkt liegt, einfach das Doppelverhältniss ist, welches die Schenkel des Winkels mit den Grenzkreisen $\eta_3 = \pm i\,\xi_3$ bilden. Infolgedessen kann die Gleichung (20) in die Form

$$\log\mu' = -\lambda\log\mu'' \tag{21}$$

geschrieben werden. Falls somit die Diagonalen des Rechtecks diese Bedingung (21) erfüllen, so umhüllen die Seiten vier kongruente Kurven $T_3(\lambda)$.

22. Die Bedingung (21) ist aber von projektiver Natur und wir können infolgedessen unmittelbar einen entsprechenden Satz über die Kurven $T_1'(\lambda)$ aussprechen, die durch die imaginäre Affinität (16) mit den Kurven $T_3(\lambda)$ zusammenhängen. Bei dieser Affinität gehen die Grenzkreise $\eta_3 = \pm i\,\xi_3$ in die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel $\xi_1'^2 - \eta_1'^2 = k_0^2$ über und wir können also schliessen, dass die Kurve $T_1'(\lambda)$ von den Seiten eines in die Hyperbel eingeschriebenen Parallelograms umhüllt wird, dessen Diagonalen der Bedingung (21) genügen, wo diesmal μ' und μ'' diejenigen Doppelverhältnisse sind, welche die Diagonalen mit den Asymptoten und einem beliebigen, festen Ausgangsdiameter der Hyperbel bilden. Offenbar besteht die so entstandene Kurve aus vier Zweigen, von denen zwei innerhalb und zwei ausserhalb der Hyperbel liegen. Die innerhalb der Hyperbel liegenden Zweige werden von Parallelogramseiten umhüllt, die Punkte desselben Hyperbelzweiges oder verschiedener Zweige vereinigen, jenachdem $\lambda < 0$ oder $\lambda > 0$ ist.

Gehen wir nunmehr durch Vermittelung der reellen Projektivität (15) von den Kurven $T_1'(\lambda)$ zu den Kurven $T_1(\lambda)$ über, so bemerken wir, dass das Diameterbüschel der Hyperbel in die Grenzkreise $\xi_1 = \text{const.}$ übergeht, wobei insbesondere die Asymptoten auf die Grenzkreise $\xi_1 = \pm k_0$ abgebildet werden. Es gehen somit die Diagonalen des Parallelograms in zwei derartige Grenzkreise $\xi_1 = \text{const.}$ über und es entsteht aus dem Parallelogram ein Viereck von der Gestalt des Vierecks M'N''N'M'' (Fig. 2), dessen gegenüberliegende Seiten sich auf der ξ_1-Achse schneiden. Wir können dann schliessen, dass jede Kurve $T_1(\lambda)$ von den Seiten eines derartigen Vierecks umhüllt wird, falls die Diagonalen der Bedingung (21) genügen, wo diesmal μ' und μ'' die Doppelverhältnisse sind, welche die Diagonalen mit den Grenzkreisen $\xi_1 = \pm k_0$ und einem beliebigen zwischen diesen liegenden festen Ausgangsgrenzkreis $\xi_1 = \text{const.}$ bilden. Ist $\lambda < 0$, werden die innerhalb der Kalotte liegenden Zweige von den Seiten M'M'' und N'N'' umhüllt, während sie für $\lambda > 0$ von den Seiten M'N'' und M''N' umhüllt werden. Diese Zweige bilden dann die Kurve $(T_{k_0}^{(k)})_1$. Lassen wir den festen Ausgangsgrenzkreis von $-k_0$ bis $+k_0$ wandern, erhalten wir alle zu demselben Wert von λ gehörenden Kurven $T_1(\lambda)$ und die entsprechenden Kurven $(T_{k_0}^{(k)})_1$.

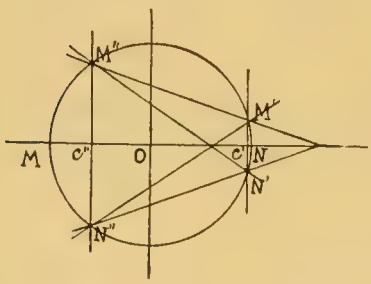


Fig. 2.

Offenbar sind nun μ' und μ'' einfach die Doppelverhältnisse, die bezw. C' und C'' mit M, N und dem Schnittpunkt zwischen dem Ausgangsgrenzkreis und der ξ_1-Achse bilden. Lassen

wir diesen insbesondere mit der η_1-Achse zusammenfallen, so sind μ' und μ'' die Doppelverhältnisse der Punkte M, O, C', N und M, O, C'', N.

23. Wir projizieren nunmehr auf die Ebene, wobei nach der Verabredung in Nr. 18 die Koordinatenachsen auf der Grenzkugel in die Koordinatenachsen in der Ebene übergehen, und bezeichnen mit x_1' und x_1'' die Abszissen von C' und C'', den Projektionen von C' und C''. Es werden dann die Diagonalen auf die Geraden $x_1 = x_1'$ und $x_1 = x_1''$ abgebildet und die Seiten des Vierecks gehen in die vier gemeinsamen Parallelen dieser Geraden über.

Lassen wir nun insbesondere wie oben den Ausgangsgrenzkreis mit der η_1-Achse zusammenfallen, so ist offenbar wegen der Identität der Maasszahlen in der Ebene und der Cayley'sche Maasszahlen auf der Grenzkugel

$$x_1' = \frac{k_0}{2} \log \mu', \qquad x_1'' = \frac{k_0}{2} \log \mu''.$$

Die Bedingung (21) nimmt infolgedessen die Form

(22) $$x_1' = -\lambda x_1''$$

an. Diese Gleichung besagt aber, *dass die Geraden* $x_1 = x_1'$ *und* $x_1 = x_1''$ *mit Geschwindigkeiten, deren Verhältniss gleich* $-\lambda$ *ist, sich längs der* x_1*-Achse bewegen. Dabei umhüllen jedesmal zwei ihrer gemeinsamen Parallelen, die nicht mit einander parallel sind, eine Tractrix* $(T_{k_0}^{(k)})_1$, *wobei k und* λ *durch die Gleichung* (14) *verbunden sind, während die beiden anderen keine Einhüllende in der Ebene haben.* Ist $\lambda > 0$ oder bewegen sich somit die Geraden in entgegengesetzter Richtung, umhüllen diejenigen gemeinsamen Parallelen, die sich auf der x_1-Achse schneiden, eine Tractrix $(T_{k_0}^{(k)})_1$, die durch $k < k_0$ charakterisiert ist; ist $\lambda < 0$ oder bewegen sich die Geraden in derselben Richtung, wird von den beiden anderen gemeinsamen Parallelen eine Tractrix $(T_{k_0}^{(k)})_1$ umhüllt, für welche $k > k_0$ ist. Offenbar wird die y-Achse gleichzeitig von den beweglichen Geraden durchsetzt. Sie ist die vertikale Symmetriegerade der Tractrix.

Wählen wir auf der Grenzkugel statt der η_1-Achse einen anderen Ausgangsgrenzkreis, kommen wir zu demselben Resultat; nur wird die Rolle der y_1-Achse von dem Abbild des Ausgangsgrenzkreises übernommen. Die entstandene Tractrix ist mit der obigen kongruent.

24. Offenbar können wir die hiermit in dem Vorigen abgeleiteten Resultate durch folgenden allgemeinen Satz kurz ausdrücken, indem nämlich nach (14) $-\lambda = \frac{k + k_0}{k - k_0}$ ist.

Die Tractrix $T_{k_0}^{(k)}$ *wird von gemeinsamen Parallelen zweier Geraden umhüllt, die mit Geschwindigkeiten, deren Verhältniss gleich* $\frac{k + k_0}{k - k_0}$ *ist, das Strahlenbüschel* $x = const.$ *durchwandern.*

Dieser Satz gilt auch in dem zweiten Fall, der übrigens als ein Übergangsfall anzusehen ist. Wir kommen auf den Satz in der folgenden Abteilung zurück.

Integration der Differentialgleichungen.

25. Die Integration der Differentialgleichungen (5′), (5″) und (5‴) lässt sich einfach elementar durchführen. Wir bemerken dabei vorläufig, dass die Gleichungen (5′) und (5‴) in einander durch die imaginäre Transformation

$$x_1 = k_0\, i\, x_3, \qquad y_1 + y_3 = k_0 \frac{\pi i}{2}$$

übergehen. Dies entspricht den in Nr. 18 durchgeführten Überlegungen und führt, falls wir die Koordinaten ξ und η auf der Grenzkugel eintragen, zu der imaginären Projektivität (17), wie man unschwer bestätigen kann.

Wir fangen mit dem ersten Fall an und setzen, indem wir die Indizes weglassen,

$$t = k_0 \cos \Pi(y). \tag{23}$$

Dadurch nimmt die Differentialgleichung (5′) die Form an

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_0 \sqrt{k^2 - t^2}}{t\, \sqrt{k_0^2 - t^2}}. \tag{24}$$

Hieraus erhalten wir nun unmittelbar für $k < k_0$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\, k \log \frac{k\sqrt{k_0^2 - t^2} + k_0\sqrt{k^2 - t^2}}{k\sqrt{k_0^2 - t^2} - k_0\sqrt{k^2 - t^2}} - \frac{1}{2}\, k_0 \log \frac{\sqrt{k_0^2 - t^2} + \sqrt{k^2 - t^2}}{\sqrt{k_0^2 - t^2} - \sqrt{k^2 - t^2}} \tag{25}$$

und für $k > k_0$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\, k \log \frac{k_0\sqrt{k^2 - t^2} + k\sqrt{k_0^2 - t^2}}{k_0\sqrt{k^2 - t^2} - k\sqrt{k_0^2 - t^2}} - \frac{1}{2}\, k_0 \log \frac{\sqrt{k^2 - t^2} + \sqrt{k_0^2 - t^2}}{\sqrt{k^2 - t^2} - \sqrt{k_0^2 - t^2}}. \tag{26}$$

Hier bedeutet beidemal x_0 die Integrationskonstante.

Aus diesen Gleichungen können wir nun unmittelbar ablesen, dass die Kurve $(T_{k_0}^{(k)})_1$ beidemal aus vier Ästen besteht, die symmetrisch in Bezug auf die x-Achse und die Gerade $x = x_0$ liegen. Die x-Achse ist eine Asymptote. Für $k < k_0$ vereinigen sich die Äste zu Spitzen, die in dem durch die Gleichung (7) bestimmten Abstand r von der x-Achse auf der Geraden $x = x_0$ liegen. Für $k > k_0$ wächst $|y$ gegen die Unendlichkeit, falls $|x - x_0|$ gegen Null herabsinkt. Die Gerade $x = x_0$ ist jedoch keine Asymptote, wie wir jetzt zeigen wollen.

Wir betrachten deshalb den Ast $x > x_0$, $y > 0$ und bezeichnen mit q' den Abstand des Kurvenpunkts (x, y) von der Geraden $x = x_0$. Dann ist in dem von dieser Geraden, x, y und q' gebildeten dreirechtwinkligen Viereck $\cot \Pi(q') = \dfrac{\cot \Pi(x - x_0)}{\sin \Pi(y)}$, welche Gleichung wir in die Form schreiben

$$\cot \Pi(q') = \frac{\cot \Pi(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{\sin \Pi(y)}.$$

Der erste Faktor hat dann unmittelbar $\dfrac{1}{k_0}$ zur Grenze für $x = x_0$. In dem zweiten Faktor

führen wir auf Grund von (23) und (26) t als Veränderliche ein. Sein Grenzwert für $t=k_0$ d. h. für $x=x_0$ ist dann, wie man unschwer bestätigt, $k_0 \operatorname{tg} \Pi(p)$, wo p die durch die Gleichung (8) eingeführte Grösse ist. Bezeichnen wir also den Grenzwert von q' für $x=x_0$ mit q, so ist $\cot \Pi(q) = \operatorname{tg} \Pi(p)$ oder

$$\Pi(p) + \Pi(q) = \frac{\pi}{2}. \tag{27}$$

Es nähert sich somit die Kurve denjenigen beiden aequidistanten Kurven asymptotisch, die in dem durch die Gleichung (27) bestimmten Abstand q von der Geraden $x=x_0$ laufen. q ist offenbar mit k durch die Gleichung

$$k = \frac{k_0}{\sin \Pi(q)} \tag{28}$$

vereinigt.

Den Fall $k=k_0$ haben wir schon in Nr. 10 erledigt. Er ist dabei als Übergangsfall zwischen den beiden obigen anzusehen.

26. Wir werden nunmehr aus den hiermit gewonnenen expliziten Gleichungen der Kurven $\left(T_{k_0}^{(k)}\right)_1$ einige einfache Resultate ableiten.

Wir betrachten zuerst den Fall $k < k_0$ und schreiben die Gleichung (25) in die Form

$$x = x_0 - k \log x_1 + k_0 \log x_2, \tag{29}$$

wo also

$$x_1 = \sqrt{\frac{k\sqrt{k_0^2 - t^2} - k_0\sqrt{k^2 - t^2}}{k\sqrt{k_0^2 - t^2} + k_0\sqrt{k^2 - t^2}}}, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{k_0^2 - t^2} - \sqrt{k^2 - t^2}}{\sqrt{k_0^2 - t^2} + \sqrt{k^2 - t^2}}}$$

gesetzt sind. Dann sehen wir unmittelbar, dass wir x_1 und x_2 in die Form schreiben können

$$x_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1, \qquad x_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2,$$

wo φ_1 und φ_2 durch die Gleichungen

$$\cos \varphi_1 = \frac{k_0}{k} \frac{\sqrt{k^2 - t^2}}{\sqrt{k_0^2 - t^2}}, \qquad \cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{k^2 - t^2}}{\sqrt{k_0^2 - t^2}}$$

festgelegt sind. Dabei ist offenbar

$$\cos \varphi_1 = \frac{k_0}{k} \cos \varphi_2. \tag{30}$$

Es haben nun die Winkel φ_1 und φ_2 äusserst einfache geometrische Bedeutungen. In dem vorliegenden Fall schneidet nämlich die Tangente in dem Kurvenpunkt P die x-Achse in einem Punkt A und es ist PA konstant gleich r (vgl. Nr 15). Bezeichnen wir nun den Neigungswinkel zwischen der Tangente und der x-Achse mit α und die Projektion $P'A$ von PA auf der x-Achse mit r', so bestehen die Gleichungen

$$\varphi_1 = \alpha, \qquad \varphi_2 = \Pi(r'). \tag{31}$$

Dabei halten wir uns zu dem Ast $x \geq x_0$, $y > 0$.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY MASS.

Bei dem Beweis erhalten wir zuerst aus dem rechtwinkligen Dreieck $PP'A$ die Beziehung $\cos\alpha = \frac{\cos \Pi(r')}{\cos \Pi(r)}$. Tragen wir hier $k = k_0 \cos \Pi(r)$ ein, entsteht die zu (30) analoge Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{k_0}{k} \cos \Pi(r'). \tag{32}$$

Aus demselben Dreieck ist aber weiter $\sin \Pi(r') = \frac{\sin \Pi(r)}{\sin \Pi(y)}$. Führen wir hier t aus der Gleichung (23) ein und berechnen $\cos \Pi(r')$, so wird

$$\cos \Pi(r') = \frac{\sqrt{k^2 - t^2}}{\sqrt{k_0^2 - t^2}}.$$

Es ist somit $\varphi_2 = \Pi(r')$. Aus (30) und (32) schliessen wir dann aber, dass $\varphi_1 = \alpha$ ist.

Auf Grund der hiermit bewiesenen Beziehungen (31) geht die Gleichung (29) in die folgende über

$$x = x_0 - k \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + k_0 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(r').$$

Da aber $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(r') = e^{-\frac{r'}{k_0}}$ ist, so erhalten wir

$$x - x_0 + r' = - k \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha.$$

Hier bedeutet die linke Seite einfach den Abstand von dem Durchschnittspunkt A zwischen der Tangente und der x-Achse bis zu dem Punkt x_0, wo die Symmetrieachse die x-Achse schneidet. Bezeichnen wir diesen Abstand mit X, so ist somit nach der letzten Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = e^{-\frac{X}{k}}. \tag{33}$$

Es hängt somit der Neigungswinkel der Tangente in genau gleicher Weise von X ab, wie der zu einer Strecke in dem hyperbolischen Raum R_k gehörende Parallelwinkel von dieser Strecke abhängt.

Mit Hilfe der hiermit entwickelten Formel (33) können wir nun die in Nr. 24 ausgesprochene Enveloppeneigenschaft neu beweisen. Wir lassen dabei der Einfachheit halber die vertikale Symmetriegerade mit der y-Achse zusammenfallen, indem wir $x_0 = 0$ setzen. Es ist dann X die Abszisse des Durchschnittspunkts zwischen der Tangente und der x-Achse.

Ziehen wir nun diejenigen beiden Geraden $x = \text{const.}$, die mit der Tangente parallel sind, so liegen sie ersichtlich zu der Geraden $x = X$ symmetrisch. Bezeichnen wir das von ihnen auf der x-Achse abgegrenzte Stück mit 2τ, so ist offenbar

$$\Pi(\tau) = \alpha$$

und infolgedessen auf Grund von (33)

$$\tau = \frac{k_0}{k} X.$$

Hieraus folgt, dass die beiden genannten mit der Tangente parallelen Geraden $x = \text{const.}$ einfach die Geraden

$$x = X\left(1 \mp \frac{k_0}{k}\right) \tag{34}$$

sind.

Lassen wir nun den Punkt X die x-Achse durchlaufen, so sehen wir unmittelbar ein, dass die Geraden (34) mit Geschwindigkeiten, deren Verhältniss konstant gleich $\frac{k+k_0}{k-k_0}$ ist, das Strahlenbüschel $x = \text{const.}$ durchwandern. Weil $k < k_0$ ist, so bewegen sie sich in verschiedener Richtung. Die vertikale Symmetriegerade wird von beiden gleichzeitig passiert.

Hiermit ist die in Nr. 24 ausgesprochene Enveloppeneigenschaft der Kurve $T_{k_0}^{(k)}$ in dem vorliegenden Fall bewiesen. Denn das oben für den Ast $x > x_0$, $y > 0$ entwickelte Ergebniss gilt natürlich für die ganze Kurve.

27. Wir gehen jetzt zu dem Fall $k > k_0$ über und schreiben hier wieder die Gleichung (26) in die Form

$$x = x_0 - k \log x_1 + k_0 \log x_2 \tag{35}$$

wo

$$x_1 = \sqrt{\frac{k_0\sqrt{k^2-t^2} - k\sqrt{k_0^2-t^2}}{k_0\sqrt{k^2-t^2} + k\sqrt{k_0^2-t^2}}}, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{k^2-t^2} - \sqrt{k_0^2-t^2}}{\sqrt{k^2-t^2} + \sqrt{k_0^2-t^2}}}.$$

Offenbar können wir wieder x_1 und x_2 in die Form schreiben

$$x_1 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1, \qquad x_2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2,$$

wo

$$\cos\varphi_1 = \frac{k\sqrt{k_0^2-t^2}}{k_0\sqrt{k^2-t^2}}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{k_0^2-t^2}}{\sqrt{k^2-t^2}}.$$

Dabei ist ersichtlich

$$\cos\varphi_1 = \frac{k}{k_0}\cos\varphi_2. \tag{36}$$

Die Winkel φ_1 und φ_2 haben auch in diesem Fall einfache geometrische Bedeutungen. Es steht diesmal die Tangente im Kurvenpunkt P auf einer Geraden $x = \text{const.}$ senkrecht. Wird der Fusspunkt mit B bezeichnet, so ist PB konstant gleich p (vgl. Nr. 15). Wir bezeichnen die Projektion $P'B'$ von PB auf der x-Achse mit p' und BB' mit a. Weiter setzen wir

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \Pi(a). \tag{37}$$

Dann wird behauptet, dass die Gleichungen

$$\varphi_1 = \alpha, \qquad \varphi_2 = \Pi(p') \tag{38}$$

bestehen. Dabei wird wieder der Ast $x > x_0$, $y > 0$ betrachtet.

Bei dem Beweis benützen wir das dreirechtwinklige Viereck $PBB'P'$ und erhalten hieraus zuerst $\sin \Pi(a) = \frac{\cos \Pi(p')}{\cos \Pi(p)}$ oder falls wir $k = \frac{k_0}{\cos \Pi(p)}$ und α aus (37) eintragen

$$\cos \alpha = \frac{k}{k_0} \cos \Pi(p'). \tag{39}$$

In demselben Viereck ist weiter $\cot \Pi(p') = \sin \Pi(y) \,.\, \cot \Pi(p)$ und infolgedessen, falls wir y aus (23) einführen und $\cos \Pi(p')$ berechnen,

$$\cos \Pi(p') = \frac{\sqrt{k_0^2 - t^2}}{\sqrt{k^2 - t^2}}.$$

Es ist somit $\varphi_2 = \Pi(p')$ und also nach (36) und (39) $\varphi_1 = \alpha$.

Bezeichnen wir diesmal den Abstand zwischen B' und dem Punkt x_0 mit X, so können wir aus dem eben bewiesenen genau wie in Nr. 26 schliessen, dass

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = e^{-\frac{X}{k}} \tag{40}$$

ist. Setzen wir insbesondere $x_0 = 0$ oder lassen also die vertikale Symmetriegerade der Kurve mit der y-Achse zusammenfallen, so ist X die Abszisse desjenigen Punkts, in dem die auf der Tangente senkrechte Gerade $x = \text{const.}$ die X-Achse schneidet.

Wir betrachten hier wiederum diejenigen beiden Geraden $x = \text{const.}$, die mit der Tangente parallel sind. Sie liegen zu der Geraden $x = X$ symmetrisch. Bezeichnen wir mit 2τ das von den beiden Geraden auf der x-Achse abgegrenzte Stück, so ist offenbar $\Pi(\tau) + \Pi(a) = \frac{\pi}{2}$ und infolgedessen nach (37)

$$\Pi(\tau) = \alpha.$$

Hieraus folgt nun wieder auf Grund von (40), dass

$$\tau = \frac{k_0}{k} X$$

ist. Dies besagt aber, dass die genannten mit der Tangente parallelen Geraden $x = \text{const}$ einfach die Geraden

$$x = X\left(1 \mp \frac{k_0}{k}\right) \tag{41}$$

sind und wir können somit genau dieselben Schlüsse ziehen wie in Nr. 26. Hier ist aber $k > k_0$ und es bewegen sich somit die beiden Geraden (41) nach derselben Richtung. Hiermit ist der in Nr. 24 ausgesprochene Satz auch in dem vorliegenden Fall neu bewiesen.

28. Wir gehen jetzt zu der Gleichung (5″). Hier erhalten wir durch Integration als explizite Gleichung der Kurve $\left(T_{k_0}^{(k)}\right)_2$

$$x = x_0 + k_0 \sqrt{\frac{k^2}{k_0^2} - 1}\, e^{-\frac{y}{k_0}}, \tag{42}$$

wo wir wiederum die Indizes weggelassen haben. x_0 ist die Integrationskonstante.

Aus dieser Gleichung folgt nun unmittelbar, dass die Kurve $\left(T_{k_0}^{(k)}\right)_2$ eine aequidistante Kurve ist, wie wir schon öfters fanden. Ziehen wir nämlich durch den Kurvenpunkt (x, y) einen Grenzkreis $y = \text{const.}$, so ist auf diesem der $x - x_0$ entsprechende Bogen gleich $(x - x_0)\, e^{\frac{y}{k_0}}$ und somit nach der Gleichung (42) konstant gleich $k_0 \sqrt{\frac{k^2}{k_0^2} - 1}$. Hieraus folgt, dass die Kurve aequidistant von der Geraden $x = x_0$ verläuft. Bezeichnen wir ihren Abstand von dieser Geraden mit q, so ist $2q$ offenbar die zu dem Bogen $2k_0 \sqrt{\frac{k^2}{k_0^2} - 1}$ gehörende Sehne und es ist somit $\cot \Pi(q) = \sqrt{\frac{k^2}{k_0^2} - 1}$ oder $k = \frac{k_0}{\sin \Pi(q)}$, wie wir schon in Nr. 13 fanden.

Die Tangente in dem Punkt P auf der Kurve steht auf einer Geraden $x = \text{const.}$ senkrecht. Wird der Fusspunkt mit B bezeichnet, so ist PB konstant gleich p (vgl. Nr. 15). Bezeichnen wir den Abstand von B zu der Geraden $x = x_0$ mit ϱ, so bildet ϱ mit den Strecken p und q und der Geraden $x = x_0$ ein dreirechtwinkliges Viereck, wo der zwischen p und ϱ liegende spitze Winkel $\frac{\pi}{2} - \Pi(\varrho)$ ist. Infolgedessen ist $\cot \Pi(\varrho) = \frac{1}{\cos \Pi(p)}$ oder also, weil $k = \frac{k_0}{\cos \Pi(p)}$ ist,

$$k_0 \cot \Pi(\varrho) = k. \tag{43}$$

Diese Gleichung besagt, dass der Ort von B eine aequidistante Kurve zu der Geraden $x = x_0$ ist. Weiter schliessen wir aber aus (43), dass diese Kurve und die Gerade $x = x_0$ von jeder Kurve $y = \text{const.}$ das Stück k abgrenzen.

Dies vorausgeschickt beweisen wir nun wieder die in Nr. 24 ausgesprochene Enveloppeneigenschaft. Dabei setzen wir der Einfachkeit halber $x_0 = 0$. Es sei dann $x = X$ diejenige Gerade $x = \text{const.}$, die durch B geht und die somit auf der Tangente senkrecht steht. Betrachten wir dann diejenigen beiden Geraden $x = \text{const.}$, die mit der Tangente parallel sind, so sind diese ersichtlich in Bezug auf die Gerade $x = X$ symmetrisch.

Wir bezeichnen nunmehr mit 2τ das von den beiden genannten Geraden auf dem Grenzkreis $y = 0$ abgegrenzte Stück. Ziehen wir weiter durch B den durch diesen Punkt gehenden Grenzkreis $y = \text{const.}$, so grenzen die beiden Geraden auf diesem Grenzkreis ersichtlich das Stück $2k_0$ ab. Infolgedessen sind dann X und k, τ und k_0 entsprechende Bögen konzentrischer Grenzkreise und es ist somit

$$\tau = \frac{k_0}{k} X.$$

Hieraus folgt, dass die mit der Tangente parallelen Geraden $x = \text{const.}$ einfach die Geraden

$$x = X\left(1 \mp \frac{k_0}{k}\right) \tag{44}$$

sind. Hieraus schliessen wir wieder genau wie in Nr. 26, dass auch in dem vorliegenden Fall die Behauptung in Nr. 24 richtig ist. Weil $k > k_0$ ist, so bewegen sich die beiden Geraden in derselben Richtung.

29. Wir gehen schliesslich zu der Differentialgleichung (5‴) über. Setzen wir hier

$$k_0 \cos \Pi(y) = t \tag{45}$$

und lassen die Indizes weg, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k_0 t} \sqrt{\frac{k^2 t^2 - k_0^4}{k_0^2 - t^2}}. \tag{46}$$

Hier sind t und x offenbar polare Koordinaten auf derjenigen Grenzkugel, die die Ebene im Zentrum O des Büschels $x = \text{const.}$ berührt. Es ist dann eine Bestätigung der in Nr. 17 gefundenen Resultate, dass die Gleichung (46) einfach die bekannte polare Differentialgleichung der zykloidalen Kurven ist.

Der Vollständigkeit halber führen wir auch hier die Integration aus und erhalten folgende explizite Gleichung der Kurve $(T^{(k)}_{k_0})_3$, wo x_0 die Integrationskonstante bedeutet:

$$x - x_0 = \frac{k}{k_0} \operatorname{arctg} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2 t^2 - k_0^4}{k_0^2 - t^2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{k^2 t^2 - k_0^4}{k_0^2 - t^2}}. \tag{47}$$

Aus dieser können wir wieder alle in Nr. 17 gefundenen Resultate bestätigen. Insbesondere sehen wir, dass die Kurve aus endlich oder unendlich vielen Zweigen besteht, die durch Drehungen mit der Amplitude $\left(\frac{k}{k_0} - 1\right)\pi$ um O herum aus einander hervorgehen. Da $x = x_0$ eine Spitzentangente ist, können wir uns auf den von dieser Spitze auslaufenden Zweig einschränken und bemerken dann, dass dieser Zweig aus zwei in Bezug auf die Gerade $x = x_0$ symmetrischen Ästen besteht. Falls x von x_0 zu den Werten $x_0 \pm \left(\frac{k}{k_0} - 1\right)\frac{\pi}{2}$ sich verändert, so wächst y von p nach der Unendlichkeit.

30. Wir schreiben nunmehr die Gleichung (47) in die Form

$$x = x_0 + \frac{k}{k_0} x_1 - x_2, \tag{48}$$

wo also

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2 t^2 - k_0^4}{k_0^2 - t^2}}, \qquad \operatorname{tg} x_2 = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{k^2 t^2 - k_0^4}{k_0^2 - t^2}}.$$

Dabei ist ersichtlich

$$\operatorname{tg} x_2 = \frac{k}{k_0} \operatorname{tg} x_1. \tag{49}$$

Es haben hier wieder x_1 und x_2 eine einfache Bedeutung. In diesem Fall steht nämlich wieder die Tangente in dem Kurvenpunkt P auf einer Geraden $x = \text{const.}$ senkrecht. Wird der Fusspunkt mit B bezeichnet, so ist PB konstant gleich p (vgl. Nr. 15). Setzen wir nun $OB = a$ und den Winkel $POB = x'$, so wird behauptet, dass die Gleichungen

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \Pi(a), \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} - x' \tag{50}$$

bestehen. Dabei wird der Ast $x \geq x_0$ betrachtet.

Bei dem Beweis benützen wir das rechtwinklige Dreieck OBP und erhalten hieraus $\cot x' = \frac{\cot \Pi(a)}{\cos \Pi(p)}$ oder, falls wir $k = \frac{k_0}{\cos \Pi(p)}$ eintragen,

$$\cot x' = \frac{k}{k_0} \cot \Pi(a). \tag{51}$$

In demselben Dreieck ist aber weiter $\sin \Pi(a) = \frac{\sin \Pi(y)}{\sin \Pi(p)}$. Falls wir hier t aus (45) eintragen und $\cot \Pi(a)$ berechnen, so erhalten wir

$$\cot \Pi(a) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2 t^2 - k_0^4}{k_0^2 - t^2}}.$$

Es ist also $x_1 = \frac{\pi}{2} - \Pi(a)$ und infolgedessen nach (49) und (51) auch $x_2 = \frac{\pi}{2} - x'$.

Mit Hilfe der Gleichungen (50) nimmt nun die Gleichung (48) die Form an

$$x = x_0 + \frac{k}{k_0}\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right) - \left(\frac{\pi}{2} - x'\right).$$

Hieraus erhalten wir die Formel

$$\Pi(a) = -\frac{k_0}{k} X, \tag{52}$$

wo $X = x - x_0 - \left(\frac{k}{k_0} - 1\right)\frac{\pi}{2} - x'$ gesetzt ist. Offenbar ist dann $|X|$ der Winkel, den die Gerade OB mit der Geraden $x = x_0 + \left(\frac{k}{k_0} - 1\right)\frac{\pi}{2}$ bildet. Wählen wir also die letzte Gerade zum Ausgangsstrahl bei der Koordinatenbestimmung, was darauf hinauskommt, dass wir die Integrationskonstante $x_0 = -\left(\frac{k}{k_0} - 1\right)\frac{\pi}{2}$ setzen, so wird X einfach der Azimuth der Geraden OB und es stellt somit

$$x = X$$

diejenige Gerade $x = \text{const.}$ dar, die auf der Tangente senkrecht steht.

Aus diesen Überlegungen folgt nun wieder die Enveloppeneigenschaft in dem vorliegenden Fall. Ziehen wir nämlich diejenigen Geraden $x = \text{const.}$, die mit der Tangente parallel sind, so bilden diese mit der genannten Geraden $x = X$ den Winkel $\Pi(a)$. Nach (52) haben dann diese Geraden die Gleichungen

$$x = X\left(1 \mp \frac{k_0}{k}\right). \tag{53}$$

Hieraus folgt genau wie in den übrigen Fällen die Enveloppeneigenschaft. Weil $k > k_0$ ist, so bewegen sich die beiden Geraden in derselben Richtung.

31. Hiermit ist die Untersuchung der Tractrix zu Ende geführt. Abschliessend wollen wir nur noch hervorheben, dass für $k_0 = \infty$ oder also in dem Euklid'schen Raum die Kurve $(T_\infty^{(k)})_1$ die gewöhnliche Tractrix ist. Durch einfachen Grenzübergang finden wir dann aus der Formel $k = k_0 \cos \Pi(r)$, dass $k = r$ ist. Die Kurve $(T_\infty^{(\infty)})_1$ ist eine mit der x-Achse parallele Gerade. Für die übrigen Kurven können wir sagen, dass $(T_\infty^{(\infty)})_2$ eine Gerade und $(T_\infty^{(\infty)})_3$ ein Kreis ist.

Die Pseudosphäre im Raum R_{k_0}.

32. Indem wir nunmehr auf die Kurve $T_{k_0}^{(k)}$ die zugehörige Drehung des Doppelbüschels ausüben, entsteht eine Rotationsfläche $P_{k_0}^{(k)}$, die wir *Pseudosphäre* nennen. Den drei Fällen entsprechend, entstehen drei Arten von Pseudosphären, die wir mit $(P_{k_0}^{(k)})_1$, $(P_{k_0}^{(k)})_2$ und $(P_{k_0}^{(k)})_3$ bezeichnen. Über die Gestalt dieser Flächen können wir dann unmittelbar aus den Entwickelungen über die Tractricen bestimmte Schlüsse ziehen.

Was zuerst die Fläche $(P_{k_0}^{(k)})_1$ betrifft, so besteht sie ersichtlich aus zwei Mänteln, die in Bezug auf eine Bahnebene der vorliegenden Drehung erster Art symmetrisch liegen und die sich der Achse des Doppelbüschels nach beiden Richtungen unbegrenzt nähern. Für $k < k_0$ vereinigen sich die beiden Mäntel längs einer Rückkehrkante in der Symmetrieebene. Diese Rückkehrkante ist ein Kreis, dessen Radius die in dem Vorigen oft vorkommende durch die Gleichung (7) festgelegte Grösse r ist. Für $k = k_0$ sind die Mäntel asymptotische Kegelflächen, die sich der Symmetrieebene asymptotisch nähern (Vgl. Nr. 10). Für $k > k_0$ nähern sich die Mantelflächen denjenigen beiden aequidistanten Flächen asymptotisch, die in dem Abstand q von der Symmetrieebene liegen, wo q durch die Gleichung (28) mit k zusammenhängt.

Die Fläche $(P_{k_0}^{(k)})_2$ ist aus zwei aequidistanten Flächen zu einer Bahnebene der Drehung zweiter Art zusammengesetzt, die symmetrisch zu dieser Ebene in dem Abstand q liegen, wo q durch die Gleichung (10) mit k zusammenhängt. Insbesondere ist für $k = k_0$ die Fläche $(P_{k_0}^{(k_0)})_2$ selbst eine Bahnebene (Vgl. Nr. 10).

Die Fläche $(P_{k_0}^{(k)})_3$ schliesslich besteht ebenfalls aus zwei in Bezug auf eine Bahnebene der zugehörigen Drehung dritter Art symmetrischen Mänteln, die sich längs einer Rückkehrkante in der Symmetrieebene vereinigen. Diese Rückkehrkante ist eine aequidistante Kurve, die im Abstand p von der Achse des Doppelbüschels läuft, wo p die oben oft vorkommende durch die Gleichung (8) mit k zusammenhörende Grösse ist.

Für $k = \infty$ erhalten wir jedesmal, wie schon in Nr. 10 hervorgehoben wurde, diejenigen Flächen, die bei allen zu dem Doppelbüschel gehörenden Schraubungen in sich verschoben werden. Speziell ist $(P_{k_0}^{(\infty)})_2$ eine Grenzkugel. Die Flächen $(P_{k_0}^{(\infty)})_1$ und $(P_{k_0}^{(\infty)})_3$ sind nicht gestaltlich verschieden, sondern gehören beide denjenigen in Nr. 5 näher besprochenen Flächen an, die bei den zu einem eigentlichen Doppelbüschel gehörenden Schraubungen in sich übergehen.

Ist $k_0 = \infty$ oder liegt also der Euklid'sche Raum vor, erhalten wir daselbst in $(P_\infty^{(k)})_1$ die gewöhnliche Pseudosphäre mit dem Parameter k. $(P_\infty^{(\infty)})_1$ und $(P_\infty^{(\infty)})_3$ sind Kreiszylinder und $(P_\infty^{(\infty)})_2$ eine Ebene.

33. Wir führen nunmehr auf der Pseudosphäre $P_{k_0}^{(k)}$ krummlinige Koordinaten u, v ein, so dass die Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ bezw. mit den Meridianen und den Breitenzykeln zusammenfallen. Wir wählen deshalb einen Meridian und einen Breitenzykel zu Ausgangskurven und legen durch den Flächenpunkt einen Meridian. Danach bezeichnen wir mit v den längs diesem Meridian gemessenen Abstand des Flächenpunkts von dem Ausgangsbrei-

tenzykel und mit u den Bogen auf diesem Zykel zwischen dem Ausgangsmeridian und dem durch den Flächenpunkt gehenden Meridian. v wird in derjenigen Richtung positiv gerechnet, in der entsprechende Breitenzykelbögen kleiner werden.

Dies festgelegt können wir offenbar aus der Definition der Fläche schliessen, dass das dem Bogenelement du auf dem Ausgangsbreitenzykel entsprechende Bogenelement auf dem durch den Flächenpunkt (u, v) gehenden Breitenzykel gleich $e^{-\frac{v}{k}} du$ ist. Infolgedessen erhalten wir dann für das Bogenelement ds auf der Pseudosphäre $P_{k_0}^{(k)}$ die Beziehung

$$ds^2 = e^{-\frac{2v}{k}} du^2 + dv^2. \tag{54}$$

Speziell ist auf den Flächen $P_{k_0}^{(\infty)}$

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

34. Die hiermit entwickelte Formel (54) gestattet wichtige Schlüsse über die Fläche $P_{k_0}^{(k)}$ zu ziehen. Indem wir auch k_0 als Parameter auffassen und somit Flächen in verschiedenen Räumen in Betracht ziehen, können wir offenbar sogleich schliessen, *dass alle Flächen $P_{k_0}^{(k)}$ mit demselben k auf einander abwickelbar sind.* Bei dieser Abwickelung, die so stattfindet, dass Flächenpunkte mit denselben Koordinaten (u, v) auf den verschiedenen Flächen einander zugewiesen werden, gehen ersichtlich die Meridiane und Breitenzykeln wieder in Meridiane und Breitenzykeln über.

Unter den Flächen $P_{k_0}^{(k)}$ mit demselben k kommt nun jedesmal auch die Ebene $(P_k^{(k)})_2$ im Raum R_k vor. Infolgedessen können wir schliessen, *dass die Fläche $P_{k_0}^{(k)}$ im Raum R_{k_0} auf die Ebene im Raum R_k abwickelbar ist.* Bei dieser Abwickelung gehen die Meridiane in ein Büschel paralleler Geraden über, während die Breitenzykeln auf das zugehörige Ortogonalbüschel von Grenzkreisen abgebildet werden. Die geodätischen Linien auf der Fläche gehen in Geraden in der Ebene über. Infolgedessen können wir folgenden Satz aussprechen:

Die Trigonometrie der geodätischen Dreiecke auf der Pseudosphäre $P_{k_0}^{(k)}$ im Raum R_{k_0} ist mit der ebenen Trigonometrie im Raum R_k identisch.

Hiermit haben wir die in Nr. 3 angegebene Aufgabe vollständig erledigt.

Für die aequidistante Fläche $(P_{k_0}^{(k)})_2$ enthält dieser Satz die früher schon wohlbekannte Tatsache, dass die Trigonometrie ihrer geodätischen Dreiecke mit der ebenen Trigonometrie des Raums R_k zusammenfällt, wo k mit dem Abstand q der Fläche von ihrer Polarebene durch die Gleichung (10) zusammenhängt.

Für $k = \infty$ erhalten wir aus dem obigen Satz insbesondere das einfache Ergebniss, *dass auf denjenigen Flächen, die bei allen zu einem Doppelbüschel gehörenden Schraubungen in sich verschoben werden, die Geometrie der geodätischen Linien euklidisch ist.* Wir sind somit durch unsere Untersuchungen zu zwei Typen von Rotationsflächen gekommen, auf denen die Geometrie euklidisch ist; es sind diese die in Nr. 5 näher betrachteten Flächen.

Für $k_0 = \infty$ d. h. in dem Euklid'schen Raum kommen wir auf die bekannte Eigenschaft der gewöhnlichen Pseudosphäre zurück. Ist dabei noch $k = \infty$, erhalten wir als Grenzfälle für die in Nr. 5 betrachteten Flächen die Euklid'sche Ebene und den Euklid'schen Kreiszylinder, deren geodätische Dreiecke ja die ebene Euklid'sche Trigonometrie aufweisen.

35. Abschliessend wollen wir noch eine bemerkenswerte Tatsache hervorheben. Die Flächen $P_{k_0}^{(k)}$ mit demselben k_0 und demselben k sind ersichtlich auf einander *biegbar*, weil sie nämlich in demselben Raum liegen und auf einander abwickelbar sind. Für $k < k_0$ hat diese Bemerkung keine Bedeutung, denn es giebt in diesem Fall nur noch die eine Fläche $(P_{k_0}^{(k)})_1$. Aber schon für $k = k_0$ giebt es zwei Flächen, nämlich den asymptotischen Kegel $(P_{k_0}^{(k_0)})_1$ und die Ebene $(P_{k_0}^{(k_0)})_2$, die selbstverständlich auf einander biegbar sind. Für $k > k_0$ schliesslich haben wir drei verschiedene Flächen $P_{k_0}^{(k)}$ mit demselben k_0 und demselben k, nämlich $(P_{k_0}^{(k)})_1$, $(P_{k_0}^{(k)})_2$ und $(P_{k_0}^{(k)})_3$. Von diesen ist $(P_{k_0}^{(k)})_2$ eine aequidistante Fläche und wir können somit schliessen, *dass die Flächen* $(P_{k_0}^{(k)})_1$ *und* $(P_{k_0}^{(k)})_3$ *durch Biegung aus der aequidistanten Fläche* $(P_{k_0}^{(k)})_2$ *entstehen.*

Für $k = \infty$ folgt dann hieraus, dass die in Nr. 5 betrachteten beiden Flächenarten Biegungsflächen von einander sind. Dies besagt, dass diejenigen Flächen, die bei allen zu einem eigentlichen Doppelbüschel gehörenden Schraubungen in sich verschoben werden, durch Biegung aus der Grenzkugel entstehen. Dies entspricht der Tatsache, dass im Euklid'schen Raum der Krezyliisnder durch Biegung aus der Ebene entsteht, was ja auch hier zum Vorschein kommt, falls wir noch $k_0 = \infty$ setzen. Die Biegung findet auch in entsprechender Weise statt, indem nämlich ein Parallelstreifen zwischen zwei parallelen Grenzkreisen auf der Grenzkugel zusammengebogen wird.

Otto E. A. Hjelt.

MINNESTAL

ÖFVER

PROFESSOR EMERITUS ARKIATER

OTTO E. A. HJELT

HÅLLET PÅ

FINSKA VETENSKAPS-SOCIETETENS ÅRS- OCH HÖGTIDSDAG

DEN 29 APRIL 1914

AF

E. A. HOMÉN

HELSINGFORS 1914
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI

Högtärade församling.

Vetenskaps-Societeten har hedrat mig med uppdraget att på denna dess årshögtid söka i korta drag i minnet återkalla de yttre konturerna af dess senaste år aflidne ledamots Professor emeritus, Arkiater Otto E. A. Hjelts lif och verksamhet. Jag känner lifligt ansvaret af att inom den trånga ramen af ett minnestal teckna bilden af en man, hvars hela lif, under sex à sju decennier, oafbrutet och hängifvet varit egnadt arbetet i vetenskapens och den fosterländska kulturens tjänst.

En tradition har vetat förtälja, att familjen Hjelt skulle härstamma från Holland, utan att detta dock med säkerhet kunnat ledas i bevis. Sannolikheten talar däremot för att familjen utgör en gren af den ännu fortlefvande norska släkten med samma namn, hvilken släkt torde utgått från det vid Mjösens vestra strand belägna urgamla, redan på 1000-talet nämnda bondegodset Hjelt-Hjelt. Norsk klang har också den finska släktens äldste kände medlems, Börjel Björnsson Hjelts namn. Han finnes första gången nämnd år 1675 i mantalslängderna för Åbo stad, där han var svarfvare, hvilket yrke gick i arf till söner och sonsöner. Hans sonsons son Niclas Hjelt (1739—1808), från hvilken alla nu i Finland lefvande grenar af släkten härstamma, erhöll akademisk bildning, blef docent vid Åbo akademi och sedermera domkyrko-syssloman. Af hans åtta söner förvärfvade sig fem akademisk bildning och inträdde på tjänstemannabanan, medan de öfriga egnade sig åt praktiska värf.

Aflidne Arkiater Hjelts föräldrar voro bokhandlaren och boktryckaren i Åbo, filosofie doktorn Christian Ludvig Hjelt (död 1849) samt Hedvig Lovisa Chytraeus (död 1839). Bland åtta syskon, däraf sju bröder, var han den femte i ordningen; han föddes den 18 april 1823 i Åbo.

Sin barndom och tidigare ungdom tillbragte Hjelt i föräldrahemmet i Åbo samt på familjens egendom Moisio gård i Lundo socken, hvarest hans intresse för naturen redan tidigt tyckes vaknat; sålunda blef han snart en varm vän af blomsterodling och efterhand, redan under skoltiden, intresserad för naturhistoriska studier. Att dömma af hans efterlemnade självbiografiska anteckningar synes han äfven i öfrigt varit tidigt utvecklad. Han lärde sig läsa vid knappt 5 års ålder, hvarvid de äldre brödernas hemlärare, sedermera lyceirektorn Knut Legat Lindström var hans läromästare, och redan vid 5 $^1/_2$ års ålder, hösten 1828, sattes han i en nyss inrättad skola, ett slags folkskola. Af nämnda

biografiska anteckningar finner man, att det förträffliga minne, som utmärkte Hjelt under hans mannaålder och som bestod ända till hans sena ålderdom, redan framträdt i barndomen. Så t. ex. erinrar han sig ännu långt senare, huru han vid circa 4 $^1/_2$ års ålder, då den stora branden i Åbo utbröt den 4 sept. 1827 på aftonen, från ett högt berg å Moisio egendom, där han då befann sig, „kunde se eldflammorna vid horizonten på ett afstånd af 10 à 12 kilometer“. Lifligt qvarstod äfven i minnet den „stora sorg“, som bereddes honom genom förlusten af hans leksaker vid Åbo brand. Äfven skräckbilderna från kolerans våldsamma framfart i Åbo, hösten 1831, synas hafva djupt inpräglat sig i den då 8-åriga gossens minne: „Portarna stängdes i den gård, der kolerafall yppat sig, en svart flagga blef till tecken derpå uthängd, all samfärdsel med en sådan gård upphörde och den nödvändigaste tillförseln af lifsmedel skedde genom fönstren. De döda bortfördes under nätterna under fackelsken“. Enligt tillgängliga uppgifter skola vid denna epidemi 373 personer hafva insjuknat i kolera i Åbo.

Efter att med utmärkelse hafva genomgått den hösten 1831 till Abo återflyttade trivialskolan, där minnesläsning tyckes varit hufvudsak, och det hösten 1830 nyinrättade gymnasiet i Åbo, blef Hjelt student, med vitsordet laudatur, vid 16 år den $^{22}/_6$ 1839 och inskrefs af akademins dåvarande rektor, Fredr. Wilh. Pipping, i Åbo-afdelning. Den tidens studenter buro en mössa af blått kläde med svart sammetskant och prydd med en gyllene lyra, något större än den nu för tiden mest brukliga.

Redan vid slutet af samma år 1839 hade den unge studenten sorgen att förlora sin moder, som afled efter en långsamt tärande sjukdom, troligen kräfta. Om henne yttrar Hjelt i ofvannämnda anteckningar bl. a. att „hennes håg och anlag voro mera riktade åt läsning och intellektuella sysselsättningar än åt de dagliga hushållsgöromålen“. Efter denna tid slöt sig Hjelt „ännu närmare“ till sin tio år äldre syster Emma, sedermera gift med vicepresident Gustaf Carp i Wasa. Hon synes med stor ömhet vårdat sig om denne sin broder.

Det intresse för naturhistorien, som redan under skoltiden vaknat hos Hjelt, stärktes och uppmuntrades ännu mera, då han på förslag af prof. G. R. Sahlberg våren 1840 af Sällskapet pro Fauna et Flora fennica erhöll ett reseundertsöd för en exkursion i naturhistoriskt syfte till sydvestra delen af Tavastland och trakterna omkring Päijänne. En annan student, G. W. Kekoni, erhöll samtidigt på sin lott för samma ändamål Hattula och Wånå socknar. Det torde varit första gången Sällskapet utsände unga studenter på sådana sommarexkursioner. Expeditionen måste väl ock utfallit till belåtenhet, att dömma af de rikhaltiga samlingar, som Hjelt redan under hösten aflemnade till nämnda sällskap.

Men Hjelt bedref med intresse och framgång sina studier icke blott i naturhistorie, kemi och fysik, utan ock i de klassiska språken, så att han våren 1844 kunde aflägga sin filos. kandidat examen med vitsordet laudatur i 6 af de då erforderliga 12 examensämnena, efter att redan i mars 1843 hafva utgifvit såsom disputation pro exercitio sitt första naturvetenskapliga arbete med titeln: Naturhistoriens Studium i Finland

före Linné's tid. I. Elias Tillandz och hans föregångare. Detta arbete utgör en intressant, kulturhistorisk studie, som, i anslutning till en kort redogörelse för den naturhistoriska vetenskapens uppkomst och utveckling i landet, närmare behandlar medicine-professorn Elias Tillandz, såsom „den ende hvars verksamhet i afseende på naturhistoriens studium i Finland före Linné's tid var af mera omfattande betydelse och fulländning". Den $^{21}/_{6}$ 1844 blef Hjelt promoverad till filosofie magister.

Under sin studenttid deltog Hjelt icke i det „vanliga kamratlifvet", utan sysslade hälst, såsom han i sina självbiografiska anteckningar uttrycker sig, „med sina böcker och blommor, samt slöt sig närmare till några få vänner, med hvilka han umgicks förtroligt". Härtill bidrog väl ock den riktning hans själslif tidigt erhöll, i det han redan under sina första studentår tillegnade sig den religiösa lifs- och verldsåskådning, som han sedan förblef orubbligt trogen ända till lifvets slut. — Hjelt var en varm och konsekvent finskhetsvän. Redan i sin ungdom hade han med sympati trädt den finska allmogen nära, särskildt inom de religiösa kretsar, till hvilka han anslöt sig. Det var dock först under 1850-talet som Hjelt, enligt hvad han i nyss nämnda anteckningar nämner, under vistelsen i Tyskland och under inflytande af J. W. Snellmans verksamhet, kom till en klar uppfattning af den finsk-nationella rörelsens genomgripande betydelse för det finska folkets kultur och hela existens. Ett vackert bevis i handling på denna sin öfvertygelse gaf han, då han jämte tre andra universitetslärare år 1871 tog initiativet till upprätthållandet med enskilda medel af en finsk lärdomsskola i Helsingfors, sedan den dåvarande senaten utverkat det finska normallyceets bortflyttning till Tavastehus.

Efter vunnen magistergrad fortsatte Hjelt ännu en tid sina naturvetenskapliga studier, blef filosofie licentiat 1846 och promoverades till filosofie doktor följande vår på grund af en afhandling: In systema nervorum sympathicum Gadi Lotae Linn. observationes. 1847.

Efter sålunda förvärfvad, särskildt den tiden väl behöflig, grundlig naturvetenskaplig utbildning egnade sig Hjelt numera med samma energi åt medicinska studier. Han begynte dessa vid den bjärta brytningstid, som inträffade i läkekonsten vid midten af senaste sekel, särskildt i Tyskland, under hvars inflytande i medicinskt hänseende de nordiska länderna närmast stått. Då tvungos de gamla naturfilosofiska och i system satta, spekulativa medicinska doktrinerna efter hand vika för det nyvaknande, rent naturvetenskapliga åskådningssättet, hvarigenom grundvalen lades till ett nytt skede i hela den medicinska utvecklingen.

Att Hjelt med framgång bedref sina medicinska studier framgår bl. a. däraf att han, efter att våren 1852 hafva aflagt medicine kandidat examen, med laudatur i alla ämnen, redan följande höst ej blott blef t. f. anatomie-prosektor — i hvilken befattning han

qvarstod till sommaren 1856 [1]), då han blef utnämnd till ordinarie prosektor — utan ock af Consistorium förordnades att bestrida professorns i anatomi och fysiologi offentliga föreläsningar läseåret 1852—1853. Då förslag om detta förordnande i maj 1852 väcktes i Consistorium af den ordinarie innehafvaren af lärostolen i nämnda ämnen professor Bonsdorff, på grund af hans tillernade utrikesresa, ansåg sig Consistorium till en början icke kunna ingå på detta förslag, alldenstund Hjelt icke var docent. Emellertid utarbetade Hjelt under sommarn en afhandling för docentur med titeln: De nervis cerebralibus parteque cephalica nervi sympathici Bufonis Cinerei Schneid. adnotata quædam [2]), 1852, hvilken afhandling ventilerades strax i början af höstterminen och godkändes för sitt ändamål, hvarefter följde Hjelts utnämning till docent i anatomi samt ofvannämnda förordnande. — Efter det de nya universitetsstatuterna trädt i gällande kraft blef Hjelt i jan. 1853 kallad till kurator i medicinska fakulteten, i hvilken befattning han qvarstod höstterminen år 1858.

Härunder försummade Hjelt dock icke sin egen praktiska utbildning vid kliniska institutet i det s. k. nya klinikum (färdig byggt år 1848).

Den 14 december 1855 aflade Hjelt med. licentiatexamen, efter att föregående vår hafva utgifvit och offentligen försvarat ($^{24}/_{5}$) en afhandling för med. och kir. doktorsgrad med titeln: „Bidrag till läran om det kalla vattnet såsom läkemedel“. Det var väl delvis i anslutning till eller under påverkan af det nyvaknade intresset för de s. k. naturliga läkemedlen, främst balneo- och hydrotherapin, som man äfven hos oss vid den tiden började intressera sig för vattenläkekonsten. Detta intresse, som i medlet af senaste sekel framträdde i de stora kulturländerna, är väl delvis att anse såsom en naturlig reaktion mot den ensidiga och tröstlösa nihilismen i den då dominerande Wienerskolan.

Nämnda afhandling, afsedd att belysa vissa sidor af hydrotherapin, är baserad dels på den personliga erfarenhet Hjelt förvärfvat sig under de två somrar (1853 och 1854) han biträdde prof. Bonsdorff vid vattenkuranstalten Kuppis i Åbo, dels på teoretiska studier i ämnet. Ej blott den tekniska sidan af frågan blir här närmare belyst, utan ock, såvidt möjligt, indikationerna för de olika badformerna och dessas verkningar beaktade, hvarvid förf. söker, i den mån vetenskapens dåvarande ståndpunkt det tillät, gifva en fysiologisk förklaring åt vissa af det kalla vattnets verkningar, särskildt dess inverkan på hud- och kärlsystemet, hvarvid han redan strängt skiljer mellan den *primära* eller omedelbara verkan af det kalla vattnet och de *secundära* eller *reaktiva* verkningarna.

Efter slutförda studier och examina vid universitetet verkade Hjelt till en början i den militära sjukvårdens tjänst. Sålunda erhöll han den $^{26}/_{1}$ 1856 af militieexpeditionen i senaten uppdraget att undersöka hälsotillståndet vid Åbo indelta skarpskyttebataljon, som under föregående år decimerats af sjukdomar (tyfoidfeber och frossa), hvarjämte han den $^{29}/_{3}$ 1856 blef förordnad till t. f. bataljonsläkare vid Nylands indelta bataljon.

[1]) Bland hans elever från den tiden må här särskildt nämnas: J. I. Björksten, J. A. Estlander, G. J. Strömborg och S. O. Wasastjerna.

[2]) Ännu vid den tiden måste hvarje för tjänst utgifven disputation vara författad på latin.

Snart valde dock Hjelt den pathologiska anatomin till specialämne för sina forskningar. Den stora betydelse, som nämnda disciplin äger för läkekonstens öfriga delar, hade vid denna tid småningom blifvit allt mera erkänd, jämnsides med det allmänna uppsving, som samtliga naturvetenskaper erforo under förra hälften af senaste sekel. Dock var det först mot midten af senaste sekel (på 1840- och 1850-talen) som vid universiteten inrättades egna lärostolar (professurer) i pathologisk-anatomi. Så t. ex. erhöll universitetet i Paris [1]) år 1836 sin förste professor i pathologisk anatomi (Cruveilhier, tidigare professor i kirurgi i Montpellier), universitetet i Wien år 1844 (Rokitansky), i Berlin 1856 (Virchow, som dock redan 1849 blifvit utnämnd till förste innehafvare af en likadan professur i Würzburg). Särskildt genom desse mäns och specielt genom Virchows trägna och banbrytande forskningar vann pathologiska anatomin snart sin centrala, grundläggande ställning bland de medicinska vetenskaperna.

På 1850-talet inrättade man äfven vid universiteten i de skandinaviska länderna särskilda lärostolar i pathologisk anatomi jämte till dessa hörande pathologisk-anatomiska institutioner.

Vid vårt universitet finner man, enligt förhandenvarande källor, den pathologiska anatomins betydelse första gången framhållen i medicinska fakultetens protokoll för den 23 febr. 1847, hvari äfven betonas, att en särskildt utbildad lärare i „pathologisk anatomi och mikroskopi“ vore ett „verkeligt desiderat“ [2]). Det var dock först inemot tio år senare, den 5 november 1856, som Consistorium ingick med en underdånig framställning om inrättandet af en särskild lärostol i pathologisk anatomi och statsmedicin, på grund af ett utlåtande af medicinska fakulteten, hvari det bland annat heter, att „fakulteten kännbart saknat en egen lärostol för den pathologiska anatomin, hvars fundamentala betydelse för den medicinska vetenskapen numera öfverallt blifvit erkänd“, och hvarmed då äfven „lämpligast skulle kunna förenas rättsmedicinen“. I maj följande år 1857 blef detta förslag å högsta ort bifallet.

Redan i augusti 1856 reste Hjelt utrikes med Würzburg som mål, i afsikt att särskildt hos Virchow studera pathologisk anatomi. Vid framkomsten till Würzburg den 10 september erfor han emellertid, att Virchow redan för en tid sedan blifvit kallad till Berlin, om hvilken händelse man då ännu ej hade någon kännedom i Helsingfors. På Virchows tillrådan stannade Hjelt likvisst till en början i Würzburg, hufvudsakligen „för att studera histologi och öfva sig i mikroskopets bruk“ hos en af samtidens främste anatomer, Kölliker, hvarjämte han med ifver bedref andra theoretiska studier, specielt i pathologisk anatomi hos Friedreich. — Vistelsen i Würzburg tyckes varit både betydelsefull och angenäm för Hjelt. Han skrifver härom i sina biografiska anteckningar: „Denna tid qvarstår ännu oförgätligt i mitt minne såsom grundläggande min vetenskapliga utbildning. Det var som om en ny verld öppnat sig för mig och med ungdomens entusiasm emottog jag den rikedom på vetande, som nu i så fullt mått stod mig till buds“. —

[1]) I Strassburg hade dock redan år 1819 inrättats en professur i pathologisk anatomi.

[2]) Se närmare härom i Otto E. A. Hjelts skrift: Den Pathologisk-anatomiska inrättningen vid det Finska Universitetet under åren 1859—1871, Helsingfors 1871.

Maj månad och sommaren 1857 egnades uteslutande åt studium af pathologisk anatomi vid Virchows institut i Berlin, äfvensom af pathologisk och fysiologisk kemi hos Hoppe-Seyler därsammastädes. Hösten tillbragte Hjelt hufvudsakligen i Prag och Wien, till hvilken sistnämnda ort den dragande kraften för alla pathologer var Rokitansky, af Virchow kallad „der erste wahre, descriptive pathologische Anatom“. Emellertid egnade sig Hjelt tillika, så långt tiden medgaf, åt kliniska studier, så t. ex. i obstetrik hos Seyffert i Prag.

Under denna äfvensom under senare resor besökte Hjelt äfven flere andra än ofvannämnda tyska universitet och pathologisk-anatomiska institut, stiftande personlig bekantskap med ett stort antal af Tysklands främste pathologer och stormän på medicinens olika områden. Synnerligen vänskapsfullt gestaltade sig förhållandet till Virchow, hvilken år 1874 personligen besökte Hjelt i Finland och med dennes biträde här utförde kraniologiska mätningar. I detta sammanhang kan förtjäna nämnas, att Virchow, då jag senare, under mina studieresor som pathologisk anatom hade förmånen att sammanträffa med honom, främst plägade rikta till mig frågan: „Wie geht es meinem alten Freund, Otto Hjelt“ (eller Helt, såsom han uttalade namnet)?

Af många skäl, hvilka delvis skola framgå af det följande, blefvo redan tidigt Hjelts relationer med de ledande männen på medicinens områden i Skandinavien och särskildt i Sverige mycket lifliga och hjärtliga. Härvid knötos äfven många, för lifvet bestående vänskapsband.

Efter det Hjelt jultiden 1857 hemkommit från sin första, långa vetenskapliga utrikesresa blefvo hans förmåga och omfattande kunskaper snart strängt tagna i anspråk af universitetet. Sålunda förordnades han den $^{17}/_{2}$ 1858 att jämte sin anatomie-prosektorstjänst bestrida den nyinrättade professionen i pathologisk anatomi. I det senare embetet kom han i tillfälle att omedelbart tillämpa de nya metoder han inhemtat och de rika erfarenheter han vunnit under sin nyss afslutade studieresa. Yttermera blef Hjelt af Consistorium förordnad att under vårterminen 1859 förestå professionen i barnförlossningskonst och den därtill hörande obstetriska afdelningen af kliniska institutet.

Sedan den från landets dåvarande generalguvernör utgångna planen att besätta den nyinrättade lärostolen i pathologisk anatomi med „en därtill kompetent tysk professor“ blifvit lyckligen afvärjd, utnämndes Hjelt, efter aflagdt specimen, den 13 maj 1859 till förste innehafvare vid vårt universitet af professionen i pathologisk anatomi och statsmedicin, hvilken sistnämda vetenskap omfattade såväl rättsmedicin som hygien.

Till ämne för nämnda specimen, som ventilerades den 26 mars 1859, valde Hjelt, på förslag af Virchow, hos hvilken arbetet påbörjats, en synnerligen intressant, men komplicerad och svårlöst fråga, nämligen „Om nervernas regeneration och härmed sammanhängande förändringar af nervrören“. Denna fråga, som naturligtvis kunde lösas endast på experimentell väg, hvarigenom den successiva utvecklingen kunde noggrannt följas och studeras, har långt tidigare och äfven långt senare sysselsatt talrika forskare, utan att man dock intill den dag som är kunnat uppnå enighet i åsikterna beträffande

regenerationsprocessens art. Genom sina mikroskopiska studier — så noggrannt utförda som den tidens vetenskapliga hjälpmedel gjorde det möjligt — af nämnda process och af därmed sammanhängande omständigheter, efter excision af små stycken af perifera nerver, kom Hjelt till den åsikten, att „regenerationsprocessen inom nerverna ursprungligen är en bindväfsbildning, utgående från neurilemets kärnor, hvilka därvid spela den viktigaste rolen“, en åsikt, som stod väl i harmoni med den tidens alltmera framträdande „uppfattning af bindväfnaden såsom en bildningshärd för organismen“. Genom senare tiders undersökningar har nyssnämnda åsikt, i något modifierad form och lämpad efter nutidens uppfattning af de anatomiska förhållandena, vunnit alltmer anslutning bland pathologerna, i motsats till den äldre, redan af Waller (år 1852) uttalade och af många ännu i hufvudsak hyllade åsikten, att regeneration af nervfibrerna skulle ske förnämligast genom ett utväxande af de i den centrala delen af nerven bibehållna axelcylindrarna in i den perifera, hvarest de gått under.

Det var dock ej nog därmed att universitetet erhöll en professor, som verkställde liköppningarna och på ett vetenskapligt sätt för de studerande demonstrerade de sjukliga förändringar i kroppens organ, som vid obduktionen kunde iakttagas. Äfven de yttre hjälpmedlen och betingelserna för en fruktbringande undervisning och rent vetenskaplig verksamhet måste anskaffas. Det första vilkoret för att lära de blifvande läkarne att rätt förstå och uppskatta de olika sjukdomarnas väsen, deras uppkomst och utveckling är väl att sätta dem i tillfälle att se och med mikroskopets tillhjälp studera de olikartade förändringar i kroppens organ, som betinga en viss sjukdom. Härtill räcka naturligtvis icke de mer eller mindre tillfälliga fynden vid de enskilda obduktionerna, utan erfordras för detta ändamål en möjligast fullständig och instruktiv samling af preparat, som under årens lopp tillvaratagas. Härigenom möjliggöres ett jämförande och systematiskt studium af de olika stadierna i de på många sätt skiftande sjukdomsprocesserna. Med öppen blick för undervisningens och vetenskapens kraf, började den nye professorn strax med energi samla och tillvarataga lämpliga preparat och sålunda anlägga ett pathologiskt-anatomiskt museum.

Den provisoriska lokal, som inom Nya klinikums byggnad till en början upplåtits för pathologiska anatomins behof, visade sig dock snart aldeles för trång såväl för bevarande af samlingarna, som för en tidsenlig undervisning, hvartill ju borde höra, förutom föreläsningar och demonstrationer, äfven mikroskopiska kurser för medicine kandidaterna, för att ej ens tala om svårigheten att där utföra vetenskapliga arbeten.

Såsom ursprungligen afsedd för helt andra ändamål, var lokalen dessutom för sagda uppgift fullkomligt olämplig. Tanken att söka åstadkomma en självständig inrättning, motsvarande den nya tidens kraf, låg därför nära till hands. Genom talrika studieresor i utlandet väl förtrogen med sitt läroämnes behof och med motsvarande inrättningar, särskildt i Tyskland, den pathologiska anatomins förlofvade land, begynte Hjelt omedelbart arbeta för realiserandet af ofvan nämnda idé. Det var dock först efter öfvervinnande af många svårigheter och efter häraf förorsakad tidsutdräkt, som uppförandet af ett självständigt, fristående pathologiskt-anatomiskt institut blef beslutet och nödiga medel

för ändamålet beviljades, hvilket skedde genom Kejserliga senatens bref till Consistorium af den 14 januari 1873. Den 5 februari 1873 uppdrog Consistorium academicum åt prof. Hjelt att låta uppgöra eskiss-ritningar till byggnaden. Den 4 oktober 1878 kunde den nya inrättningen, som uppförts på allmänna sjukhusets tomt vid Nikolaigatan, högtidligt invigas för sin bestämmelse. I det föredrag, som professor Hjelt höll vid detta tillfälle, yttrade han bland annat följande: [1]) „Den pathologiska anatomin, hvars uppgift är att utforska lagarna för sjukdomarnas orsaker, deras utveckling och deras inflytande på den menskliga organismen, bildar den grund, hvarpå vår tids praktiska medicin bygger sin uppfattning af sjukdomsprocesserna. — — — — — Måtte denna byggnad, som vi nu i dag inviga till sin bestämmelse, motsvara sin uppgift att blifva en härd för arbete och forskning“ [2]).

Vid tidpunkten för den nya inrättningens uppbyggande och första framträdande fanns det kanske en och annan, som befarade att såväl inrättningen i dess helhet som äfven de enskilda rummen och anordningarna i dessa voro tilltagna i större skala än hvad som var af behofvet påkalladt. Alla dessa farhågor blefvo dock af en snar erfarenhet jäfvade, ity att det senare visat sig att utrymmet ingalunda var för stort, snarare tvärtom, att alla utvecklingsmöjligheter blifvit tillfullo utnyttjade och att sålunda de ursprungliga anordningarna voro vidtagna med öppen blick för framtida behof.

Äfven på det praktiskt-kliniska området var den medicinska undervisningen vid tidpunkten för Hjelts tillträde till professionen mycket bristfällig, närmast till följd af materialets otillräcklighet. Det inskränkte sig nämligen till 30 sjukplatser, hvaraf 15 på den medicinska och 15 på den kirurgiska afdelningen af det s. k. kliniska institutet, nuvarande nya klinikum. En väsendtlig förbättring i detta hänseende vanns först, då genom en kejserlig förordning af den $^{19}/_{6}$ 1860 „allmänna hospitalet“ eller länelasarettet i Helsingfors, nuvarande gamla klinikum, förenades med universitetets kliniska institut och af dessa bildades en gemensam inrättning såväl för vården af sjuka från Nylands län som för de blifvande läkarnes praktiska utbildning. Till denna högst behöfliga och betydelsefulla omgestaltning af den kliniska sjukvården och undervisningen torde äfven Hjelt i sin mån bidragit, bland annat genom en i Litteraturbladet för år 1858 införd uppsats med titeln „Om behofvet af utvidgade inrättningar för den praktiska undervisningen i medicin“. Härvid erhöll äfven Hjelt en liten sjukafdelning.

Med professuren i pathologisk anatomi voro, såsom nämndt, förenade rättsmedicin och hygien, och hafva vi häri, såsom Hjelt själf yttrade vid festen på sin 90-års dag, att söka „förklaringen, hvarför han ansåg sig pligtig att offra så mycken tid för den allmänna hälsovårdens ordnande i vårt land“. Denna tid och detta arbete, för hvilket Hjelt samvetsgrannt beredde sig såväl genom studier och forskningar hemma som genom sär-

[1]) Detta föredrag finnes infördt i Finska Läkare Sällskapets Handlingar för år 1879.

[2]) En närmare beskrifning af patologisk-anatomiska inrättningen och dess samlingar finner man i Hjelts senare skrift: Det Finska Universitetets Patologiskt anatomiska Institution under åren 1871—1883. Helsingfors 1884, äfvensom i Nordiskt Med. Arkiv. 1882. XIV.

skilda utländska resor, voro emellertid ej bortkastade. Tvärtom buro de synnerligen rika frukter, för hvilka fosterlandet står i stor tacksamhetsskuld till den aflidne. Här må blott erinras därom, att före 1860-talet endast ytterst knapphändiga och bristfälliga lagbestämmelser funnos beträffande allmänna hälsovården i städerna eller på landet, äfvensom därom att vår nu gällande, år 1879 stadfästade, hälsovårdsstadga [1]) till väsendtlig del är Hjelts verk. Sitt hufvudsakliga arbete för hälsovården i enlighet med den hygieniska vetenskapens fordringar utförde Hjelt dels såsom verksam ledamot, dels såsom ordförande i följande komitéer: för ordnandet af sundhets-polisen i Finland (1862); angående fiskevattens förorenande genom kemiska ämnen och industrielt affall (1874); angående handeln med gifter (1874); för åvägabringande af tidsenlig lagstiftning angående hälsovården i landet jämte särskilda därmed gemenskap egande frågor (1874). Dessutom utgaf Hjelt på grund af Kejserliga Senatens förordnanden af den 14 februari 1868 och den 24 oktober 1871 särskilda skrifter rörande landets sundhetslagstiftning, bland hvilka må särskildt framhållas hans stora och betydelsefulla arbete: Den veneriska sjukdomens utbredning i Finland, jemte förslag att hämma dess spridning, 1873.

Äfven för mångahanda andra uppdrag både inom och utom universitetet togos Hjelts omfattande kunskaper, rika erfarenhet, sällsynta arbetsförmåga och praktiska sinne i anspråk. Så t. ex. fungerade han som e. o. opponent vid icke mindre än 8 professorsdisputationer, nämligen mot: F. J. von Becker och J. A. Estlander, kirurgi (1879); K. S. Sirelius och Josef Pippingsköld, barnförlossningskonst (1861); K. Hällsten och G. Asp, anatomi och fysiologi (1873 och 1874); J. W. Runeberg, medicinsk klinik (1876); Fr. Saltzman, kirurgi (1882); och dessutom vid ett stort antal disputationer för docentur samt för med. och kir. doktorsgrad. I Collegium medicum var Hjelt ledamot från år 1858 till Collegiets upplösning år 1878; inspektor för universitetets gymnastikinrättning 1871—1884; ledamot i ekonomiedivisionen $^{1}/_{10}$ 1876—$^{1}/_{5}$ 1882; universitetets prorektor $^{23}/_{5}$ 1881—april 1882; dekanus i medicinska fakulteten 1883 – hösten 1884; inspektor för vestfinska studentafdelningen från höstterminen 1871 till februari år 1883.

Såsom ledamot var Hjelt verksam äfven i följande komitéer: för reorganisationen af sinnessjukvården i Finland (1859); angående finska språkets införande i den vetenskapliga undervisningen i skolorna (1870); rörande organisationen af vårdanstalterna för sinnessjuka i landet (1873); för medicinalstyrelsens ombildning (1874); för uppgörande af förslag till nytt apoteks-reglemente (1874).

Hjelt var ordförande i komitén för uppförande af nybyggnad för universitetets pathologisk-anatomiska institution (1875—1878) och i bestyrelsen för uppförande af Finska statsarkivets byggnad (1886—1890). Finska Läkare Sällskapets sekreterare 1858—1859, dess bibliotekarie åren 1858—1864 och dess ordförande år 1868. Medlem af Finska missionssällskapets bestyrelse 1859—1882 och dess ordförande 1890—1893; medlem i bestyrelsen för diakonissanstalten 1867—1884 och Finska folkupplysningssällskapet 1875—1881. Ordförande i Finlands söndagsskole-förening 1895—97. Ordförande i

[1]) Se närmare härom i Hjelts uppsats: Om tillkomsten af 1879 års hälsovårdsstadga i Finska Läkaresällskapets Handl. 1911. Bd. LIII N:o 12. (Supplementhäftet).

direktionen för Finska läkarenes pensionskassa 1873—1883 och därjämte dess kassör 1873—1877. Lekmannaombud för St. Michels prosteri vid första finska kyrkomötet i Åbo 1876.

Bland de många arbetsuppgifter på olika forskningsområden, som Hjelt med intresse och energi omfattade, har dock arbetet på den historiska forskningens område måhända legat hans hjärta närmast, vare sig det gällt rent medicinska ämnen eller allmänt naturvetenskapliga eller kulturella frågor, särskildt sådana som rörde universitetet, eller biografiska spörsmål, hvilka alla han på ett lifligt och allsidigt sätt belyste med tillhjälp af sina omfattande studier, sin rika lifserfarenhet och stora personkännedom. — Till nämnda område hänför sig redan hans allra första, tidigare omnämnda afhandling af år 1843 med titeln: „Naturhistoriens studium i Finland före Linné's tid".

Efter att hafva väl och i rikligt mått fyllt sin plikt mot sitt lands universitet, erhöll Hjelt på begäran afsked från sin professur den $^{30}/_{1}$ 1885 och hugnades därvid med arkiaterstitel. Han flyttade därpå till sin villa Lepola [1]) i Thusby, „mer berättigad än de flesta lärde att njuta otium cum dignitate", såsom hans vän prof. Ödmansson i Stockholm i ett bref till Hjelt så sannt uttrycker sig.

Vid sin afgång från universitetet lemnade Hjelt efter sig ett rikt vetenskapligt arf i form af ett tidsenligt pathologiskt institut, med därstädes hopbragta värdefulla vetenskapliga samlingar, universitetet till heder, nutida och kommande forskare till nytta. — Men äfven senare har Hjelt på mångfaldigt sätt visat sitt varma intresse för det institut, som han grundlagt. Så t. ex. skänkte han åt detsamma år 1886 en stor del af sin värdefulla medicinska boksamling, innehållande öfver 2,000 volymer, därmed grundläggande institutets bibliotek.

Efter sitt afsked egnade sig Hjelt med nästan ungdomlig ifver och entusiasm, ända till lifvets slut, åt historisk forskning, hvilket arbete icke blott synes skänkt honom glädje och tillfredsställelse, utan äfven så att säga utgjort för honom ett lifselixir, hvilket, i förening med hans upphöjda lifsåskådning, väl till väsendtlig del utgör förklaringen till att Hjelt fick åtnjuta både kroppslig hälsa och andlig spänstighet ända till en ålder, som det är endast få dödliga förunnadt att uppnå.

Ett ämne, som särskildt intresserade Hjelt på grund af naturlig böjelse och studieriktning, var Linné's person och hans snillrika lifsgärning. Såsom resultat af Hjelts forskningar på detta område utkom redan år 1877 ett arbete med titeln: „Carl von Linné som läkare och hans betydelse för den medicinska vetenskapen i Sverige. Helsningsskrift, som med anledning af fyrahundraåriga jubelfesten den 5 september 1877 vördsamt tillegnas Kongl. Universitetet i Upsala å Finska Vetenskaps-Societetens vägnar". Specielt vid utförande af detta arbete kom Hjelts synnerliga förtrogenhet med det gamla romarspråket honom till stor nytta, ja utgjorde ett oeftergifligt vilkor för arbetets framgång [2]).

[1]) Det var på förslag af August Ahlqvist, som villan erhöll namnet „*Lepola*" (= „Hvilans hem").

[2]) I detta sammanhang må anföras utdrag ur ett bref från Gustaf Retzius till Hjelt af den $^{19}/_{2}$ 1906, i anledning af förarbetena för det senare stora arbetet öfver Linné, däri Retzius meddelar, att biblio-

Nämnda synnerligen intressanta, af varm känsla burna arbete emottogs specielt i Sverige med utomordentlig sympati och stort erkännande. Såsom bevis på huru högt arbetet där uppskattades kan anföras att, då en minnesfest den $^{23}/_{5}$ 1907 skulle firas i Upsala på 200:de årsdagen af Linné's födelse, Svenska Vetenskaps-Akademins Linné-komité riktade till Hjelt en uppmaning att på akademins bekostnad utgifva en ny upplaga af nyssnämnda skrift. I företalet till det nya ståtliga arbetet yttrar Hjelt bl. a. följande: „Uppmaningen emottogs med tacksamhet och förf. lofvade att på grund af nya, numera tillgängliga källor omarbeta densamma (skriften). Denna omarbetning framträder i föreliggande skrift, hvars fullbordande beredt dess författare glädje i hans lefnads senhöst". — Begge dessa sistnämnda arbeten äfvensom en tredje mindre skrift af år 1877 med titeln „Carl von Linné i hans förhållande till Albrecht von Haller" vunno uppmärksamhet äfven utom nordens gränser, hvilket bevisas däraf att alla tre blefvo öfversatta till tyska. Nästan entusiastiskt uttalar sig härom professorn i medicinens historia i Wien, Max Neuburger i ett bref till Hjelt af den $^{1}/_{9}$ 1909 [1]), däri det bl. a. heter: „Entzückt über Ihr hochinteressantes Werk über Linné als Arzt, beehre ich mich anzuzeigen, dass ich eine grössere Besprechung desselben in der Neuen Freien Presse und eine Rezension in der Wiener Klinischen Wochenschrift veröffentlichen werde".

Det största och vackraste minnesmärket på den medicinska historieforskningens område har dock Hjelt rest åt sig genom sitt storslaget anlagda, på synnerligen grundliga, omfattande och mångåriga källforskningar baserade, i tre digra band, åren 1891—1893, utkomna arbete „Svenska och Finska medicinalväsendets historia 1663—1812", hvilket arbete af Finska Vetenskapssocieteten prisbelönades. Ett „monumentalt verk" har det kallats af bl. a. Julius Petersen, den kände, numera aflidne, professorn i medicinens historia vid Köpenhamns universitet. Om detta arbete yttrar anmälarn L. W. Fagerlund i Finsk Tidskrift, efter att i största korthet hafva redogjort för dess innehåll, bl. a. följande: „Denna ämnets mångskiftande beskaffenhet har emellertid också gjort att det fordrats läkarens intresse, historieforskarens nit, den administrativa ämbetsmannens erfarenhet och vetenskapsmannens grundlighet och mogna, upplysta omdöme för att dana ett verk sådant som ifrågavarande, egenskaper som det är sällspordt att finna förenade hos samma individ".

Arbetet väckte naturligtvis väl förtjänt uppmärksamhet och erkännande, särskildt i Sverige, att dömma af talrika anmälningar och recensioner i olika tidskrifter samt af bref till Hjelt, förvarade uti hans efterlämnade rikhaltiga brefsamling. Så framhåller Gustaf Retzius såsom sin åsikt att „ingen annan nu lefvande hade varit det verket vuxen" — — — „ett verk, som med rätta må kallas *monumentalt*".

---

tekarien i *Linnean Society* i London Kappel skrifvit till honom „att anteckningarna i Clavis medicinae äro så svårlästa, att han icke tror det vara möjligt att i London få någon som kan dechiffrera dem, utan tycker det vara bäst att få boken sänd till Stockholm. Men detta kan ske endast efter en framställning från (svenska vetenskaps) akademin genom legationen i London". Så skedde äfven, hvarpå Hjelt, redan 83-årig, reste till Stockholm för att under några veckors vistelse därstädes „verkställa detta intressanta arbete", delvis med biträde af professor Th. M. Fries.

[1]) Den tyska upplagan af det senaste arbetet öfver Linné utkom år 1909.

Bland Hjelts öfriga, talrika, med samma sak- och personkännedom samt liffullhet utförda medicinskt-, naturvetenskapligt- och litterärt-historiska äfvensom biografiska arbeten, belysande olika ämnen från den fosterländska kulturens område, må här anföras endast följande: Naturhistoriens studium i Finland under sjuttonde och adertonde seklet, i „Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk“, 1868; Elias Lönnrot, ett minnesblad den 9 april 1882; Finlands medicinalförvaltning, Helsingfors, 1882; Olof af Acrel, den svenska kirurgins fader, program till professorn F. Saltzmans installation, Helsingfors, 1884 [1]); Finska Läkaresällskapet 1835—1884, en återblick på dess femtioåriga verksamhet, Helsingfors, 1885; De medicinskt-vetenskapliga institutens uppkomst och förhållande till läkekonstens utveckling, 1890, i Festskrift från Pathologisk-anatomiska Institutet, med anledning af Universitetets 250-åriga tillvaro; Naturalhistoriens studium vid Åbo Universitet, Svenska Litteratursällskapets skrifter, Bd. XXXII. Helsingfors, 1896; Finlands medicinska Bibliografi 1640—1900, systematiskt ordnad, Helsingfors, 1903; Johan Haartmans verksamhet vid Universitetet i Åbo under åren 1754—1781, i „Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk“, 1911; Sveriges biologiska disputations- och program-litteratur 1700—vårterminen 1910, systematiskt ordnad, ibidem, 1911; Minnestal öfver Alexander von Nordmann 1867, Frans Josef von Becker 1891 och Evert Julius Bonsdorff 1899, i Acta Societatis Scientiarum Fennicæ.

Icke blott genom att offentliggöra åtskilliga af sina arbeten i Vetenskapssocietetens skrifter, utan ock på ett mera direkt eller personligt sätt har Hjelt tagit liflig del i verksamheten inom detta sällskap, hvilket han tillhörde mera än ett halft sekel. En af stödjepelarne har Hjelt varit äfven för Finska Läkaresällskapet, hvars 50-åriga verksamhet han skildrat i ofvannämnda skrift, utkommen till halfsekel-festen 1885; i circa sex decennier hörde han till Läkaresällskapet, som äfven hade förmånen att i nära två decennier räkna honom bland sina hedersledamöter.

Till jubelmagister promoverades Hjelt den $^{31}/_{5}$ 94; till filosofie jubeldoktor d. $^{31}/_{5}$ 1897, hvarvid hans son, d. v. professorn i kemi Edvard Hjelt, fungerade såsom promotor; till med. o. kir. jubeldoktor den $^{30}/_{5}$ 1907, hvarvid jag hade den sällsynta äran och glädjen att promovera min vördade lärare och företrädare i ämbetet.

Yttre utmärkelser och tecken på allmänt erkännande kommo i rikligt mått Hjelt till del såväl från eget land som från utlandet. Så blef han af medicinska fakulteten i Upsala inbjuden att bivista därvarande universitets 400 åriga jubelfest den $^{5}/_{9}$ 1877. Valdes till ordförande i den hygieniska sektionen vid skandinaviska naturforskaremötet i Stockholm 1880 och till en af de skandinaviska vicepresidenterna vid internationella medicinska

[1]) I anledning af skriften öfver Acrel skrifver Magnus Huss till Hjelt i ett bref af den $^{25}/_{5}$ 1884 bl. a. följande: „Som svensk läkare blyges jag nästan att vi svenskar äro så litet måna om att bevara minnet af våra framstående män, att vi själfva ej gitta ur arkiverna framleta deras biografier, utan låta vännerna på andra sidan Österjön göra det och sedan skänka oss frukten af sina forskningar. Du, kære Broder Hjelt, har genom dina skrifter om Linné och Acrel riktat vår litteratur med värdefulla upplysningar om 2:ne af våra stormän inom de medicinska vetenskapernas område. — — — — — — — — — Din biografi öfver Acrel är, som mig tyckes, mästerlig och uttömmande, du har lyckats samla alla nödiga urkunder och sedan vetat sammanföra dem till ett helgjutet helt, som gör Acrel heder och dig likaledes. Tack därför å Svenska läkarekorpsens vägnar“.

kongressen i Köpenhamn 1884. Kallades till hedersledamot af Sällskapet Duodecim 1889, af Svenska Läkaresällskapet 1894, af Finska Läkaresällskapet 1895 och af Societas pro Fauna et Flora fennica 1896; af sistnämnda sällskap hade han varit en intresserad och verksam ledamot allt sedan studentåren. Vidare invaldes han till ledamot af Finska Litteratursällskapet och dess historiska sektion, af Physikalisch-medicinische Gesellschaft i Würzburg, Finska Fornminnesföreningen, Kongl. Vetenskaps- och Vitterhetssamhället i Göteborg, Svenska Fornskriftsällskapet och Kongl. Vetenskapssocieteten i Upsala. Promoverades till filosofie jubeldoktor i Upsala den 24 maj 1907. Kallades till ledamot af Kongl. Svenska Vetenskaps-akademin år 1907. Såsom tidigare nämnts, erhöll Hjelt arkiaterstitel vid sitt afskedstagande år 1885. Dessutom hugnades han med flere ordnar; bl. a. utnämndes han till kommendör af Kongl. Svenska Nordstjerne ordens 2 och 1 klass.

Enastående är den vackra och varma hyllning, som egnades arkiater Hjelt på hans 90-årsdag den 18 april 1913 af talrika vetenskapliga sällskap och institutioner, äfven i utlandet. Vi minnas ännu lifligt, med hvilken imponerande kroppslig och andlig spänstighet han då stod i vår krets.

Knappt två månader senare afled Arkiater Hjelt stilla och fridfullt på sitt kära Lepola i Thusby den $^{13}/_{6}$ 1913, till det sista varmt omhuldad af de sina. En svår lungkatarr ändade detta innehållsrika och verksamma lif.

Hjelt var sedan den $^{9}/_{7}$ 1850 gift med Yolanda Aurora Thuneberg, född den $^{11}/_{8}$ 1826, dotter till öfverstelöjtnanten Carl Johan Thuneberg och Wilhelmina Jack. Han blef enkling den $^{9}/_{3}$ 1888. I sitt äktenskap hade han 11 barn, af hvilka dock 3 dogo redan i späd ålder; af de öfriga lefva 4 söner, bland dem universitetets n. v. vicekansler, och 4 döttrar. Hvad Hjelt varit för sitt hem och sin familj tillkommer icke mig att här beröra.

Med arkiatern Hjelt har gått ur tiden en varmhjärtad och human person, som under en viktig nydanings- och utvecklingsperiod på mångfaldigt sätt inristat sitt namn i universitetets och den finska läkekonstens historia, en man, som genom sitt hängifna och plikttrogna arbete i fosterlandets tjänst lämnat ett vackert och manande föredöme åt nuvarande och kommande generationer.

Utgifna skrifter.

Akademiska disputationer: Naturhistoriens studium i Finland före Linné's tid. I. Elias Tillandz och hans föregångare (pro exercitio). 1843. — In systema nervorum sympathicum Gadi Lotæ Linn. observationes (för fil. dokt. grad). 1847. — De nervis cerebralibus parteqne cephalica nervi sympathici Bufonis Cinerei Schneid. adnotata quædam (för docentur). 1852. — Bidrag till läran om det kalla vattnet såsom läkemedel (för med. och kir. dokt. grad). 1855. — Om nervernas regeneration och därmed sammanhängande förändringar af nervrören (för profession). 1859. (införd i utdrag i Schmidts Jahrbücher 1861).

Öfriga fristående skrifter: Den patologisk-anatomiska inrättningen vid det Finska universitetet 1859—1871, H:fors 1871. — Öfversikt af ettusen liköppningar vid det Finska universitetets patologisk-anatomiska inrättning, H:fors 1872. — Bidrag till sundhetslagstiftningen i Finland. I. Den veneriska sjukdomens utbredning i Finland jämte förslag att hämma dess spridning. II. 1. Allmän helsovårdsstadga för Finland. Förslag och motiver. II. 2. Om byggnadssättet i stad från sanitär synpunkt, H:fors 1873—1875. — Die Verbreitung der venerischen Krankheiten in Finnland, Berlin 1874. — I vattenledningsfrågan, H:fors 1875. — Carl von Linné som läkare och hans betydelse för den medicinska vetenskapen i Sverige, H:fors 1877 (på tyska i Leipzig 1882). — Finlands helsovårdsfråga, H:fors 1879. — Elias Lönnrot, ett minnesblad den 9 april 1882. — Finlands medicinalförvaltning, H:fors 1882. — Olof af Acrel, den svenska kirurgins fader, program till professorn F. Saltzmans installation, H:fors 1884. — Det finska universitetets patologisk-anatomiska institution åren 1871–1883, H:fors 1884. - Finska Läkaresällskapet 1835—1884, en återblick på dess femtioåriga verksamhet, H:fors 1885. — Svenska och Finska medicinalväsendets historia 1663—1812. I—III. H:fors 1891—1893 (prisbelönt af Finska Vetenskapssocieteten 1894). — Finlands medicinska Bibliografi 1640 - 1900, systematiskt ordnad. H:fors 1905. — Carl von Linné såsom läkare och medicinsk författare. Upsala 1907. (Utgifven af K. Svenska Vetenskaps Akademin); öfversatt till tyska och tryckt i Jena 1909. (Fischers förlag). Det Finska Universitetets Disputations- och Program-Litteratur under åren 1828–1908, systematiskt ordnad, H:fors 1909.

I *Notisblad för Läkare och Pharmaceuter*, 1857: De medicinska studierna i Würzburg och Wien. Om amyloiddegenerationen. 1860: Om behofvet af särskilda fattigläkare i Helsingfors. 1861: Om en ny sjukdom, kallad Trichinismus. 1868: Från det första Ryska naturforskaremötet i S:t Petersburg den 9—17 januari 1868. Flere mindre uppsatser och referat i årgångarna 1857—1861, 1863, 1865—1868.

I *Finska Läkaresällskapets Handlingar* XI: Årsberättelse vid Finska Läkaresällskapets årsmöte 1869. Öfversikt af sjukvården vid Allmänna sjukhusets patologisk—anatomiska afdelning 1861–1868. XII: Om handeln med gifter jämte förslag till dess ordnande i Finland. XV: Den internationella medicinska kongressen i Wien 1873. XXI: Vid invigningen af det finska universitetets patologisk-anatomiska inrättning den 4 oktober 1878. XXIII: Patologisk-anatomiska institutionen i Helsingfors. LIII: Om tillkomsten af 1879 års Hälsovårdsstadga. (1911) Ingår äfven i Duodecim på finska. LIV: Om vattenkurstriden i Finland under 1860-talet (1912).

I *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, Tom. IX, 1867: Minnestal öfver Alexander von Nordmann. (Äfven öfvers. till tyska, H:fors 1868). XVIII, 1891: Minnestal öfver Frans Josef von Becker. XXVI, 1899: Minnestal öfver Evert Julius Bonsdorff. — I *Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk*, XII, 1868: Naturhistoriens studium i Finland under sjuttonde och adertonde seklet. XLVII, 1888: Svenska statens inköp af hemliga läkemedel och särskildt kirurgen Guys medel mot kräfta. XLVIII, 1889: J. Leches fenologiska anteckningar öfver växter i trakten af Åbo 1750—1752. LXX, 1911: Sveriges biologiska Disputations- och Program-Litteratur 1700—vårterminen 1910, systematiskt ordnad. LXX: JohanH aartmans verksamhet vid Universitetet i Åbo under åren 1754—1787. — I *Öfversikt af Finska Vetenskapssocietetens förhandlingar*, VI, 1863: Den hydroterapeutiska läkemetoden. Åtskilliga andra meddelanden i band V, VII, VIII, XI, XII, och XVIII.

I *Svenska Litteratursällskapets skrifter*, XXXII, 1896: Naturalhistoriens studium vid Åbo Universitet. CXIV, 1914: Pehr Kalms brev till C. F. Mennander. (Tryckningen efter förf.:s död ombesörjd af Alb. Hästesko).

I *Litteraturbladet*, 1858: Om behofvet af utvidgade inrättningar för den praktiska undervisningen i medicin. — I *Historiallinen arkisto*, II, 1868: Utdrag ur en Åbo students dagbok för åren 1648–1656. - I *Säll-*

skapets pro Fauna et Flora fennica förhandlingar, X, 1867: Försök att bestämma de af Elias Tillandz i hans Catalogus plantarum upptagna växter; L. J. Prytz, Floræ fennicæ breviarium. Ex schedulis auctoris continuatio. — I *Lännetär*, 1874: Den medicinska vetenskapens nuvarande forskningsmetod. 1877: Carl von Linné i hans förhållande till Albrecht von Haller (på tyska i Arch f. Geschichte der Medicin III, 1880). 1882: Medicinska förhållanden i Åbo på 1750-talet. — I *Duodecim*, 1887: Ruotsissa ja Suomessa v. 1688—1812 voimassa olleista apteekki-taksoista. — Farmasian ja farmakologian professorin viran synnystä ja aikaisemmista vaiheista (i Kirjoituksia Duodecim-Seuran kymmenvuotisen olemassa olon muistoksi, Hels. 1891). — *Commentationes variae in memoriam actorum CCL annorum.* Edidit Universitas Helsingforsiensis 1890; II: Medicinska förhållanden i Åbo på 1760-talet; V. (Festskrift från patologisk-anatomiska institutet): De medicinskt-vetenskapliga institutens uppkomst och förhållande till läkekonstens utveckling. Till Universitetets 250-års minne. Festskrift, utgifven af vestfinska afdelningen, H:fors 1890: Kupittaan lähteestä. — I *Oma maa*, II: Rokotuksesta Suomessa. 1908.

I *Nordiskt medicinskt arkiv*, 1870: Om de senaste tyfusepidemierna i Finland och de därvid vunna patologisk-anatomiska resultaten; 1882: Patologisk-anatomiska institutionen i Helsingfors; 1883: Finlands medicinalväsende. — I *Förhandlingarna vid de skandinaviska naturforskarnes tolfte möte* 1880: Om leukämin med särskildt afseende på de i norden hittills iakttagna fallen.

I *Virchows Archiv für patol. Anatomie*, 1860: Über die Regeneration der Nerven. 1865: Über den Aussatz in Finnland. 1875: Das Vorkommen des Wechselfiebers in Finnland. — I *Förhandlingarna vid första ryska naturforskaremötet i S:t Petersburg*, 1868: Cholesteatom i hjernan (införd på ryska). — I *Verhandlungen der Berliner Gesellschaft für Anthropologie*, 1872: Über die Finnen und ihren Charakter, Brief an Herrn Prof. R. Virchow. — I *Tageblatt des 3. internat. medicinischen Congresses in Wien*, 1873: Über Syphilis in Finnland. — I *Vierteljahrschrift für gerichtl. Medicin*, 1881: Zur sanitären Gesetzgebung Finnlands. — I *Förhandl. vid Nord. Naturf. och Läkaremötet i Helsingfors 1902:* Hälsningstal i sekt. f. patol. anatom., en blick på den nyare patol. anatom. litteraturen i de nord. länderna.

Särskilda ämnen. Redogörelse för diakonissinrättningens i Helsingfors verksamhet 1869—1872, H:fors 1869—1873. — Diakonissanstalten i Helsingfors under åren 1867—1907. H:fors, 1908; öfversatt till finska. — Drag ur en moders lefnad. Kuopio 1898. — Ur en moders brefvexling. Tankar och råd. H:fors 1898. Andra uppl. H:fors 1906. Öfversatt till finska och tryckt i Borgå 1904. Andra uppl. H:fors 1907. — I Teologisk Tidskr. 1903: Josef Grönberg (minnesteckning). Förteckning öfver Finska Läkaresällskapets boksamling år 1863, H:fors 1864. — Har sedan 1869 tillhört redaktionen af Nordiskt medicinskt arkiv och där refererat den finska medicinska litteraturen 1868—1881. — I Biographisches Lexikon der hervorragendsten Aerzte aller Zeiten und Völker, Wien 1884—1888, skrifvit samtliga där införda finska och äfven en del svenska läkares biografier. — Tuusulan pitäjän kunnallislautakunann kertomus vuodelta 1900, Hels. 1902.

O. M. Reuter.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI

ODO MORANNAL REUTER

SOM ZOOLOGISK FORSKARE

MINNESORD

UPPLÄSTA VID

FINSKA VETENSKAPS-SOCIETETENS

ÅRS- OCH HÖGTIDSDAG DEN 25 MAJ 1914

AF

J. A. PALMÉN

HELSINGFORS 1914
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI

Högtärade Församling.

Genom professor Odo Morannal Reuters den 2 september 1913 timade frånfälle har Finska Vetenskaps-Societeten förlorat en verksam ledamot och Finland en af sina produktivaste författare på naturalhistoriens område.

Vid fullgörandet af Societetens uppdrag att i dag uttala minnesord öfver den bortgångne måste jag redan i begynnelsen framhålla, att uppgiften öfverstiger förmågan. Ty mig saknas i väsentlig mån personlig erfarenhet rörande viktiga omständigheter, som betingat allaredan yttre företeelser i Odo Reuters lif. Icke heller äger jag specialkännedom rörande de insektgrupper, som han hela sitt lif studerat. Än mindre är det mig möjligt att med tillfredsställande säkerhet loda djupen i själslifvets hemlighetsfulla schakt, särskildt när det är fråga om en rikt begåfvad personlighet. Ytterligare måste jag på grund af bristfällig sakkännedom afhålla mig från att beröra hvad Odo Reuter uträttat såsom skriftställare utanför sitt egentliga forskarefack, och särskildt är det självklart, att hans steg in på diktarens område icke må bedömas af den, som härför saknar alla betingelser.

Men tillmötesgående Societetens önskan skall jag försöka kasta en kort blick på Odo Reuters verksamhet som zoologisk forskare, för att framhålla de viktigaste arbeten han utfört och tillika, såvidt möjligt, också förutsättningarna härför. Äfven med denna begränsning blir min uppgift vansklig. Ty trots bekantskap med den bortgångne redan i ungdomsåren har jag mera personligt lärt känna honom stadd i vetenskaplig verksamhet först i det skede, då han redan var kroppsligt bruten, men ännu i det längsta ville utnyttja sin andliga spänstighet.

Familjen Reuter är af skandinaviskt ursprung, och i vårt lands äldsta kulturstad Åbo lefde den nu bortgångne forskarens fader, lektor Edvin Titus Feodor Reuter som lärare vid gymnasiet och slutligen rektor vid svenska klassiska lyceum († 1899). Gift med Aline Procopé vistades han med sin familj dels här, dels under somrarna på Lofsdal i sin makas hemtrakt Pargas och på Ispois invid Åbo. På dessa orter genomlefde äfven barnen sina ungdomsår, af dem Odo Morannal äldst bland många syskon, född i Åbo den 28 april 1850, och hit drog sig den nu bortgångne alltid gerna när tillfälle därtill erbjöd sig, dels för att ostörd idka vetenskapligt arbete dels ock när sjukdom det fordrade. Det var också i Pargas som hans ohelsa slutligen stegrades därhän, att han under svårt lidande hämtades till sjukhus i födelsestaden, hvarest han snart blef medvetslös och lifstråden kort därpå brast.

Enligt uppgift lämnad af den aflidnes ålderstigna moder „visade Odo redan som helt liten en stor kärlek till de minsta lefvande varelser han fann i naturen. Han letade fram de små insekter, som rörde sig i sanden och gräset, och gaf dem de ömmaste smeknamn. Då han blef litet större samlade han dem i små glasburkar, och sedan han kommit i skolan, blef naturkunnigheten hans käraste ämne. Vid 11 års ålder skref han på lediga stunder små beskrifningar öfver insekter och utbrast en gång under sådan sysselsättning: 'Hvad jag vore glad om jag en gång, när jag blir stor, skulle kunna lära också andra att känna de här små kräken'. Till den några år äldre kamraten John Sahlberg drogs han snart genom det gemensamma intresset för naturkunnigheten, och utan tvifvel hade han mycken nytta af detta umgänge". Intresset visade sig numera i form af ifrigt samlande och studium af insekter, och detta med den framgång, att Odo Reuter redan som gymnasist blef intagen i Societas pro Fauna et Flora fennica.

Blifven student år 1867 fortsatte han i samma riktning, dock är det mig icke veterligt att han genom den till buds stående akademiska undervisningen

skulle fått någon särskild impuls till vetenskaplig forskning. Men medfödd kärlek till densamma, ett ypperligt minne och sällspord observationsförmåga äfvensom en ovanlig raskhet att från olika håll taga intryck af idéer — allt detta samverkade till att Odo Reuters studier och verksamhet fortgingo i själfvald riktning. Under studentperioden fann han af samma orsaker intresse också för annat än examensstudierna. Lifvet pulserar ju starkt i ungdomsåren och starkare hos den, som har fantasins gåfva samt känner sig dragen åt flere olika håll. I naturhistorisk riktning tog sig hans verksamhetsbegär snart uttryck på sätt här skall närmare skildras. Å andra sidan gaf också fantasin sig till känna närmast i form af diktförsök redan vid tidiga år. I versform skref han vid nyss fyllda 17 år det historiska ämne, som han behandlade vid skrifningarna till studentexamen. Delvis yttrade sig fantasibegåfningen också däri, att den — såsom en tecknare yttrat — „äfven åt hans lefnad gifvit ett drag af mångfrästande oro".

I sin år 1870 utkomna första publikation förtecknade Reuter Pargas sockens Hemiptera Heteroptera, och kunde han däri redogöra för fem förut obeskrifna arter. Efter sin år 1873 tagna filosofie-kandidatexamen utgaf han öfversikter af Finlands och Skandinaviska halföns arter af flere hemipterfamiljer. Särskildt bör framhållas hans år 1875 utgifna innehållsrika och mångsidiga disputation Revisio critica Capsinarum, praecipue Scandinaviae et Fenniae, på grund hvaraf han nästföljande år vann filosofie-licentiatgrad.

Märkligt nog har Reuter företagit sig hvarken många eller långa samlingsresor, utan han koncentrerade på hemorten sitt ute i naturen bedrifna studium. Hans enda längre exkursionsresa, den år 1876 till Skottland, särskildt Shetlands- och Orkney-öarne, hade föranledts närmast af museiprefektens önskan att därifrån erhålla entomologiska originalsamlingar för universitetet.

Men i stället emottog Odo Reuter till bestämning samlingar, som landsmän sände från olika delar af Finland, äfvensom remisser från andra länder, och det i allt rikligare mängd ju mer han blef känd som specialist. Särskilda gånger besökte han skandinaviska museer, och hufvudsakligen för liknande studier på kontinenten erhöll han (1880) resestipendiet på universitetets stat. Den ursprungliga reseplanen åsyftade till en del äfven studier i jämförande anatomi uti Heidelberg och Leipzig, men de på sistnämnda ort i gång satta undersökningarna öfver hemipteräggens mikropyle ledde icke till något i tryck synligt resultat. Så mycket talrikare däremot blefvo de skrifter han som beskrifvande entomolog och systematiker utarbetade eller förberedde under besök i museerna i Stockholm, Köpenhamn, Wien, Budapest och hos fack-

kollegan Puton i Remiremont i Vogeserna. Dessa skrifter utgaf han sedermera efter hand, och under hela hans lif gick sällan någon remiss genom hans händer utan att ge anledning till någon tryckt skrift. En synnerligen stor mängd smärre notiser bragte han nästan omedelbart till offentligheten.

Hans förnämligaste publikation var verket Hemiptera Gymnocerata Europae. Hémiptères Gymnocérates d'Europe, du bassin de la Méditerranée et de l'Asie russe. Tidigare hade Reuter tänkt sig detta verk komma att omfatta omkring tio delar, af hvilka den afslutande skulle redogöra för dessa insekters anatomi m. m. Sistnämnda tanke kom aldrig till utförande, enär därtill skulle kräfts alldeles särskilda förberedelser. Men fem delar hafva offentliggjorts i Finska Vetenskaps-Societetens Acta (1878—1896) och omfatta icke mindre än 960 trycksidor. Af verkets 34 plancher återgifva sju författarens egna noggranna detaljteckningar; de öfriga upptagas af 243 utaf den böhmiske forskaren Fiebers vackra färglagda figurer öfver en mängd arter. De äro af Reuter för ändamålet valda ur en dyrbar originalsamling, som efter Fiebers år 1872 timade frånfälle hade öfvergått i den kände franske hemipterologen Putons ägo. Af honom ställdes de liberalt till fackkollegan Reuters förfogande, enär ingen i Österrike, Tyskland eller Frankrike åtagit sig att befordra dem till offentligheten. Alla fem delarne äro egnade enbart åt Reuters favoritgrupp, den artrika familjen *Capsidae* (= *Miridae*). Enhvar är tillegnad någon af samtidens mest framstående hemipterologer, A. Puton och L. Lethierry samt (†) C. Stål, V. Signoret, G. de Horvath och E. Saunders. De tre första delarne (Acta XIII) stodo efter någon tid icke mer att fås i bokhandeln, hvarför år 1907 en kemigrafisk reproduktion af dem föranstaltades.

Under bearbetningen af denna familj tillströmmade emellertid också af de öfriga ett så rikligt material, att det blef omöjligt att efter samma utförliga plan utarbeta alla. I stället tillgodogjorde sig Reuter sina färdiga beskrifningar genom att sammanställa åtskilliga monografier äfvensom bidrag i mindre afhandlingar. Af de större böra nämnas monografierna öfver *Reduviidae* (1881), *Oncocephalus* (1882), *Anthocoridae* (1884), *Lygaeidae* (1886) och *Ceratocombidae* (1891), alla införda i Finska Vetenskaps-Societetens Acta, likasom ock de öfver släktena *Holotrichius* (1891), *Reduvius* (1892), *Fulvius* (1895) och *Acanthia* (1895). Till monografin öfver *Reduviidae* kunde författaren, på grund af stegrad blindhet, år 1909 foga endast ett fragmentariskt tillägg.

Såväl praktarbetet Hemiptera Gymnocerata Europae som monografierna hafva från fackmäns sida rönt mycken och förtjänt uppmärksamhet. Detsamma gäller uppsatserna om smärre hemiptergrupper. Till frågan om he-

mipterarternas utbredning har Reuter yttermera lämnat rika bidrag i ett stort antal mindre skrifter rörande faunan i de mest olika länder, -- från Vegas vinterområde ända till Madagaskar, Kina, Java, Australien och Amerika.

Denna rika produktivitet är egnad att väcka förvåning, men man förstår den, när man besinnar, att Odo Reuters skarpa observationsförmåga och ovanliga minne i högsta måtto underlättade arbetet, samt att han snart vann en alldeles utomordentlig färdighet i den beskrifvande entomologins så att säga tekniska del. Beskrifningarna affattades med synnerlig lätthet, och de hopades efter hand i sådan mängd, att när de gruppvis offentliggjordes, en oinvigd knappast fattade huru och när själfva undersökningarna utförts och när det hela nedskrifvits. Ty redaktionsarbetet fortgick synbarligen icke efter den lugna regeln „nulla dies sine linea", utan vanligen med feberaktig ifver och i brådstörtande ryck, som åtskildes genom icke oväsentliga pauser. Att kraftutlösningen under arbetsperioden delvis möjliggjordes genom den antydda ojämnheten antog han själf icke vara osannolikt.

Med en del afbrott fortgick denna verksamhet under 1870- och de första åren af 1880-talet i allt stigande progression. Det gällde dock icke uteslutande artförteckningar, deskriptioner, monografier och systematiska grupperingar, icke heller enbart Hemiptera. Arbetets art i och för sig fordrade att ofta nog äfven invecklade synonymiförbistringar utreddes — exempelvis i Reuters revision (1888) af äldre auktorers arter (1758—1806) —, och städse måste arternas geografiska utbredning beaktas, ibland till och med ingående diskuteras i enkom däråt egnade afhandlingar. Därjämte upptog Reuter frågan om hemipterers och andra insekters dimorfism (lång- och kortvingade former) samt trimorfism, äfvensom arternas metamorfos och deras därmed förknippade gestaltförändringar. Hans erfarenheter från hemorten möjliggjorde också diskussioner om arternas uppträdande på de för enhvar af dem karakteristiska lokalerna, äfvensom om deras beroende af bestämda näringsväxter. Alla dessa frågor kunna med rätta anses höra till fackprogrammet inom systematiken samt till det hos oss af ålder bedrifna faunistiska forskningsarbetet.

Såsom bekant blef den nutida utvecklingsläran äfven hos oss inom konservativa kretsar först emottagen mycket oblidt — man kan förstå detta, då den ju bröt med många rådande föreställningar. Jämväl från zoologiskt håll blef darwinismen här betecknad som förfelad och ledande till vådliga följder. Gruppen af dess anhängare tillväxte emellertid småningom, och i midten af 1870-talet slöt sig till dem äfven Odo Reuter. Mången gjorde det väl mindre på grund af egna undersökningar än i följd af ungdomlig hänförelse och af en

viss förkänsla att den naturalhistoriska forskningen nu höll på att inriktas på nya banor.

Som en spontan yttring af en sådan förkänsla får man väl tolka Reuters vakna intresse för en del frågor, hvilka strängt taget icke hörde samman med faunistik och systematik. En del insekters förmåga att medels mekaniska hjelpmedel frambringa ljud (stridulera), som de väl uppenbarligen också måtte kunna förnimma genom hörsel, ådrog sig tidigt hans uppmärksamhet, och härom offentliggjorde han ett par mindre meddelanden. Jag erinrar mig huru vi i anledning af mikrofonens uppfinnande en gång på allvar diskuterade huruvida man ej med dess tillhjelp borde undersöka insekter: de hållas måhända för stumma allenast därför, att af dem eventuellt frambragta minimala ljud äro ofattbara för det obeväpnade mänskliga hörselorganet. Diskussionen ledde dock ej till något försök.

Vid denna tid hade, såsom allbekant, offentliggjorts märkliga tankar om skyddande likhet till form och färg, alltså maskering (mimicry) och Reuter var icke sen att från Hemiptera anföra egna exempel härpå. Andra iakttagelser om färgteckningen hos en del hemipterarters larver och fullbildade individer anförde han 1875 såsom häntydande på dessa arters släktskap, eventuellt gemensamma härledning. Iakttagelserna och tolkningen bibragte mig den föreställning, att Reuter redan då ernade lägga också dylika tankar till grund för sina kommande forskningar rörande hemipterernas förvantskap och gruppering. Men det räckte länge innan detta frö visade tydliga groningstecken. Hade fröet redan i detta tidiga skede och under skolad vård kommit till mognad och utveckling, så hade Reuters senare forskning säkerligen fått en ännu större utsträckning och betydelse.

Han fortsatte emellertid i sin redan inslagna riktning. Att Reuter tidigast valt gruppen Hemiptera till studium berodde väl delvis på kamratföredömet men äfven på fritt val: J. Sahlberg har anfört, att redan den unge gymnasisten fattat ett synnerligt tycke för en viss insekt, *Lygus campestris*, och beslutat egna sig åt studium af den grupp, hvartill arten hörde. Dock var det självklart, att ej heller de af ålder hos oss studerade skalbaggarna och fjärilarna förbisågos. Men det räckte icke länge innan Reuter upptog till bearbetning äfven sådana insektgrupper, som ingen ännu hos oss studerat. Af psylloder kunde han redan år 1876 från Finland förteckna 36 och af podurider (*Apterygogenea*) 43 arter, bland dem icke så få förut obeskrifna. År 1879 uppräknade han 20 finska arter af de mycket små, för växter skadliga *Thysanoptera*, och senare beaktade han af dem ännu särskildt de arter, som före-

komma i orangerier. Finska psocider (*Corrodentia*) förtecknade han år 1893, och nästföljande år florsländorna (*Neuroptera*). Ännu på 1900-talet upptog han med ifver en ny grupp till behandling, nämligen *Cimicidae*.

Genom dessa sina nyodlingar på den inhemska faunistiska forskningens område föranledde Reuter landsmän att under samlingsresor närmare uppmärksamma de förbisedda insektgrupperna. Själf egnade han också senare åt några af dem värdefulla uppsatser, i hvilka han antingen redogjorde för sålunda tillkomna samlingar från olika trakter af Finland, eller ock på nytt bearbetade hela materialet med ledning af nyare utländsk litteratur af större omfattning. Mest synas poduriderna hafva intresserat honom: dem har han nämligen behandlat i tjugusex arbeten eller notiser. I en del af dem, men också i talrika om andra insekter, har han egnat stor uppmärksamhet åt arternas ekologiska förhållanden. Det var väl detta intresse som sedermera vägledde honom åt tvenne olika håll. Å ena sidan kom han att beröra skadeinsekterna, bland andra den s. k. ängsmasken, och hans skrifter härom kunna anses vara begynnelsen till vetenskaplig forskning äfven hos oss på landtbruks- och forst-zoologins område samt hafva befordrat planerna på försöksstationer. Å andra sidan ledde intresset för ekologiska spörsmål också till allmänna biologiska, särskildt djurpsykologiska problem, hvarom längre fram skall ordas.

I sina zoologiska skrifter har Odo Reuter endast undantagsvis berört andra djurgrupper än insekterna. Här må nämnas exempelvis hans text till G. Sundmans planchverk öfver Finlands fiskar.

Reuters snabba observationsförmåga åtföljdes af en motsvarande snabbhet att nedskrifva resultaten af iakttagelserna och äfven publicera dem. Måhända var det denna så att säga publicistiska läggning, som hos honom en gång alstrade en önskan att utgifva en egen hemipterologisk revy, ehuru tanken icke blef förverkligad. I stället hade han städse tillfälle att här hemma offentliggöra sina resultat uti såväl Finska Vetenskaps-Societetens som Societas' pro Fauna et Flora fennica skriftserier, och talrika voro de utländska samfunds organ, som beredvilligt ställdes till hans förfogande. Redan vid grundandet af den kända skriftserien Zoologischer Jahresbericht, som allt ännu utgifves af Stazione zoologica i Neapel, erbjöds honom att däri redigera referaten öfver Hemiptera, hvilket uppdrag han också fullgjorde i de tre första årgångarna, 1879—1881.

Hand i hand med Odo Reuters hittills berörda förmåga af intensivt arbete på den beskrifvande entomologins område utvecklades hos honom äfven en

annan därmed förknippad, nämligen den, att systematiskt sammangruppera former, till en början för att vinna en öfverblick af materialet. Man har uttalat att han, fastän intresserad af detaljundersökning, besatt „den sanne systematikerns instinktiva blick för frändskapsförhållandena i naturen“. Yttrandet är i viss mån befogadt, men kan gälla blott ett tidigare utvecklingsstadium; ty en sann och mognad systematiker arbetar målmedvetet, men icke instinktivt.

Det nämndes redan, att Reuters lyckliga förmåga att gruppera sina hemipterer berodde af naturliga anlag och förvärfvad stor sakkännedom. Likaså har framhållits, att skolning under vidsynt ledning hade i ett visst skede kunnat mäktigt påverka hans arbetes djup och riktning. Denna min tro beror af egen motsvarande upplefvelse.

Odo Reuter hade icke själf studerat jämförande anatomi — det slag af forskning, som är egnadt att mest åskådligt, så att säga handgripligt, införa en yngre arbetare i den utvecklingshistoriska tankeriktning, till hvilken han slutit sig. Men man behöfver härvid icke nödvändigtvis lägga hufvudvikten på ordet anatomi, åsyftande enbart den inre kroppsbyggnaden. Också det yttre kan, särdeles hos den mångestaltade insektgruppen, studeras under kritiskt afvägande af morfologiska synpunkter. Morfologin är grunden för förståelsen af morfogenesen och därmed äfven det oundgängliga första steget för utredningen af fylogenin, hvilken återgifver stamförvandtskapen, alltså systemet, när detta begrepp tages i djupare naturvetenskaplig mening.

Ingen kan begära, att en forskare, hvilken egnat sig åt utredning af arterna inom en specialgrupp så helt, som Reuter beträffande Hemiptera, nödvändigtvis själf borde ytterligare komplettera detta arbete med ett lika ingående studium af dessas anatomiska byggnad. Såsom bekant kräfver nämligen insekternas studium i yttre och i inre afseende rätt olika förstudier och teknik. Hufvudsaken är, såsom nyss sades, att forskningen bedrifves med morfologisk syn på ämnet.

För min del trodde jag en tid att Odo Reuter verkeligen åsyftade också dylikt studium, men jag förnam icke något objektivt eller reellt bevis härpå. Uppenbarligen låg orsaken däri, att det ständigt inströmmande materialet måste bearbetas och att detta arbete tog honom fullt i anspråk. Grunderna för hans uppfattning af hemipterernas systematiska gruppering voro väl honom själf tillräckligt åskådliga, att han kunde affatta diagnoser och ordna grupper. Men motiven behöfde ännu klarna, vidgas och samordnas, innan de kunde enhetligt framställas. Klarheten kom först senare, när han fann tid att rikta blicken enkom härpå. —

Hittills har jag, för att bibehålla kontinuiteten af Reuters utveckling som zoologisk forskare, lämnat å sido hans ställning till Universitetet, till hvilken vi nu böra återgå.

Det är självklart, att en ung forskare, som genom vaken intelligens, ovanlig produktion och mångsidiga intressen ådrog sig så stor uppmärksamhet som Odo Reuter, också väntades blifva ett mycket önskvärdt tillskott till lärarepersonalen vid vårt Universitet. Vorden filosofie-licentiat år 1876 blef han den 1 februari 1877 docent i zoologi: samma år invaldes han till ledamot i Finska Vetenskaps-Societeten.

Medan Reuter, på sätt redan skildrats, med utomordentlig energi var verksam som forskare på entomologins område, hyste han emellertid icke samma intresse för att genom universitetsundervisning bidraga till ungdomens förkofran i det zoologiska facket. Orsaken låg ingalunda i någon slags svårighet att föreläsa eller eljes undervisa. Tvärtom bekräfta många, som åhört honom, att han föredrog med synnerlig lätthet och förstod göra ämnet intressant. Till och med fullt improviserade verkade föredragen fängslande. De första docentåren gaf han emellertid alls ingen undervisning, sedermera med afbrott, dock på 1890-talet med större regelbundenhet. Det låg sålunda också öfver hans akademiska lärareverksamhet någonting oroligt.

Reuter synes i början hafva velat föreläsa helst öfver allmänna frågor och tillkännagaf bl. a. en serie lektioner öfver darwinismen, men denna påbörjades aldrig. Att emellertid behandlingen af dylika ämnen skulle blifvit liflig, torde man kunna sluta af hans föredrag åren 1882 och 1884 på Finska Vetenskaps-Societetens års- och högtidsdag, då han skildrade myrornas instinkt och de nyaste upptäckterna inom insekternas utvecklingshistoria. Senare föreläste han dels om vissa insektgrupper, dels om parasitmaskarna och äfven om Finlands fiskar.

Odo Reuter föreslogs år 1880 till e. o. professor, på samma gång som andra äldre, och han blef utnämnd den 11 maj 1882. Året därpå blef ordinarie professuren i zoologi ledig genom innehafvarens frånfälle, och tvenne sökande anmälde sig. Enligt då gällande statuter fordrades af båda ett särskildt specimen för tjänsten. Vid denna tid (1884) offentliggjorde Odo Reuter också ett stort antal mindre skrifter men till mycken öfverraskning intet specimen; han kunde således icke komma i fråga.

Äfven sedermera tog han föga del i den akademiska undervisningen. Läseåret 1884—1885 åtnjöt han tjänstledighet för fullbordande af vetenskapliga arbeten och 1886—1887 för sjukdom. Längre fram, då ohelsan allt fram-

skred, förblef han dock i stånd att utföra forskningsarbete och ansågs därför med fullt skäl kunna gagna Universitetet mera genom att fullborda egna undersökningar än genom att hålla ett antal kollegier. Hans ställning var sålunda under ganska lång tid en fri akademikers, enär han, bosatt dels på Ispois nära Åbo, dels i Pargas, åtnjöt ledighet från hösten 1906 ända till den 24 december 1910, då honom, numera blind, beviljades afsked som professor emeritus. Dessförinnan hade han om vintrarna varit bosatt i Helsingfors.

Hans från lärareplikter lediga tid förflöt dock icke under sysslolöshet. Tidigare hade Reuter städse användt sommarferierna antingen för undersökningar i naturen uti hemtrakten eller ock för bearbetning af samlingar och för sin författarverksamhet. När numera sjukdom, yttrande sig i form af nedsatt rörelseförmåga och tilltagande nervsmärtor, hindrade verksamheten ute i naturen, fortsattes det litterära arbetet både vinter och sommar. Mest öfverraskande och därjämte synnerligen nyttig var den kraftansträngning, hvarmed Reuter, under samarbete med A. Luther och en hel mängd biträdande finska zoologer, bragte till stånd Bibliotheca zoologica Fenniae, hvars förra hälft framlades för nordiska naturforskaremötet år 1902 i Helsingfors; senare hälften blef tryckt först 1909.

Det var från och med detta arbete jag med undran blef personligt vittne till den ännu blott till en del kroppsligt brutne kamratens utomordentliga arbetsförmåga, hans afundsvärda minne och nu visade viljestyrka. Och det förefaller, som hade uti hans entomologiska författarverksamhet, i bredd med förut framträdande karaktärsdrag, under nu tilltagande kroppsligt obestånd utvecklats nya drag, som tidigare spelat blott en underordnad roll: i hans forskning fick syntetiskt förfarande nu större utrymme.

I det föregående anfördes redan, att Reuter år 1875 meddelat iakttagelser huru variationer i färgteckning hos olika arter Hemiptera kunde förråda deras släktskap. Härom föredrog han ytterligare år 1902 vid naturforskaremötet i Helsingfors, och han skildrade 1905 i tryck hurusom hos en del hemiptergrupper en bestämd lagbundenhet visar sig i afseende å färgteckningens förändringar från art till art: på ursprungligen ljusa kroppsdelar uppstå mörka fläckar, som efter hand bli större, olika gestaltade och olika fördelade samt omsider sammanflyta. Färgförändringen slutar med helsvart, melanism, men slutresultatet kommer till stånd längs flere olika, af hvarandra oberoende serier af mellanformer. Företeelsen är analog med dylika, som observerats inom vidt skilda djurgrupper, och den måste med all säkerhet hafva betydelse för utre-

dandet af ej blott arternas utan jämväl gruppernas inbördes frändskap, deras systematik.

Redan nog mycket beroende af svårigheten att röra sig möttes Reuter af ännu en pröfning — väl den mest störande för en naturforskare. Synförmågan inskränktes under åren 1906—09 småningom till en allt mindre sektor af synfältet, och patienten måste nu starkt begränsa sitt dagliga arbete, för att om möjligt hejda fortskridandet af det onda. Hvila befanns dock medföra ingen annan nytta, än den att någorlunda upprätthålla allmänbefinnandet. Efter direkt förfrågan erför han omsider, att synen icke mera stod att rädda. Nu var programmet klart. Nu fortsattes arbetet utan betänkligheter så långt krafterna medgåfvo. Remisser granskades för att återsändas, och halffärdiga manuskript förfullständigades för att offentliggöras. I den mån de blefvo färdiga anmälde han dem vid Finska Vetenskaps-Societetens möten, i hvilka han deltog ej blott som halfblind, utan ännu år 1910 när synorganen ej mera reagerade ens för de skarpaste ljusstrålar. Senast besökte han våren 1912 Societas pro Fauna et Flora fennica möten och framlade önskningsmål angående sommarens exkursioner.

Under sin skymningsperiod afslutade Reuter sålunda åtskilliga arbeten af deskriptiv art. Detta möjliggjordes delvis genom hans fenomenala minne, delvis också med välvillig hjälp af en yngre vän, dr Bertel Poppius, hvilken tjänstgjorde såsom öga, då det gällde att förfullständiga beskrifningar eller att gemensamt afgöra någonting tvifvelaktigt. Monografin öfver *Nabidae* (1909) och en del andra arbeten utgåfvos därför af båda gemensamt, och Reuter kunde glädjas öfver att medhjälparen snabbt kom in i ämnet. Arbetet underlättades så mycket mer, som i Reuters samlingar funnos ej mindre än 2,300 arter palearktiska Hemiptera Heteroptera, däribland typexemplar till 440 arter, beskrifna dels af honom själf dels af samtidens mest framstående fackmän. Sina arbeten dikterade den blinde för en handsekreterare, som jämväl föreläste nödig nyare litteratur och i öfrigt gick honom till handa.

Äfven helt andra zoologiska skrifter, än de nu nämnda, författade Odo Reuter under de år, då synen höll på att inskränkas.

Ehuru så talrika remisser under tidernas lopp gått genom hans händer, var den för många naturalhistoriker så karakteristiska samlingsmanin honom främmande. För honom såsom forskare voro samlingarna medel, icke mål. Men gärna och med största ifver och sakkunskap samlade han ur litteraturen alla tillgängliga uppgifter om forskningsfrågor som särskildt intresserade honom. Och dessa voro endels rätt omfattande.

En sådan gällde de Hemiptera, som delvis eller helt och hållet lefva på barrträd. Från 1684 källskrifter har han (1909) sammanställt uppgifter om 304 sådana arter, af totalantalet 4630 inom palearktiska regionen förekommande Hemiptera. Genom diskussion af detta material gör han det antagligt, att arter, som ursprungligen lefvat på löfträd eller örter, vant sig att till vintern flytta öfver till barrträd, här gjort sig allt mera hemmastadda på en eller flera arter, och slutligen utbildat ekologiska raser med egna kännetecken. Näringsinstinktens plasticitet har här verkat som en betydelsefull utvecklingsfaktor.

Sina arbeten på systematikens område, också monografierna, hade Odo Reuter, såsom ofvan redan antyddes, affattat så godt som utan att framlägga någon diskussion af motiven för sin gruppering: kännetecknen i diagnoserna fingo tala för sig själfva. I ungdomsarbetet af år 1875 diskuterade han visserligen föregångarnes system (Fieber, Thomson), men blott i någon mån sitt eget, och likaledes då han år 1883 modifierade detta.

Märkligt nog förefaller det som skulle först ett delvis mot honom riktadt utfall hafva verkat utmanande. En produktiv engelsk entomolog, Mr W. L. Distant, förmenade år 1904 Capsidernas systematik utgöra ett temligen „artificial or cabinet arrangement“, som mera var grundadt på personliga tycken än ett uttryck af „an evolutionary or philosophical conception“. I sitt polemiska svar, Hemipterologische Speculationen, I (1905), utlade Reuter sin ståndpunkt. Med liflig känsla för skillnaden mellan ett artificiellt system, med dess praktiskt nyttiga nycklar, och ett naturligt system, som däremot vill åskådliggöra formernas inbördes förvantskap, bemöter han inkasten samt gör medels ett stamträd reda för capsidernas klassifikation. Ännu senare, år 1910, skildrade han, numera fullt blind, ämnet på ett mera ingående och afvägande sätt i sin skrift: Neue Beiträge zur Phylogenie und Systematik der Miriden, hvilken åtföljdes af uttalanden öfver samtliga heteropterfamiljers fylogeni. Han diskuterade däri de olika kroppsdelarnas användbarhet för afgörandet af hithörande frågor, och framhöll hvilka egenheter han ansåg vara primära, konservativa och förty också mest vittnesgilla i afseende å härstamningen, och hvilka åter borde anses vara sekundärt förvärfvade, exempelvis på grund af inom olika grupper uppkommen anpassning till likartade lefnadsvillkor (konvergens). Stor vikt lade han särskildt på punktögonen och på fötternas klodynor. Tre andra specialisters system jämförde han inbördes och med sitt eget i dess nu framställda nya form.

Detta hans system vann inom kort anslutning af de förnämsta hemipterologerna, bl. a. Horváth i Ungarn och Oshanin i S:t Petersburg; redan 1912

kunde han, i anledning af skriftliga meddelanden, i en särskild mindre publikation ytterligare angifva några förbättringar.

Då jag, under medverkan vid tryckningen af Reuters arbete om Miridernas fylogeni och systematik, åtskilliga gånger blef varse med hvilket lifligt intresse han för mig afvägde de morfologiska skälen för och mot vissa släktens frändskap — mången gang helt förglömmande att jag ju icke alls var kännare af dessa släkten —, tror jag det icke vara olämpligt att här anföra minnen från ett par för honom som författare karakteristiska tillfällen.

Hans uti skriften i fråga lämnade reproduktion af Osborns, Kirkaldys och Handlirsch's grafiskt återgifna system gåfvo mig anledning uppmana honom att här afbilda äfven sitt eget. Mitt anbud att därvid medverka emottogs af den blinde kamraten, hvarefter under upprepade besök hos honom ett utkast småningom bragtes till stand. Detta öfverfördes omsider, förstoradt, på en stor pappskifva, å hvilken det utfördes i upphöjd blindskrift. Efter det Reuter tagit noggrann kännedom af bilden och anvisat några mindre ändringar, reducerades denna åter till lämplig storlek, hvarefter den trycktes — sannolikt det enda fylogenetiska stamträd som en fullständigt blind forskare alstrat.

Jag glömmer ej lätt hvilken vacker, vaken och genomglad blick den blinde hade, då han, halfliggande i sjuksängen, med på pappskifvan trefvande fingrar långsamt läste sina egna tankar, som han småningom kombinerat under årslånga undersökningar och hvaraf pappbilden nu återgaf en symbol. Ej heller skall förgätas huru hans skämtsamma yttranden bragte oss båda, och sedermera äfven de i rummet inkommande egna till rätt hörbar glädjeyttring — en glad, men tillika tragisk situation med skarpa kontraster.

Sitt öde bar Reuter med största resignation, och han uttalade sig häröfver med stort sinneslugn när Societas pro Fauna et Flora fennica på hans 60-års dag hembar honom sin hyllning genom att tillegna honom 33:dje bandet af dess Acta. Vid den blinde kamratens kanske sista besök hemma hos mig uttalade jag min fägnad öfver att zoologins teoretiska frågor nu lämnade honom en lika angenäm som nyttig sysselsättning för hans tankar. Instämmande häri berättade han sig hafva själf undrat öfver att dylika frågor numera trängt sig på honom. Och han tillade ifrigt, att hans broder, zoologen, härtill yttrat: „ja, ser du, när du nu blifvit blind, har du fått ögonen upp!“ och berättande detta skrattade den blinde själf riktigt hjärtligt.

Märkligast af de skrifter Odo Reuter under fullständig blindhet dikterat till publicering, voro två, som tillika voro vidast anlagda, nämligen den nyss nämnda om Miridernas systematik (1910), hvilken var riktad närmast till fack-

kollegerna, och hans sista större arbete, som dessutom, och framför allt, var affattadt för en större läsarekrets.

Egna och andras iakttagelser rörande insekternas ekologiska förhållanden hade redan tidigt lockat Reuter in på området för djurens sinnesorgan och själslif. Härom offenliggjorde han åren 1882—1888 några populära skrifter, och ytterligare andra under åren 1901, 1904 och 1907. Alla äro nedskrifna med lätt löpande penna, och stödja sig företrädesvis på andra forskare, Fabre, Wasmann m. fl., samt hafva på sin tid kastat en viss belysning öfver djurens själslif. Under senare tid ha många entomologer fackmässigt studerat särskildt de högst begåfvade insekterna, de socialt lefvande, så att en hel litteratur uppstått om dessas lefnadsvanor. Några författare ha därvid behandlat sin specialgrupps vanor i samma utvecklingshistoriska följd som kroppsbyggnadens morfologi tidigare af dem studerats.

Odo Reuters insikter och skriftställaretalang gjorde honom till rätte mannen att enligt liknande metod sammanställa „lefnadsvanorna och instinkterna“ hos insekterna öfver hufvud (1913). Ur en ofantligt omfattande litteratur, uppräknad på ej mindre än 64 trycksidor, och ur hvilken åtminstone den nyaste blifvit honom allenast föreläst, har han sammanställt en mängd med omsorg valda representativa iakttagelser öfver de mest olika grupper och från alla länder. Materialet har ordnats under olika biologiska synpunkter: näring, skyddsanordningar, metamorfos, parning och omvårdnad af affödan, bobyggnad, insamlande af förråd, snyltande och sammanslutning af icke samhälleliga arter. Därvid utgår Reuter städse från dessa företeelsers gestaltning i deras enklaste form hos solitärt lefvande insekter, och fortskrider stegvis ända „intill gryningen“ af de socialt lefvandes motsvarande instinkter. Med stor urskillning har författaren valt talande exempel från den rika litteraturen. På ett väckande sätt framställas dessa, och författaren öfverlämnar helst åt läsaren att med eftertanke själf draga konsekvenserna. Utvecklingsidén vinner ju sitt bästa rotfäste när den självmant gör sig gällande, nämligen hos de läsare, hvilka känna sig mottagliga därför.

Förarbeten voro allaredan utförda till fortsättningen af detta arbete, hvars andra del, i anslutning till den förra, skulle innehålla en sammanställning af iakttagelser öfver de underbara vanorna hos de socialt lefvande insekterna: myror, termiter, getingar, humlor och bin. Hos dessa lefver moderdjuret länge nog för att omgifvas af sin egen verksamma afkomma, hvilken ofta är uppdelad i kaster med inbördes olika uppgifter och lefnadsvanor. Denna andra del hade säkerligen blifvit affattad lika lyckligt som den första, ifall författa-

ren fått lefva. För honom hägrade ännu en tredje, afslutande del om insekternas sinnes- och själslif öfver hufvud.

Med den utgifna delen skall den blinde författaren säkert äfven framgent öppna ögonen för rätt många intresserade — och detta var hans önskan. De unga som i rättan tid få blicken öppnad för sammanhanget i det hela, de skola få föra forskningen i ämnet vidare.

Genast efter arbetets utkommande upptog den blinde författaren, som önskade någon omvexling i sin sysselsättning, en ny på samma gång speciell och omfattande fråga, också den sträckande sina rötter långt tillbaka.

Wallaces kända uppslag af år 1870 om skyddande likhet (mimicry) bland djuren gaf anledning till talrika iakttagelser särskildt beträffande insekternas formrika grupper. Jämförelsevis få fall voro kända från Hemiptera, då Reuter år 1874 framhöll ett par arter, som likna myror och lefva med dem. År 1879 offentliggjorde han en förtjänstfull öfversigt af andras och talrika egna iakttagelser öfver mimetiska hemiptera och deras lefnadshistoria, tillika sammanförande dessa fall i biologiska grupper. Af dessa förefalla de myrliknande formerna måhända vara mest intressanta.

Som mångårig specialist kände Reuter sig synnerligen anslagen af dessa myrmico-mimetiska hemipterformer, af hvilka han numera kände omkring ett hundra, däribland många ännu obeskrifna arter. Detta material ville han behandla enhetligt i ord och bild, och härtill skulle sommaren 1913 användas.

I juni fann Reuters närmaste finske fackkollega, dr Evald Bergroth, honom vara „kroppsligen nedbruten och medveten af att hans dagar voro räknade. Men icke desto mindre höll han hela sommaren rastlöst på med sitt omfattande arbete, till hvilket han erhållit material från alla samtidens myr-forskare.“ Det var midt under denna verksamhet som Odo Reuter ådrog sig en influensaartad sjukdom, hvilken snart åtföljdes af lunginflammation.

Väl blef han åter i ringa mån bättre och gladdes redan åt att få återupptaga sin verksamhet. Men ett omslag inträffade, och den 2 september afbröts hans arbete för alltid. Kan också hans sista verk möjligen afslutas af annan hand, så afklipptes nu hvarje möjlighet att fullborda mången plan, som den rastlöse forskaren, sin blindhet till trots, ännu hade önskat förverkliga.

Bilden af Odo Reuters lifsgerning har kunnat tecknas här allenast ofullständigt. Den ådagalägger emellertid, att vi med honom förlorat en högt begåfvad, mångsidig personlighet med starkt receptiv läggning och framstående forskareförmåga. På sitt specialområde uppdrog han många och djupa plogfåror och blef här en af samtidens främste. Han har därjämte hos oss befordrat forskningen om den inhemska faunan genom att upptaga flere nyodlingar, hvilka nu vårdas af efterföljare. Väckande har han också verkat genom arbeten på biologins och djurpsykologins fält. Slutligen har han hos oss i vida kretsar spridt kännedom af resultaten af nutida naturalhistorisk forskning.

Professor O. M. Reuters zoologiska publikationer.

Skrifterna från åren
1870—1900 (n:ris 1—378) äro aftryckta från Reuters skrift n:o 477, } med nödiga tillägg
1901—1907 (n:ris 379—445) „ „ „ „ n:o 446. } och rättelser;
1907—1913 (n:ris 446—513) äro sammanställda för denna minnesskrift.
Förkortningarna förklaras sid. 43.

1870. *1. Pargas sockens Heteroptera. — NFFlF. XI, 1871, p. 309—326, 3 f. (Sep. 1870). — — *Hem.*
Solsky, S.: Horae Soc. Ent. ross. VIII, 1871, rev. bibl. ii.

1871. 2. Öfversigt af Sveriges Berytider. — ÖVAF. XXVII, (1870) 1871, 597—603 (Sep. 1871). — *Hem.*

*3. Skandinaviens och Finlands Acanthiider, beskrifne. — ÖVAF. XXVII, 1871, 403—429. — *Hem.*
Arch. Naturgesch. XXXIX, 2, 1873, 405.

*4. Acanthiidae americanae, descriptae. — ÖVAF. XXVIII, 557—568, t. VII. — *Hem.*
Arch. Naturg. XXXIX, 2, 1873, 405,

1872. *5. Skandinaviens och Finlands Aradider, beskrifne. — ÖVAF. XXIX (1872) 1873, N:o 5, 47—62. — *Hem.*

1873. *6. Skandinaviens och Finlands Reduviider, beskrifne. — ÖVAF. XXIX, N:o 6, 59—66. — *Hem.*

*7. Skandinaviens och Finlands Nabider, beskrifne. — ÖVAF. XXIX, N:o 7, 67—77. —*Hem.*

8. Nabidae novae et minus cognitae. Bidrag till Nabidernas kännedom. — ÖVAF. XXIX, 79—96, t. VIII. — *Hem.*

1874. *9. [Europeiska Acanthiae]. — NFFlF. XIII (Ny Ser. X), 1874, 454—455. — *Hem.*

*10. [Metatropis rufescens och dess näringsplanta]. — NFFlF. XIII, 1874, 455. — *Hem.*

*11. [Xiphidium dorsale och Chrysochraon dispar från Pargas]. — NFFlF. XIII, 1874, 458. — *Orth.*

*12. [Colias edusa anträffad i Finland]. — NFFlF. XIII, 1874, 480. — *Lep.*

13. Nya Svenska Capsider, antecknade. — ÖVAF. XXXI, 1874, 45—49. (Sep. 1874). — *Hem.*

*14. Ameisen-Aehnlichkeit unter den Hemipteren. — Mittheil. Schweiz. Ent. Ges. IV, 1874, 156—159. (Sep. 1—4). — *Hem.*
Douglas, J. W.: Ent. Monthl. Mag. XI, 1874, 138. — Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLI, 2, 1875, 189.

*15. Die Stridulations-Methode des Coranus subapterus De Geer (Colliocoris pedestris Wolff, Fieb.). — Mitth. Schw. Ent. Ges. IV, 159—160. (Sep. 2 p.) — *Hem.; biol., an.*
Douglas, J. W.: Ent. Monthl. Mag. XI, 1874, 139.

*16. Remarques synonymiques sur quelques Hétéroptères. — Ann. Soc. Ent. Fr. (5), IV, 1874, 559—566. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLI, 2, 1875, 306.

1875. *17. Revisio critica Capsinarum praecipue Scandinaviae et Fenniae. — Försök till de europäiska Capsinernas naturenliga uppställning jämte kritisk öfversigt af de Skandinavisk-finska arterna. Akad. afhandl. H:fors 1875, 8:o, 101 + 190 p. — *Hem.; syst., an., biol. geogr., topogr.*
Hemiptera Gymnocerata Scandinaviae et Fenniae disposuit et descripsit. Pars I Cimicidae (Capsina). — AFFlF. I, 1875, 206 p., 1 t. (Sep. 1875). — *Hem.*

*18. Bidrag till Nordiska Capsiders Synonymi. — NFFlF. XIV (Ny Ser. XI), 1875, 1—25. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 373—374.

*19. Anteckningar om Rana arvalis Nilss. — NFFlF. XIV, 321—325. — *Ampli.*

*20. En ny Hæmonia-art. — NFFlF. XIV, 326—327. — *Col.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLII, 1876, 449.

*21. Heteropterorum novorum species aliquot descripsit. — NFFlF. XIV, 328—333. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 371, 374, 380, 381.

*22. Bidrag till Ålands och Åbo skärgårds Heteropterfauna. — NFFlF. XIV, 334—344. — *Hem.*

*23. Genera Cimicidarum Europae. — Bih. KVAH. III, 1875, N:o 1, 66 p. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 372—373.

*24. Bidag till kännedom om några Hemipterers Dimorfism. — ÖVAF. XXXIII, 1875, 49—58. (Sep. 1875.) — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 358—359.

25. Hemiptera Heteroptera Austriaca, mm. Maji—Augusti 1870 a J. A. Palmén collecta enumeravit. — Verh. zool. bot. Ges. Wien XXV, 1876, 83—88. (Sep. 1875.) — *Hem.*
Zeitschr. ges. Naturw. XLVIII, 1876, 49. — Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 2, 177, 375.

26. Remarques sur le Polymorphisme des Hémiptères. — Ann. Soc. Ent. Fr. (5), V. 1875, 225—236. — *Hem.; an.*

27. Sur la nomenclature entomologique. — Pet. Nouv. Ent. 1875, N:o 125, 501. — *Nomencl.*

28. Notes synonymiques sur quelques Hémiptères. — Pet. nouv. Ent., N:o 132, 527. — *Hem.*

29. Nouvelles espèces de Capsines. — Pet. Nouv. Ent., N:o 135, 539—540. — *Hem.*

30. Rectification. — Pet. Nouv. Ent., N:o 135, 540. — *Hem.*

31. Hémiptères nouveaux. — Pet. Nouv. Ent., N:o 136, 544—545. — *Hem.*

32. Remarques sur le Catalogue des Hémiptères d'Europe et du bassin de la Méditerranée par le Dr A. Puton. — Pet. Nouv. Ent. 1875, N:o 137, 547. — *Hem.*

1876. *33. Catalogus Psyllodearum in Fennia hactenus lectarum. — MFFlF. I, 1876, 69—77. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 389—390.

*34. Catalogus praecursorius Poduridarum Fenniae. — MFFlF. I, 78—86. — *Apter.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 250.

*35. [Cerandria cornuta från Finland]. — MFFlF. I, 121. — *Col.*

*36. [Om möjlig viviparitet hos Chrysomelider]. — MFFlF. I, 124—125. — *Col.*

*37. Notiser om två finska fiskarter. — MFFlF. I, 129—130. — *Pisc.*

*38. För finska faunan nya Coleoptera ur den Pippingsköldska samlingen. — MFFlF. I, 130—131. — *Col.*

*39. Sällsynta Orthoptera från Åbo-trakten. — MFFlF. I, 131—132. — *Orth.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 266.

40. Om stridulationsförmågan hos lepidoptera. — MFFlF. I, 133—134. — *Lep.; an.*
Bertkau, Ph.: Naturg. XLIII, 2, 1877, 292.

*41. Maskerade Hemipterer. — MFFlF. I, 136—137. — *Hem.; biol.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 372.

*42. Nya finska Hemiptera Heteroptera. MFFlF. I, 137—138. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg, XLIII, 2, 1877, 358.

*43. Nereis (Hediste) diversicolor (Müll.) Malmgr. från Åbo skärgård. — MFFlF. I, 138—139. — *Ann.*

44. Capsinae ex America boreali in Museo Holmiensi asservatae, descriptae. — ÖVAF. XXXII (1875), 1876, 59—92. (Sep. 1876.) — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIII, 2, 1877, 373.

45. Stridulationsfähighet der Falter. — Kraatz' Entomol. Monatsbl. 1876, 53—54.
On sounds produced by Lepidoptera. — Ent. Monthl. Mag. XIII, 1877, 229—230. — *Lep.; an.*

46. [Diagnoses des espèces nouvelles dans] Lethierry et Puton: Faunule des Hémiptères de Biskra. — Ann. Soc. Ent. France (5) IV, 1876, 13—55 (35—36!). — *Hem.*

47. Diagnose d'une espèce nouvelle d'Hémiptères de la famille des Capsines. — Pet. Nouv. Ent. II, 1876, N:o 140, 5. — *Hem.*

48. Diagnoses praecursoriae. — Pet. Nouv. Ent. II, N:o 21—22. — *Hem.*

49. Sur le Capsus 4-guttatus Kirschb. — Pet. Nouv. Ent. II, N:o 145, 26. — *Hem.*

50. Diagnoses praecursoriae Hemipterorum Heteropterorum. — Pet. Nouv., N:o 152, 54—55. — *Hem.*

51. British Hemiptera Heteroptera — additional species. — Ent. Monthl. Mag. XIII 1876, 85—86. — *Hem.*

52. Note on a variety of Megaloceraea (Trigonotylus) ruficornis Fall. — Ent. Monthl. Mag. XIII, 87. — *Hem.*

53. Note on Agalliastes Wilkinsoni, Dougl. & Scott. — Ent. Monthl. Mag. XIII, 87. — *Hem.*

53 a. Diagnosis of a new species of Psallus (Ps. Wollastonii). — Ent. Monthl. Mag. XIII, 154. — *Hem.*

1877. 54. in Mäklin: Diagnoser öfver några nya sibiriska insektarter. — ÖFVS. XIX, 1876—1877, 15—32 (31—32!). (Sep. 1876.) — *Hem.*

55. Djurens lif af A. L. Brehm. — FT. I, 1876. 211—213. — *Ref.*

56. Från Shetland och Orkney. — FT. III, 1877, 112—120, 250—262, V, 1878, 126 — 136. — *Zool. gen.; pop.*

57. Upsala universitets Jubelfest. Nova acta Societatis Scientiarum Upsaliensis: Zoologi. — FT. III, 1877, 281—282. — *Ref.; hist.*

58. Fauna öfver Sveriges ryggradsdjur, af C. R. Sundström. — FT. III, 1877, 209—212. — *Ref.; vertebrata.*

59. Neue Phytocorarien diagnostisch beschrieben. — Deutsche Ent. Zeitschr. XXI, 1877, 25—32. — *Hem.*

*60. Species europaeae generis Phytocoris Fall., auct. — Ann. Soc. Ent. Fr. (5), VII, 1877, 13—34, 1 t. — *Hem.*

61. Diagnoses praecursoriae Hemipterorum Heteropterorum. — Pet. Nouv. Ent. II, 1877, N:o 184, 181. — *Hem.*

62. Remarks on some British Hemiptera Heteroptera. — Ent. Monthl. Mag. XIV, 1877, 11—14; 32—34; 60—62; 127—131; 1878, 245; XV, 1878, 66—67; XVI, 1879, 12—15; 1880, 172—175; XVII, 1880, 10—15. — *Hem.*
Arch. Naturg. XLVII, 2, 1881, 104.

63. British Hemiptera-Heteroptera — additional Species. — Ent. Monthl. Mag. XIV, 1877, 76—78. — *Hem.*

1878. *64. Hemiptera Gymnocerata Europae. Hémiptères Gymnocérates d'Europe, du bassin de la Méditerranée et de l'Asie russe. I. — ASSF. XIII, 1885, 1—188, 8 t. (Sep. 1878). — *Hem.*
Douglas, J. W.: Ent. Monthl. Mag. XV, 1878, 19—20. — Signoret, V.: Bull. Soc. Ent. Fr. (5), VIII, 1879, cl—cli. — Puton, A.: Pet. Nouv. Ent. II, 1878, N:o 197, 235—236. Katter, F.: Ent. Nachr. IV, 1878, 136—137.

*65. Actinocoris, novum Hemipterorum genus e Fennia australi. — MFFlF. II, 1878, 194—197. — *Hem.*
Bergroth, E.: Ent. Nachr. IV, 1878, 167.

*66. [Sitones lineatus härjande i Åbo-trakten]. — MFFlF. III, 1878, 172. — *Col.*

*67. [Varietät af Libellula quadrimaculata från Ispois]. — MFFlF. III, 193. — *Odon.*

68. Joly: Instinkten, dess förhållanden till lifvet och förståndet. — FT. IV, 1878, 146—150. — *Ref.; psych.*

69. C. R. Sundström, Atlas öfver Naturriket. — FT. IV, 463—464. — *Ref.; zool. gen.*

70. Carl Stål. — FT. 1878, V, 160—162. — *Biogr.*

71. Note sur une nouvelle espèce d'Hémiptère. — Ann. Soc. Ent. Fr. (5) VIII, 1878, 144. — *Hem.*

72. Déscription d'un hémiptère de la Grèce (Camelocapsus oxycarenoides nov. gen. et sp.). — Bull. Soc. Ent. Fr. (5) VIII, 1878, civ—cv. — *Hem.*

73. Captures of Hemiptera-Heteroptera in Scotland. — Ent. Monthl. Mag. XIV, 1878, 186—187. — *Hem.*

*74. Note on Trioza aegopodii. — Ent. Monthl. Mag. XIV, 277. — *Hem.*

75. Obituary. Carl Stål. — Ent. Monthl. Mag. XV, 1878, 94—96. — *Biogr.*

1879. *76. Hemiptera Gymnocerata Europae. Hémiptères Gymnocérates d'Europe, du bassin de la Méditerranée et de l'Asie russe. II. — ASSF. 1885, 193—312, 5 t. (Sep. 1879). — *Hem.*
Ent. Monthl. Mag. XVI, 1880, 214. — Katter, F.: Ent. Nachr. IV, 1880, Lit. Rev. II.

77. Diagnoses Hemipterorum novorum. — ÖFVS. XXI, 1879, 30—41 (Sep. 1879, 12 p.). — *Hem.*
Katter, F.: Ent. Nachr. V, 1879, 122.

78. De Hemipteris e Sibiria orientali nonnullis adnotationes criticae. — ÖFVS. XXI, 42—63. (Sep. 1879, 13—34). — *Hem.*
Katter, F.: Ent. Nachr. V, 1879, 122.

79. Is „Cyllocoris flavonotatus" Boh. a Globiceps or a Cyllocoris? — Ent. Monthl. Mag. XV, 1878—79, 113—115. — *Hem.*

*80. Till en djurgeografisk fråga, ett litet bidrag. — ÖFVS. XXI, 64—82 (Sep. 1879, 35—53). — *Hem.; geogr.*
Zool. Jahresb. f. 1879, 1, 488.

*81. Till kännedomen om mimiska Hemiptera och deras lefnadshistoria. — ÖFVS. XXI, 141—198. (Sep. 1879, 58 p.). — *Hem.; biol.*
Bergroth, E.: Ent. Nachr. VI, 1879, Lit. Rev. 1. — Zool. Jahresb. f. 1879, 1, 493—494.

82. Capsidae Turkestanae. Diagnoser öfver nya Capsider från Turkestan. — ÖFVS. XXI, 199—206. (Sep. 1879, 59—66). — *Hem.*
Bergroth, E.: Ent. Nachr. IV, 1880, Lit. Rev. 1. — Zool. Jahresb. f. 1879, 1, 507.

*83. Diagnoser öfver nya Thysanoptera från Finland. — ÖFVS. XXI, 207—223. (Sep. 1879. 17 p.). — *Thys.*

Bergroth, E.: Ent. Nachr. VI, 1880, Lit. Rev. 1. — Zool. Jahresb. f. 1879, 1, 559 560. — Arch. Naturg. XLVI, 2, 1880, 386.

84. Rebau: Naturhistoria. — FT. VI, 1879, 256—259. — *Ref.; zool. gen.*

85. Några blad ur naturens bok. Djurens maskering, särskildt med hänsyn till nordens fauna. — FT. VI, 1879, 381—398, 463—475, VII, 1879, 32—49. (Sep. 1879, 46 p.) — *Biol.; pop.*

86. Note on Gerris thoracica. — Ent. Monthl. Mag. XVI, 1879, 67—68. — *Hem.*

87. Renseignements géographiques sur quelques espèces d'Hémiptères. — Bull. Soc. Ent. Fr. 1879, xli—xliii. — *Hem.*

88. Reuter, Lina et Odo Morannal: Collembola and Thysanura found in Scotland in the Summer of 1876. — Scott. Naturalist V, 1879, 204—208. — *Apter.*

Zool. Jahresb. f. 1879, 1, 560. — Arch. Naturg. xivii, 2, 1880, 534.

1880. *89. Etudes sur les Collemboles I—III. — ASSF. XIII, 1883, 1—21. (Sep. 1880.) — *Apter.; biol.*

Bergroth, E.: Ent. Nachr. VI, 1880, Lit. Rev. 75—76. — Zool. Jahresb. f. 1880, 2, 186—187. — Arch. Naturg. XLVII, 2, 1881, 75.

90. Diagnoses Hemipterorum novorum. II. — ÖFVS. XXII, 1880, 9—24. (Sep. 1880). — *Hem.*

*91. Anteckningar om Coriscus lineatus Dahlb. — ÖFVS. XXII, 25—32. (Sep. 1880). — *Hem.*

Zool. Jahresb. f. 1880, 2, 145—146.

*92. Thysanoptera Fennica. I. Tubulifera. — BFVS. 40; 1885, 1—26. (Sep. 1880). — *Thys.*

Bergroth, E.: Ent. Nachr. VI, 1880, Lit. Rev. 71. — Arch. Naturg. XLVIII, 2, 1882, 137. — Bertkau, Ph.: Ibid. LII, 2, 1886, 126.

*93. Nya bidrag till Åbo och Ålands skärgårds Hemipterfauna. — MFFlF. V, 1880, 160—236. Rättelser VII, 1881, 190—191. — *Hem.*

Douglas, J. W.: Ent. Monthl. Mag. (2) XVIII, 1881, 41—42. — Bergroth, E.: Ent. Nachr. VI, 1880, Lit. Rev. 71. — Zool. Jahresb. f. 1880, 2, 126.

*94. Wilhelm Bergsöe: Fra Mark og skov. — FT. VIII, 1880, 57—61. *Ref.; ins.*

95. in Mäklin: Coleoptera insamlade under den Nordenskiöldska expeditionen 1875 på några öar vid Norges nordvestkust, på Novaja Semlja och på Waigatsch samt vid Jenissej i Sibirien. — KVAH. XVIII, 1880, N:o 4. — *Hem.* (14, 31, 47!).

*96. Finlands och den Skandinaviska halföns Hemiptera Heteroptera. — Ent. Tidskr. I, 1880, 113—145; II, 1881, 61—93; III, 1882, 65—81, 105—121, 163—172; V, 1884, 173—185. (Sep. 1882, 106 p.). — *Hem.*

Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 231; II, 1883, 124—125; IV, 1885, 91. — Zool. Jahresb. f. 1881, 2, 257, 259.

*97. Sur l'accouplement chez deux espèces de l'Ordre des Collemboles. — Ent. Tidskr. I, 1880, 159—161, 1 f. (Vide N:o 180). — *Apter.; biol.*

98. Sur la fonction du tube ventral des Collemboles. — Ent. Tidskr. I, 162—163. (Vide N:o 181). — *Apter.; biol.*

99. Sur l'hybridisation chez les Insectes. — Ent. Tidskr. I, 174—177. (Vide N:o 107, 182). — *Biol.; hym., lep., col., orth., odon., hem.*

100. Till Gastrodes abietis' (Linn.) lefnadshistoria. — Ent. Tidskr. I, 185—188. Résumé 213. — *Hem ; biol.*

101. [Bidrag till Stockholms-traktens insektfauna]. — Ent. Tidskr. I, 198—200, 215—216. — *Hem.*

102. Från Dalarö i september [1880]. — Ent. Tidskr. I, 201—208, 216—217. — *Hem.*

*103. Hemiptera in: Zoologischer Jahresbericht für 1879. Herausgegeben von der Zoologischen Station zu Neapel, I, 1880, 488—543. — *Ref.; hem.*

104. On a new thysanopterous insect of the genus Phloeothrips found in Scotland, I, 1880. — Scott. Natural., V, 310—311. — *Thys.*

105. [Diagnoses des espèces nouvelles dans] C. Chicote: Adiciones à la Enumeracion de los Hemipteros observados en España y Portugal. — Anal. Soc. Esp. Hist. Nat. IX, 1880, 193—196. — *Hem.*

1881. 106. Ad cognitionem Reduviidarum mundi antiqui. — ASSF. XII, 1883, 269—339 (Sep. 1881, 71 p.). — *Hem.*

Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 22—23. — Bull. Soc. Ent. Ital. XIV, 1882, 260. — Zool. Jahresb. f. 1881, 2, 277. — Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. 2, 2, 101.

*107. Om anomala kopulationsförhållanden hos insekterna och i sammanhang dermed stående frågor. — ÖFVS. XXIII, 1880—1881, 1—30. (Sep. 1881). — *Biol.; orth., lep., dipt., col., hym.*

Zool. Jahresb. f. 1880, 2, 241. — Ibid., 1881, 2, 124—125.

108. [Saisondimorfismen hos lepidoptera och cynipiderna]. — MFFlF. VI, 1881, 185—187. — *Ref; lep., hym.; biol.*

*109. [Eurydema oleracea såsom skadeinsekt på kål och löfkojor]. — MFFlF. VI, 187. — *Hem.; oec.*

110. [Dipsocoris pusillimus Sahlb. i Frankrike]. — MFFlF. VI, 187. — *Hem.*

*111. [Två för Finland nya Hemiptera Heteroptera]. — MFFlF. VI, 189. — *Hem.*

*112. [Trioza cerastii ny för Finland; Tr. aegopodii icke finsk]. — MFFlF. VI, 194. — *Hem.*

*113. [För Finland nya Sminthurider]. — MFFlF. 203—205. — *Apter.*

*114. [Härjningar av larven till Blennocampa aethiops Fabr. på päronträd]. — MFFlF. VI, 213. — *Hem.; oec.*

*115. [Tre för Finland nya Hemiptera]. — MFFlF. VI, 213—214. — *Hem.*

*116. [Oliarus leporinus L. på hvete i Pargas]. — MFFlF. VI, 215. — *Hem.; oec.*

*117. [Om finska Aradus-arter]. — MFFlF. VI, 216. — *Hem.*

*118. [Cidaria hydrata Tr. och C. galiata S. V. funna i Finland]. — MFFlF. VI, 216. — *Lep.*

*119. [Tre för Finland nya Hemiptera Heteroptera]. — MFFlF. VI, 217—218. — *Hem.*

*120. [Om Nabis boops Schiödte såsom finsk art]. — MFFlF. VI, 218. — *Hem.*

*121. [Om finska Thysanoptera]. — MFFlF. VI, 219. — *Thys.*

*122. [Rudabborre från Ruovesi]. — MFFlF. VI, 232. — *Pisc.; monstr.*

*123. [För Finland nya Hemiptera]. — MFFlF. VI, 232—233. — *Hem.*

*124. [Om några finska Cicadarier]. — MFFlF. VI, 233—234. — *Hem.*

*125. [Limnadia lenticularis L. från Sottunga och Kökar]. — MFFlF. VI, 234. — *Crust.*

*126. [Insekters spridning genom handeln: Gnathocerus cornutus. — MFFlF. VI, 237—238. — *Col.*

*127. [Canis lupus]. — MFFlF. VI, 239. — *Mamm.; biol.*

*128. [Om finska Thysanoptera]. — MFFlF. VI, 239. — *Thys.*

*129. [Egendomliga Cimbicidkokonger]. — MFFlF. VI, 241. — *Hym., biol.*

*130. [Sju för Finland nya Psyllodeer]. — MFFlF. VI, 242. — *Hem.*

*131. [Heliothrips dracaenae Heeg. från Helsingfors]. — MFFlF. VI, 242. — *Thys.; biol., oec.*

*132. [Genomskinliga kokonger af Clavellaria amerinae L.]. — MFFlF. VI, 243. — *Hym.*

*133. En ny art Aradus från Lappland. — MFFlF. VII, 139—143. (Sep. 1881). — *Hem.*

Löw, Fr.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 44.

*134. Till kännedomen om Skandinaviens Psylloder. — Ent. Tidskr. II, 1881, 145—172, 3 f., Résumé 175—176. — *Hem.*
Löw, Fr.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 43. — Katter, F.: Ent. Nachr. VIII, 1882, 92. — Zool. Jahresb. f. 1881, 260, 286. — Arch. Naturg. XLIII, 2, 115—116.

*135. Acanthosomina et Urolabidina nova et minus cognita descripsit. — Berl. Ent. Zeitschr. XXV, 1881, 67—86. (Sep. 1881). — *Hem.*
Zool. Jahresb. f. 1881, 2, 267.

*136. Analecta Hemipterologica. Zur Artenkenntniss, Synonymie und geographischen Verbreitung der palaearktischen Heteropteren. — Berl. Ent. Zeitschr. XXV, 155—196. (Sep. 1881). — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 71—72. — Bull., Soc. Ent. Ital. XIV, 260. — Zool. Jahresb. f. 1881, 2, 1882, 255—260. — Arch. Naturg. XLVIII, 1882, 120.

137. Heegeria nov. gen. Alydinorum europaeorum. — Verh. zool. bot. Ges. Wien XXXI, 1882, 211—214, 1 t. (Sep. 1881, 4 p., 1 t.). — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 43. — Zool. Jahresb. f. 1881, 2, 270.

*138. Hemiptera in: Zoologischer Jahresbericht f. 1880, herausgegeben v. d. Zool. Stat. zu Neapel, II. 1881, 123—177. — *Ref.; hem.*

139. Diagnoses quatuor novarum Pentatomidarum. — Ent. Monthl. Mag. XVII, 1881, 233—234. — *Hem.*

1882. 140. Monographia generis Oncocephalus proximeque affinium. — ASSF. XII, 1883, 673—758, 3 t. (Sep. 1882).
Puton, A.: Rev. d'Ent. I, 1882, 280. — Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. II, 1883, 73. — Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIX, 2, 1883, 110.

141. Om myrornas s. k. instinkt, med särskild hänsyn till de nyaste undersökningarna rörande densamma. Föredrag på Finska Vet. Soc. årsdag. — ÖFVS. XIV, 1882, 136—164. (Sep. 182, 29 p.). — *Ref.; hym.; psych.*

142. Ad cognitionem Heteropterorum Africae occidentalis. — ÖFVS. XXV, 1883, 1—43. (Sep. 1882). — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. II, 1883, 73—74.

*143. Djur och växter i Kalevala. — FT. XII, 1882, 241—257, 338—359. (Sep. 39 p.). — *Pop.*

144. Darwin och Darwinismen. — FT. XII, 1881, 403—423, XIII, 1882, 15—32, 83—105. (Sep. 1882, 60 p.). — *Zool. gen.; pop.*

145. O. B. Rydholm: Hunden, hans historia, härstamning och raser. — FT. XII, 1882, 223—224. — *Ref.; mamm.*

146. Smitt, F. A.: Ryggradsdjurens geologiskå utveckling och slägtskapsförhållanden. — FT. XIII, 1882, 292—293. — *Ref.; vertebrata.*

147. Hemipterologiska meddelanden, I II. — Ent. Tidskr. III, 1882, 63—64, 102—183, 191—194, 208—209. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 231; II, 1883, 125. — Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIX, 2, 1883, 100, 110.

*148. Entomologiska meddelanden från Societas' pro Fauna et Flora Fennica sammanträden åren 1880 och 1881. — Ent. Tidskr. III, 153—156. — *Col., hym., lep., hem., apter.*

149. [Tetrodontophora n. g. (Subf. Lipurinae Tullb.)]. — Sitzungsb. Akad. Wiss. Wien, LXXXVI, 1882, 184. — *Apter.*
Löw, Wien. Ent. Zeit. II, 1883, 75. — Zool. Jahresb. f. 1882, 2, 169.

150. Genera nova Hemipterorum. I. Eremoplanus novum genus Alydinorum ex Arabia desertà. II. Ectmetacanthus novum genus Reduviidarum (Acanthaspidinorum) ex Africa. — Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 98—91, 111—112. — *Hem.*

151. Eine neue Eusarcoris-Art aus dem Caucasus. — Wien. Ent. Zeit. I, 113—114. — *Hem.*

152. Ueber die Gattungsnamen Cimex und Acanthia. — Wien. Ent. Zeit. I, 301—306. — *Hem.; nomencl.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. XLIX, 2, 1883, 99. — Löw, P.: Zool. Jahresb. f. 1882, 373.

153. Eine neue Cimex-art aus der Wiener-Gegend. — Wien. Ent. Zeit. I, 306—308. — *Hem.*

*154. Verzeichniss paläarktischer Hemipteren beschrieben vom December 1875 bis Januar 1879. — Ent. Nachr. VIII, 1882, p. 105—116. — *Hem.*

*155. Hemiptera in: Zoologischer Jahresbericht für 1881, herausgeg. v. d. Zool. Stat. zu Neapel, II, 1882, 250—292. — *Hem.*

156. Orthosteira subtilis nov. sp. — Bull. Soc. Ent. Fr. X, 1882, 161. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 204.

157. Note sur le Malacotes Mulsanti Reut. — Rev. d'Ent. I, 1882, 136—137. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 200.

158. Sur le genre Schizoptera Fieb. — Rev. d'Ent. I, 162—164. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. I, 1882, 284.

159. Labops Putoni, n. sp. Capsidarum e Gallia descripsit. — Rev. d'Ent. I, 277—278. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. II, 1883, 124.

1883. *160. Hemiptera Gymnocerata Europae. Hémiptères Gymnocérates d'Europe, du bassin de la Méditerranée et de l'Asie russe. III. — ASSF. XIII, 1884, 313—496, 5 t. (Sep. 1883). Supplementum tomorum I—III (nris 64, 76, 160). Dispositio synoptica specierum in tomis I—III descriptarum, p. 497—568. — *Hem.*
Puton, A.: Rev. d'Ent. III, 1884, 90—91. — Signoret, V.: Ann. Soc. Ent. France (6) 14, 1884, lxxxiv. — Ent. Monthl. Mag. XX, 1884, 261—262. — Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. III, 1884, 126. — Schlechtendal: Zeitschr. f. Naturw. (4), III (LVII), 1884, 625, 639.

161. Minnestal öfver Fredrik Wilhelm Mäklin. — ASSF. XIV, 1883, 16 p. — *Biogr.*

*162. Entomologiska exkursioner under Januari 1882 i södra Finland. — MFFlF. IX, 1883, 72—77. — *Col., hym., lep., hem., apter.*

*163. Några ord om de europäiska arterna af slägtet Anthocoris Fall., Fieb. — MFFlF. IX, 78—81. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. II, 1883, 230—231.

*164. [Två för Finland nya Hemiptera och Orthops cervinus från Åbo-trakten. — MFFlF. IX, 122—123. — *Hem.*

*165. [Chionapsis salicis L. på rönn från Pargas]. — MFFlF. IX, 125—126. — *Hem., col.; biol.*

*166. [Missbildningar på Cerastium triviale, orsakade af larver till Trioza cerastii Loew.]. — MFFlF. IX, 126. — *Hem.; biol., cecid.*

*167. [Stenopteryx Hirundinis från Hangö]. — MFFlF. IX, 126. — *Dipt.*

*168. [En vinterexkursion i Kyrkslätt]. — MFFlF. IX, 135. — *Col., apter., ar.; biol.*

*169. [Notiser om finska Hemiptera Heteroptera]. — MFFlF. IX, 136—137. — *Hem.*

*170. [Ammodytes lancea från Hangö]. — MFFlF. IX, 137. — *Pisc.*

*171. [Gastrodes abietis såsom vinterföda för korsnäbbar]. — MFFlF. IX, 137. — *Aves, hem.; biol.*

*172. [Tre för Finland nya Tenthredinider]. — MFFlF. IX, 1883, 139. — *Hym.*

*173. [De europeiska Anthocoris-arterna]. — MFFlF. IX, 139—140. — *Hem.*

*174. [Europeiska Dicyphus-arter, besläktade med D. pallidus H. S.]. — MFFlF. IX, 148—149. — *Hem.*

*175. [Psylla Palméni]. — MFFlF. IX, 149. — *Hem.*

*176. [Schizoneura ulmi L. och i dess bladrullar lefvande insekter]. — MFFlF. IX, 153. — *Hem., col., dipt.; biol.*

*177. [Taenia pectinata lefvande fritt i harens peritonealhåla]. — MFFlF. IX, 153—154. — *Plath.*

*178. [Taenia pectinata's lefnadssätt]. — MFFlF. IX, 164—165. — *Plath.*

*179. Texten till hft I—VI af: Sundman, Gösta, Finlands fiskar. 1883—1886. — *Pisc.*

*180. Om kopulationen hos en del Collembola. — Förhandl. vid 12:te Skand. Naturf.-möt. i Sthlm 1880. Sthlm 1883, 514—516. (Vide N:o 97). — *Apter.; biol.*

*181. Om ventraltubens funktioner hos Collembola. — Ibid., 517—518 (Vide N:o 98). — *Apter.; biol.*

*182. Om bastardbildning bland insekterna. — Ibid., 575—547 (Vide N:o 99). — *Biol.; hym., lep., col., orth., odon., hem.*

*183. Två nya Piezostethus-arter från Sverige och Finland beskrifne. — Ent. Tidskr. IV, 1883, 135—138. — *Hem.*
Löw, P.: Ent. Zeit. III, 1884, 153.

184. The British species of Dicyphus. — Ent. Monthl. Mag. XX, 1883, 49—53. — *Hem.*
Löw., P.: Wien. Ent. Zeit. II, 1883, 314.

185. Trois nouvelles espèces de Capsides de France. — Rev. d'Ent. II, 1883, 251—254. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. II, 1883, 314.

1884. 186. Monographia Anthocoridarum orbis terrestris. — ASSF. XIV, 1885, 555—758. (Sep. 1884, 204 p.). — *Hem.*
Arch. Naturg. LII, 2, 1886, 117—118. — Puton, A.: Rev. d'Ent. IV, 1885, p. 115.

[N:o 187 deest.]

*188. Monomorium pharaonis, en ny fiende till vår husro. — OFVS. XXVI, 1884, 1—21. (Sep. 1884). — *Hym.; biol., oec.*

189. Sibiriska Hemiptera. — ÖFVS. XXVI, 22—35. (Sep. 1884). — *Hem.*
Duda, L.: Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 90.

190. De nyaste upptäckterna inom insekternas utvecklingshistoria. Föredrag vid Finska Vetenskaps-societetens årshögtid 1884. — ÖFVS. XXVI, 223—250. (Sep. 1884).
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LII, 2, 1886, 23.

A legujabb felfedezések e rovarok fejlödéstanában. — Rovart, Lapok II, 1885, 25—95. — *Hym., hem.; biol.*

191. Om djurens själ. — FT. XVI, 1884, 81—102, 245—272, 405—424, XVII, 1884, 321—346. — *Psych.; pop.*

*192. Gösta Sundman: Finska fogelägg. — C. A. Hollgren: Foglarnes språk. — FT. XVII, 1884, 450—452. — *Ref., aves, biol.*

193. Christofer Aurivillius: Insektlifvet i arktiska länder. — FT. XVII, 456—458. — *Ref., ins., biol.*

*194. Entomologiska meddelanden från Societas' pro Fauna et Flora Fennica sammanträden åren 1882 och 1883. — Ent. Tidskr. V, 1884, 163—171. — *Hym., col., lep., trich., neur., dipt., orth., hem.*
Reitter, E.: Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 125. — Mik, J.: ibid., 158.

195. Species Capsidarum quas legit expeditio danica Galateae descripsit. — Ent. Tidskr. V, 1884, 195—200. — *Hem.*
Mik, J.: Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 91. — Bertkau, Ph.: Arch. f. Naturg. LI, 2, 90.

*196. Synonymisches über Hemipteren. — Rev. mens. d'Ent. I, 1884, 131—135. (Sep. 5 p.) — *Hem.*
Duda, L.: Wien. Ent. Zeit. III, 1884, 91. — Mik, J.; Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 91.

197. Genera nova Hemipterorum III. Metastenothorax novum genus Lygaeidarum (Myodochinorum) e Graecia. — IV. Thermatophylina nova subfamilia Anthocoridarum ex Aegypto. — Wien. Ent. Zeit. III, 1884, 1—3, 1 f. 218—219, 1 f. — *Hem.*

*198. Ad cognitionem Aradidarum palaearcticarum. — Wien. Ent. Zeit. III, 129—137. — *Hem.*

199. Description d'une espèce nouvelle du genre Eurydema et quelques mots sur la synonymie de trois autres espèces. — Rev. d'Ent. III, 1884, 67—69. — *Hem.*
Löw, P.: Wien. Ent. Zeit. III, 1884, 251.

200. Phloeothrips albosignata n. sp. ex Algeria, descripsit. — Rev. d'Ent. III, 290—291. — *Thys.*

201. [Diagnosen neuer Arten in] P. M. Ferrari: Materiali per lo Studio della Fauna Tunisia raccolti de G. e L. Doria V. Rincoti. — Ann. Mus. Civ. Stor. Nat. Genova (2) I, 1884, (42, 44, 45, 46, 47, 53, 56—57!). — *Hem.*

202. [Id. in] Carolus Berg: Addenda et Emendanda ad Hemiptera Argentina, 1884 (63, 64, 67, 81, 85, 88, 90, 92, 95, 96!). — *Hem.*

1885. *203. Hemiptera duo nova e Fennia. — MFFlF. XI, 1885, 164—167. — *Hem.*
Mik, J.: Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 90.

204. Synonymische Bemerkungen über Hemipteren. — Berl. Ent. Zeitschr. XXIX, 1885, 39—47. — *Hem.*
Duda, L.: Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 284.

205. Ueber einige russische Hemipteren. — Berl. Ent. Zeitschr. XXIX, 158—159. — *Hem.*
Duda, L.: Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 254. — Bertkau, Ph.: Arch. f. Naturg. LII, 1885, 105.

206. Kleine Berichtigung zur Kenntniss der alpinen Capsiden Tirols. — Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, H. 4, 124. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LII, 2, 1888, 118.

207. Noch einiges über paläarctische Aradiden. I—III. — Wien. Ent. Zeit. IV, 147—151. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LII, 2, 1886, 117.

208. Ad cognitionem Lygaeidarum palaearcticarum. — Rev. d'Ent. 1885, 199—233. — Corrigenda: V, 1886, 120—121. — *Hem.*
Duda, L.: Wien. Ent. Zeit. V, 1886, 77—78.

209. Species Capsidarum regionis palaearcticae. — Compt.-rend. Soc. Ent. Belg. XXIX, 1885, xlii—xlviii. (Sep. 7 p.) — *Hem.*

210. Oligobiella, novum genus Capsidarum. — Ent. Monthl. Mag. XXI, 1885, 201—202. — *Hem.*
Wien. Ent. Zeit. IV, 1885, 190—191.

*211. The European Species of the genus Clinocoris Hahn, Stål. — Ent. Monthl. Mag. XXII, 1885, 37—39, 1 f. — *Hem.*

*212. Sminthurus Poppei n. sp. — Abh. Naturw. Ver. Bremen IX, 1885, 214, 1 f. — *Apter.*

1886. 213. De lägre djurens själslif. Förra afdelningen. I, II. — Ur vår tids forskning XXXIV, XXXV. Stockholm 1886, 8:o, 92 + 139 pp., talrika träsnitt i texten.
Boldt, R.: Finsk Tidskr. XXI, 1886, 214—216.
De lägre djurens själslif. Andra afd. — Ibid. XXXVI. Stockholm 1889, 8:o, 131 + VII pp., talr. träsn. i texten. — *Psych.; pop.*

*214. [Tre nykomlingar till Finlands Hemipterfauna]. — MFFlF. XIII, 1886, 170—171. — *Hem.*

*215. [Acanthia fennica]. — MFFlF. XIII, 172. — *Hem.*

*216. [Om Monomorium Pharaonis och Lasius flavus var. minor i Finland]. — MFFlF. XIII, 179. — *Hym.; biol.*

*217. [Bidrag till kännedomen om finska Podurider]. — MFFlF. XIII, 179—180. — *Apter.*

*218. [Nabis boreellus n. sp.]. — MFFlF. XIII, 181—182. — *Hem.*

*219. [Brachyarthrum limitatum Fieb., dess utbredning och näringsplanta. — MFFlF. XIII, 182. — *Hem., biol.*

*220. [Notiser om två finska Capsider]. — MFFlF. XIII, 182—183. — *Hem.*

221. [Atractotomus morio J. Sahlb. från vestra Sibirien]. — MFFlF. XIII, 183. — *Hem.*

*222. [Psallus lapponicus Reut. från Muonioniska, ny för finska faunan]. — MFFlF. XIII, 187. — *Hem.*

*223. [Lygus rhamnicola n. sp.]. — MFFlF. XIII, 196. — *Hem.*

*224. [Trådmaskar hos larver af Gastropacha castrensis L.] — MFFlF. XIII, 196. — *Lep., verm.: biol.*

*225. [Sällsynta och för Finland nya Hemiptera]. — MFFlF. XIII, 199—201. — *Hem.*

*226. [„Ankägg inom ankägg"]. — MFFlF. XIII, 201. — *Aves; monstr.*

*227. [Psylla phaeoptera F. Löw och Trioza albiventris Först. nya för Finland]. — MFFlF. XIII, 206. — *Hem.*

*228. [Deltocephalus Minki Fieb. och Cicadula sexnotata var. salina n. v. nya för Finland]. — MFFlF. XIII, 211. — *Hem.*

*229. [Pachycoleus rufescens J. Sahlb. från norra Italien]. — MFFlF. XIII, 211—212. — *Hem.*

*230. [För Finland nya insekter]. — MFFlF. XIII, 229. — *Lep., hem.*

*231. [Orthosteira acutispinis n. sp. och Ceratocombus corticalis n. sp.]. — MFFlF. XIII, 233—234. — *Hem.*

*232. [Varieteter af Notonectae]. — MFFlF. XIII, 234. — *Hem.*

*233. [Öfvervintring på barrträd af capsider, psyllider m. fl. hemipterer, däribland Psylla chlorostigma F. Löw. ny för Finland]. — MFFlF. XIII, 257. — *Hem.; biol.*

234. Notes synonymiques. — Rev. d'Ent. V, 1886, 120—122. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LIII, 2, 1887, 117.

235. [Diagnoses des espèces nouvelles dans] A. Puton: Énumeration des Hémiptères recueillis en Tunisie en 1883 et 1884 par M. M. Valery Mayet et Maurice Sédillot. — Explor. Scient. de la Tunisie, 1886 (17—19, 20—22!). — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LIII, 2, 122.

1887. 236. Ad cognitionem Heteropterorum Madagascariensium. — Ent. Tidskr. VIII, 1887, 77—109. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. f. Naturg. LIV, 2, 1888.

237. Reduviidae novae et minus cognitae descriptae. — Rev. d'Ent. VI, 1887, 149—167. — *Hem.*

238. Федченко, А. П. Путешествіе въ Туркестанъ. Томъ II. Зоогеографическія изслѣдованія. Часть V. Полужесткокрылыя. Пер. А. А. Тихомирова и А. И. Кронеберга. Москва, 1887, 4:o, 39 pp. — *Hem.*

1888. 239. Revisio synonymica Heteropterorum palaearcticorum quae descripserunt auctores vetustiores (Linnaeus 1758—Latreille 1806). Synonymische Revision der von den älteren Autoren (Linné 1758—Latreille 1806) beschriebenen palaearctischen Heteropteren. — I: ASSF. XV, 1888, 241—315. — II: 443—812. (Sep. 458 pp.). — *Hem.*
Ent. Monthl. Mag. XXV, 1888, 68—69. — Arch. Naturg. LV, 2, 1889, 68—69. — Fokker, A. J. F.: Tijdschr. v. Entom. XXXII, 111—116.

240. Ströftåg i djurvärlden. Populära afhandlingar och uppsatser, I. H:fors 1888, 8:o, 125 p. figg. — *Pop.*

241. Nya rön om myrornas omtvistade medlidande och hjälpsamhet. — Ent. Tidskr. IX, 1888, 55—90. Résumé: Expériences psychologiques sur la Fourmi rousse (Formica rufa), 91—95. (Sep. 1888). — *Hym., psych.*
Arch. Naturg. LV, 2, 1889, 194—195.

242. Nya tillägg till Professor Schiödtes „Fortegnelse over de i Danmark levende Taeger". — Ent. Meddel. I, H. 3, 1888, 101–113. — *Hem.*

243. Några ord om Hydrometridernas öfvervintring. — Ibid., 123—124. — *Hem.; biol.*

244. Calocoris Costae n. sp. — Wien. Ent. Zeit. VII, 1888, 99—100. — *Hem.*

245. Notes additionelles sur les Hémiptères-Hétéroptères des environs de Gorice (Illyrie). — Rev. d'Ent. VII, 1888, 57—61. — *Hem.*

246. Description d'une nouvelle espèce du genre Dicyphus Fieb., Reut. Notes sur quelques Capsides de la Dobroudja. — Rev. d'Ent. VII, 61—63. — *Hem.*

247. Hemiptera sinensia enumeravit novasque species descripsit. — Rev. d'Ent. 63—69. — *Hem.*

248. (et Autran, E.): Hemiptera amurensia. Novas species descripsit O. M. Reuter. — Rev. d'Ent. VII, 199—202, 2 fig. — *Hem.*

249. Hemiptera nova, in Graecia a D:o v. Oertzen lecta, descripsit. — Rev. d'Ent. VII, 223—228. — *Hem.*

250. Descriptio speciei novae sicilianae generis Plagiognathus (Hemiptera, Capsidae). — Nat. Sic. VII, 1888, 236. — *Hem.*

1889. *251. En ny Ceratocombus från Finland. — MFFlF. XV, 1889, 154—157. — *Hem.*
Bergroth, E.: Wien. Ent. Zeit. IX, 1890, 104.

*252. [Schoenobius gigantellus Schiff. anträffad i Finland]. — MFFlF. XV, 1889, 217. — *Lep.*

253. På gränsen till det olösbara. Ett blad ur insekternas biologi. — FT. XXVI, 1889, 105—116. — *Hym.; biol., pop.*

254. Sextus Otto Lindberg. — Kalender, utg. af Svenska Folkskolans Vänner 1889, 169—176. — *Biogr.*

*255. La Finlande et les finlandais. Itinéraire historique et descriptif. Publication de la Société des Touristes de Finlande. — H:fors 1889, 8:o, 207 p. (10, 21, 23—24, 27, 28!).
Finlands natur, folk och kultur. En öfverblick. H:fors 1889, 8:o, 173 p., 1 karta (12, 34!). — *Mamm., aves, pisc.; pop.*

1890. *256. Collembola in caldariis viventia enumeravit novasque species descripsit. — MFFlF. XVII, 1892, 17—28, 1 t. (Sep. 1890). — *Apter.*
Bergroth, E.: Wien. Ent. Zeit. XI, 1890, 182. — Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LVII, 2, 1891, 76.

257. Description d'un Lygéide noveau appartenant à la division Lethaearia. — Rev. d'Ent. IX, 1890, 192. — *Hem.*

258. Notes géographiques. — Rev. d'Ent. IX, 237—245. — Corrigenda: X, 1891, 27. — *Hem.*

259. Capsidae novae e Rossia meridionali descriptae. — Rev. d'Ent. IX, 246—248. — *Hem.*

260. Adnotationes Hemipterologicae. — Rev. d'Ent. IX, 248—254. — Corrigenda: X, 1891, 27. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LVII, 2, 1891, 91—95.

261. Capsidae novae ex Africa boreali, descripsit. — Rev. d'Ent. IX, 255—260. — *Hem.*

262. Notes sur quelques Hémiptères de Madère. — Rev. d'Ent. IX, 260—262. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LVII, 2, 1891, 78.

263. Conspectus specierum generis Mustha (Hemiptera, Pentatomidae). — Rev. d'Ent. IX, 262—264. — Corrigenda: X, 1891, 28. — *Hem.*

264. Ad cognitionem Nabidarum scripsit. — Rev. d'Ent. IX, 289—309, 5 f. — Corrigenda: X, 27—28. — *Hem.*
Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LVII, 2, 1891, 91—92.

265. Capsidae Sicilianae novae et minus cognitae. — Nat. Sic. IX, 1890. N:o 1, 1—4. — *Hem.*

1891. *266. Hemiptera Gymnocerata Europae. Hémiptères Gymnocérates d'Europe, du bassin de la Méditerranée et de l'Asie Russe. Tome IV. — ASSF. XXIII, 1891, 1—179, 6 t. — *Hem.*
Puton, A.: Rev. d'Ent. X, 1891, 288—289. — Mik, J.: Wien. Ent. Zeit. XI, 1892, 249. — Fokker, A. J. F.; Tijdschr. v. Entom. XXXV, 148.

267. Monographia generis Holotrichius Burm. — ASSF. XIX, N:o 3, 1891, 40 p., 2 t., — *Hem.*

Puton, A.: Rev. d'Ent. X, 1891, 288—289. — Mik, J.: Wien. Ent. Zeit. XI, 1892, 249. — Fokker, A. J. F.: Tijdschr. v. Entom. XXXV, 149.

*268. Monographia Ceratocombidarum orbis terrestris. — ASSF. XIX, N:o 6, 1891, 28 p., (Sep. 1891). — *Hem.*

Puton, A.: Rev. d'Ent. X, 1891, 288–289. — Mik, J.: Wien. Ent. Zeit. XI, 1892, 249. — Fokker, A. J. F.: Tijdschr. v. Entom. XXXV, 148.

269. Hemiptera Heteroptera från trakterna kring Sajanska bärgskedjan, insamlade af K. Ehnberg och R. Hammarström, förtecknade. — ÖFVS. XXXIII, 1891, 166—208. (Sep. 1891). — *Hem.*

Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LIX, 2, 1893, 166, 599.

270. Podurider från nordvestra Sibirien samlade af J. R. Sahlberg, förtecknade. — ÖFVS. XXXIII, 226—229, 1 f. (Sep. 1891). — *Apter.*

Bertkau, Ph.: Arch. Naturg, LIX, 2, 1893, 80.

*271. De skandinaviskt-finska Acanthia- (Salda-) arterna af saltatoria-gruppen. — MFFlF. XVII, 1892, 144—160. (Sep. 1891). — *Hem.*

*272. Thysanoptera, funna i finska orangerier. — MFFlF. XVII, 161—167. (Sep. 1891). — *Thys.*

*273. Nordiska Sugfisken (Liparis lineatus Lep.) funnen i Nylands skärgård. — MFFlF. XVII, 168–171. (Sep. 1891). — *Pisc.*

274. Lefvande ljus. — FT. XXX, 1891, 342—357. — *Phys., biol.; pop.*

275. Djurens industrier. Efter bästa källor. — Skrift. utg. af Sv. Folksk. Vänn. XXV, 1891, 91 p., 14 f.

Eläinten elinkeinot ja teollistoimet. Parhaitten lähteitten mukaan. Suom. Hilja [Hansson]. — Tuhansille kodeille Tuhatjärvien maassa, 5 & 6. Porvoo, 1892, 8:o, 104 s. — *Biol., pop.*

Levander, K. M.: Valvoja XIV, 1894, 119.

276. Griechische Heteroptera gesammelt von E. Oertzen und J. Emge verzeichnet. — — Berl. Ent. Zeitschr. XXXVI, 1891, 17—34. — *Hem.*

277. Ein falscher und ein echter Sthenarus (Capsidae). — Wien. Ent. Zeit. X, 1891, 49—51. — *Hem.*

Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LVIII, 2, 1892, 92–93.

278. Species novae generis Acanthia F., Latr. — Rev. d'Ent. X, 1891, 21—27. — *Hem.*

279. Ad cognitionem Capsidarum. I. Capsidae Javanicae. — Rev. d'Ent. X, 130—136. — *Hem.*

Bertkau, Ph.: Arch. Naturg. LVIII, 2, 1892.

280. Hétéroptères de Suez. — Rev. d'Ent. X, 137—142. — *Hem.*

1892. 281. Monographia generis Reduvius Fabr., Lam. — ASSF. XIX, N:o 15, 1892, 36 p. — *Hem.*

Puton, A.: Rev. d'Ent. XI, 1892, 319—320.

*282. Corrodentia Fennica. I. Psocidae. Förteckning och beskrifning öfver Finlands Psocider. — AFFlF. IX, 1893, N:o 4, 49 p., 1 t. (Sep. 1892). — *Corr.*

Bergroth, E.: Wien. Ent. Zeit. XIII, 1894, 103–109.

*283. [Thysanoptera funna i finska orangerier]. — MFFlF. XVIII, 1892, 225—227. — *Thys.*

*284. [Insekter lefvande på Crambe maritima L.]. — MFFlF. XVIII, 230—231. — *Col., lept., dipt., hem.; biol.*

*285. [Finska Sminthuridae och Templetonidae]. — MFFlF. XVIII, 231—232. — *Apter.*

*286. [Thermophila furnorum Rev.] — MFFlF. XVIII, 225—226. — *Apter.*

*287. [Palaemon squilla i Ingå]. — MFFlF. XVIII, 246. — *Crust.*

*288. [För finska faunan nya Hemiptera. — MFFlF. XVIII, 248—249. — *Hem.*

*289. [Podurider från blomkrukor]. — MFFlF. XVIII, 249. — *Apter.*

*290. Zur Kenntnis der geographischen Verbreitung der Graseule in Finland. — Fennia V, 1892, N:o 12, 10 p., 1 mp. — *Lep.; geogr., oec.*

*291. Ängsmasken, dess härjningar i Finland och medlen till deras bekämpande. På uppdrag af k. Finska Hushållningssällskapet. Åbo 1892, 8:o, 62 p. 1 mp.
Niittymato, sen tuhotyöt Suomessa ja keinot niiden ehkäisemiseksi. Turku 1892, 8:o, 64 p., 1 mp. — *Lep., hym.* (9—10), *dipt.* (9—10); *oec., path.* (12).

*292. Ängsmasken och medlen att bekämpa dess härjningar. — Kal. Sv. Folskol. Vänner 1892, 10—42, 4 f. — *Lep.; oec.*

293. Voyage de M. F. Simon au Venezuela (décembre 1887—avril 1888). 20:e mémoire. Hémiptères Hétéroptères. 1:re partie. Capsides. — Ann. Soc. ent. Fr. XLI, 1892, 391—402. — *Hem.*

Bertkau, Ph.: Arch. f. Naturg. LIX, 2, 1893.

294. Lygaeidae tres palaearcticae. — Rev. d'Ent. XII, 1892, 214—216. — *Hem.*

295. A new species of Helopeltis. — Ent. Monthl. Mag. (2), III, (XXVIII), 1892, 159—160. — *Hem.*

296. Species Capsidarum et Anthocoridarum madagascarienses. — Ibid., 185—187. — *Hem.*

297. Schmidt, D:r. Människroppen och dess organ. En åskådlig framställning i ord och bild af dess byggnad. Öfversättning och delvis bearbetning. H:fors 1893, 8:o, 32 spalter, 1 t.

Unonius, K. J. W.: Tidskr. Ped. För. XXXI, 1894, 115.

Ihmisruumis ja sen elimet. Kuvilla ja selityksillä valaistu havainnollinen esitys sen rakenteesta. Osittain mukaillen suomennettu. (Päällyksellä: Ihmisruumis. Kuvallinen esitys sen rakenteesta ja elimistä. Saksan kielestä kääntänyt ja osittain mukaellut O. M. Reuter). (Suom. Vihtori Peltonen). Porvoo 1893, 4:o, 15 s. 30 palstaa) ja kuva. — *Anthr.; an.*

*298. Ängsmasken. II. Berättelse öfver en på K. Finska Hushållningssällskapets bekostnad sommaren 1892 företagen resa i och för studium af ängsmasken och de naturenliga medlen till dess utrotande. — Åbo 1893, 8:o, 28 p.

Lampa, S.: Ent. Tidskr. XIV, 1893, 81—85; Upps. prakt. Ent. III, 1893, 81—85. — Biet XIV, 1893, 87.

Niittymato. II. Kertomus eräästä matkasta, jonka K. Suomen Talousseuran kustannuksella niittymadon ynnä sen luonnonmukaisten käsityskeinojen tutkimista varten kesällä 1892 teki. — Turku 1893, 8:o, 30 p. — *Oec., biol.; lep., col., hym., dipt.*

1893. *299. Finlands fiskar och fisket i Finland. — Skrift. Sv. Folkskol. Vänn. XXVIII, 1893, 115 pp., 4 t., 21 ff.

Sandman, J. A.: Fisk.t. II, 1893, 48.

Suomen kalat ja kalastus Suomessa. Suom. Vihtori Peltonen. Kuvilla varustettu. — Tuhansille kodeille Tuhatjärvien maassa, 11 & 12. Porvoo 1893, 8:o, 122 p., 4 t. — *Pisc., piscat.*

Sandman, J. A.: Kal.l. II, 1893, 100—102.

*300. Blitophaga opaca, härjande våra kornåkrar. — ÖFVS. XXXV, 1893, 87—92. (Sep. 1893). — *Col., oec.*

*301. [Larver af Pedicia rivosa från Pargas]. — MFFlF. XIX, 1893, 24, 168. — *Dipt.*

*302. [Tetraphleps aterrimus J. Sahlb. och Anthocoris limbatus H. S.] — MFFlF. XIX, 53, 168. — *Hem.*

*303. [Chionaspis sorbi Dougl. n. sp. från Ilmola och Pargas]. — MFFlF. XIX, 66—67, 168. — *Hem.*

*304. [Sparfugglans vinterförråd]. — MFFlF. XIX, 68—69, 164. — *Aves; biol.*

*305. [Corrodentia Fennica. I. Psocidae]. — MFFlF. XIX, 100. — *Corr.*

*306. [Finska Neuroptera]. — MFFlF. XIX, 111. — *Neur.*

307. Litteratur: Alfred Möller: Die Pilzgärten einiger südamerikanischer Ameisen. — Ent. Tidskr. XIV, 1893, 235–241. — *Ref.; hym., biol.*

308. Die äthiopischen Arten der Nabiden-Gattung Phorticus. — Wien. Ent. Zeit. XII, 1893, 316–320. — *Hem.*

309. [Diagnoses in:] Bergroth, E.: Mission scientifique de M. Ch. Alluaud aux îles Séchelles. — Rev. d'Ent. XII, 1893, 208—209. — *Hem.*

310. Conspectus specierum generis Trigonotylus, Fieb. — Ent. Monthl. Mag. (2), IV (XXIX), 1893, 110—111. — *Hem.*

311. A singular genus of Capsidae. — Ibid., 151—152. — *Hem.*
Arch. Naturg. LX, 2, 1894, 71.

312. A new mimetic genus of Lygaeidae. — Ibid., 252—253. — *Hem*

1894. 313. Patogena bakterier i landtbrukets tjänst. — ÖVSF. XXXVI, 1894, 243. (Sep. 1894). *Mamm., lep., dipt., hem.; path., oec.*

*314. Neuroptera Fennica. Förteckning och beskrifning öfver Finlands Neuroptera. — AFFlF. IX, N:o 8, 1894, 36 p. (Sep. 1894). — *Neur.*
Bergroth, E.: Wien. Ent. Zeit. XIII, 1894, 109.

*315. [Sitodrepa panicea L. förtärande lakrits]. — MFFlF. XX, 1894, 5, 118. — *Col.; oec., biol.*

*316. [Om massvis förekomst af Coccinella-arter]. — MFFlF. XX, 5, 118—119. — *Col., biol.*

317. Ett misstänkligt fall af arrhenoidie hos en höna. — MFFlF. XX, 28—35. (Sep. 8 p.). — *Aves; phys.; path.*
TJF. I, 1893-1894, p. 189.

*318. Om förekomst af strömming i träsk jämte några ord om den i vår skärgård fångade „sillen". — MFFlF. XX, 52—58, 116. (Sep. 7 p.). — Fisk.t. III, 1894, 182—187.
Jägerskiöld, L.: Zool. Cbl. 1896, 918.
Järvissä löytyvistä silakoista sekä muutamia sanoja meidän saaristossamme pyydetyistä „silleistä". — Kal.l. III, 1894, 182—187. — *Pisc., biol.*

319. Rättvisa mot — svinet. — Rättv. m. alla. I, 1894, 113—116. — *Mamm.; psych.*

*320. Ängsmasken. III. Berättelse öfver på K. Finska Hushållningssällskapets bekostnad sommaren 1893 företagna undersökningar om ängsmasken och medlen till dess utrotande. Åbo 1894, 8:o, 38 p.
Niittymato. III. Kertomus niittymatoa ja sen hävittämiskeinoja koskevista tutkimuksista, joita K. Suomen Talousseuran kustannuksella kesällä 1893 teki. (Suom. Erik Emil Ekman). Turku 1894, 8:o, 40 p. — *Lep.; hym.* (19, 24, 25), *dipt.* (19, 33), *col.* (24, 32, 33); *oec., biol*

321. Djur och växter i deras inbördes förhållanden. Efter bästa källor. Med talrika träsnitt. — Skrift. Sv. Folksk. Vänner XXXIII, 1894, 125 p., 40 f.
Eläinten ja kasvien keskinäiset suhteet. Parhaitten lähteitten mukaan. Suom. A. Becker. Useilla puupiirroksilla varustettu. — Tuhansille kodeille Tuhatjärvien maassa, 23 & 24. Porvoo 1895, 8:o, 118 p., 40 f. — *Biol. gener.; pop.*

322. Ad cognitionem Capsidarum. II. Capsidae palaearcticae. — Rev. d'Ent. XIII, 1894, 128—152. — *Hem.*

*323. Species palaearcticae generis Acanthia Fabr., Latr. dispositae. — ASSF. XXI, N:o 2, 1895, 58 p., 1 t. — *Hem.*
Puton, A.: Rev. d'Ent. XV, 1896, 284. — Bergroth, E: Wien. Ent. Zeit. XV, 1896, 37.

1895. *324. Apterygogenea Fennica. Finlands Collembola och Thysanura förtecknade. — AFFlF. XI, N:o 4, 1895, 35 p., 2 t. (Sep. 1895). — *Apter.*
Bergroth, E.: Wien. Ent. Zeit. XIV, 1895, 271.

*325. Tre fall af arrhenoidi hos hönor. — MFFlF. XXI, 1895, 40—42. — *Aves; phys. path.*
Jägerskiöld, L. A.: Zool. Cbl. IV, 1897, 38.

*326. Anteckningar om finska Neuroptera. — MFFlF. XXI, 62—64, 136. — *Neur.*

327. Myrornas relationer till växtvärlden. — FT. XXXIX, 1895, 244—256, 328—340. — *Hym.; biol., pop.*

328. Zur Kenntniss der Capsiden-Gattung Fulvius Stål. — Ent. Tidskr. XVI, 1895, 129—154. —*Hem.*
Mik, J.: Wien. Ent. Zeit. XV, 1896, 37.
Fulvius Heidemanni, eine Berichtigung. — Ibid. 254. — *Hem.*

329. Species nova generis Poduridarum Sira Lubb. — Wien. Ent. Zeit. XIV, 1895, 114. — *Apter.*

330. Species nova generis Capsidarum Allodapus Fieb. — Wien. Ent. Zeit. XIV, 115. — *Hem.*

331. Species nova generis Harpactor. — Wien. Ent. Zeit. XIV, 116. — *Hem.*

332. K. V. v. Dalla Torre, Die Gattungen und Arten der Apterygogenea (Brauer). [Kritische Bemerkungen]. — Wien. Ent. Zeit. XIV, 372—273. — *Ref.; apter.*

333. Ad cognitionem Capsidarum. III. Capsidae ex Africa boreali. — Rev. d'Ent. XIV, 131—142. — *Hem.*

334. Species quatuor novae familiae Anthocoridarum. — Ent. Monthl. Mag. (2), VI (XXXIII), 1895, 170—172. — *Hem.*

1896. *335. Hemiptera Gymnocerata Europae. Hémiptères Gymnocérates d'Europe, du bassin de la Méditerranée et de l'Asie russe. V. — ASSF. XXXIII, N:o 2, 1896, 392, 10 t. (Sep.). — *Hem.*
Puton, A.: Rev. d'Ent. XV, 1896, 284. — Ent. Monthl. Mag. (2) VIII (XXXIII), 186. — Handlirsch, A.: Zool. Centralbl. IV, 1897, 700—701. — Handlirsch, A.: Verh. K. K. Zool.-Bot. Ges. Wien. XLVII, 1897, 631. — Arch. f. Naturg. LXIV, 2, 1898, 835.

336. Dispositio generum palaearcticorum divisionis Capsaria familiae Capsidae. — ÖFVS. XXXVIII, 1896, 156—171 (Sep. 1896). — *Hem.*
Mik, J.: Wien. Ent. Zeit. XVI, 1897, 41—42.

*337. [Isotoma hiemalis och andra vinter-podurider]. — MFFlF. XXII, 1896, 32. — *Apter.*

*338. [Insekter, importerade med utländska mjölförsändelser]. — MFFlF. XXII, 32—33, 106. — *Col., lep., oec.*

*339. Periplaneta americana. — MFFlF. XXII, 33, 108. — *Orth.*

*340. (O. M. R.) [Biografier i] Finsk Biografisk Handbok: Bergroth, Evald (1896, 171—172), Deutsch, Henrik (1896, 444—445), Hahn, P. (1898, 875), Holmberg, H. J. (1898, 961—963), Julin, J. (1898, 1069—1070), Malmgren, A. J. (1899, 1431—1433), Mannerheim, C. G. (1440—1441), Mäklin, F. W. (1900, 1528—1530), Nordmann, A. v. (1575—1577). — *Biogr.*

341. För fruktträden skadliga och nyttiga djur; in: Eneroth, Olof, Handbok i Svensk pomologi. Ny upplaga, omarbetad och tillökad af Alexandra Smirnoff. I. Stockholm 1896, 8:o, 128 p. (97—116!) — *Aves, hym., lep., col., hem.; oec.*

342. Die Capsiden-Gattung Grypocoris. — Wien. Ent. Zeit. XV, 1896, 254—257. — *Hem.*

1897. 343. Sinnrika utvägar. — FT. XLII, 1897, 421—438, 13 f. (Sep. 18 p.). — *Hym., col., dipt.; biol., pop.*

*344. Skadeinsekter i våra fruktträdgårdar. — Kal. Sv. Folkskol. Vänner XXII, 1897, 153—166, 5 f. — *Hym., lep., hem.; biol., oec.*

345. Drag ur hornboskapens själslif. — Finl. Djursk. 1897, 19—22. — *Mamm., psych.*

346. Beschreibung zwei neuer Capsarien, nebst Bemerkungen über zwei früher bekannte Arten dieser Gruppe. — Wien. Ent. Zeit. XVI, 1897, 197—200. — *Hem.*

1898. 347. A. Seyfferth, Hunden, dess byggnad och dess inre organ. Åskådlig framställning i ord och bild. Öfvers. o. bearb. H:fors 1898, 8:o transv., 2 + 66 p.
A. Seyfferth, Koira, sen rakenne ja sisäelimet. O. M. Reuterin ruotsalaisesta muodostetusta suomennettu. Porvoossa 1900, 8:o transv., 71 p., 5 t. — *Mamm. dom.; an., pop.*

*348. [Fluglarver i salt]. — MFFlF. XXIII, 1898, 21, 191. — *Dipt., biol.*

*349. Collembola på snö. — MFFlF. XXIII, 44—46, 1 f.; 192. — *Apter.; biol.*

*350. [Larver af Piophila casei i salt]. — MFFlF. XXIII, 55. — *Dipt.; biol.*

*351. [Trioza remota ny för Finland]. — MFFlF. XXIII, 55, 191. — *Hem.*

352. Myrornas gäster. — Atheneum, I, 1898, 483—492. — *Hym.; biol., pop.*

353. Till hästens psykologi. — Finl. Djursk. 1898, 3—6, 17—19. — *Mamm.; psych.*

354. [Larvernas betydelse för systematiken. Diskussion]. — Ent. Tidskr. XIX, 1898, 127; Förh. 15:de Skand. Naturf.möt. Sthlm 1899, 289. — *Hem.*

1899. 355. [Entomologiska försöksstationer. Diskussion]. — Ent. Tidskr. XIX, 1898, 122—123; Upps. prakt. Ent. VIII. Sthlm 1899, 72—73; Förh. 15:de Naturf.möt. Sthlm 1899, 283—284. — *Oec.*

356. Capsidae novae mediterraneae, descriptae. I. — ÖFVS. XLII, 1899, 131—162. — *Hem.*

*357. Thysanoptera Fennica. Förteckning och beskrifning öfver Finlands Thysanoptera. — AFFlF. XVII, N:o 2, 1899, 69 p., 3 f. — *Thys.*
Schröder, Chr.: Illustr. Zeitschr. f. Ent. V, 1900, 387.

*358. Anteckningar om Finska Psocider. — AFFlF. XVII, N:o 3, 1899, 7 pp. — *Corr.*

359. Tasso. — Finl. Djursk. 1899, 34—38. — *Mamm.; psych.*

360. Litet katt-psykologi. — Ibid., 117—121, 131—134. — *Mamm.; psych.*

1900. 361. Heteroptera palaearctica nova et minus cognita descripsit. I. — ÖFVS. B. XLII, 1900, 209—239, 9 f. (Sep. 1900). — *Hem.*

362. Hemiptera Gymnocerata in Algeria meridionali a D.D. Dr H. Kraus et Dr J. Vosseler collecta enumeravit novasque species descripsit. — ÖFVS. B. XLII, 240—258. (Sep. 1900). — *Hem.*

363. Capsidae novae mediterraneae descriptae. II. — ÖFVS. XLII, 259—267 (Sep. 1900). — *Hem.*

364. Heteroptera palaearctica nova et minus cognita descripsit. II. — ÖFVS. B. XLII, 268—281. (Sep. 1900). — *Hem.*

365. Monographia generis Tarisa Am. et Serv. — ÖFVS. B. XLIII, 1901, 25—48, 2 t. (Sep. 1900). — *Hem.*

*366. En för Finland ny snöpodurid. — MFFlF. XXIV, 1900, 127—130, 186. — *Apter.*

*367. Om strandskatans (Haematopus ostralegus) omstridda skadlighet. — MFFlF. XXV, 1900, 34—35, 133. — *Aves; biol.*

*368. Notiser om tre finska Sminthurus-arter. — MFFlF. XXV, 53—55, 137. — *Apter.*

*369. Anteckningar om Finska Heteroptera. — MFFlF. XXVI, 1900, 124—130, (Sep. 7 p.), 220—221. — *Hem.*

*370. De finska arterna af Aradus lugubris-gruppen. — MFFlF. XXVI, 131—139 (Sep. 9 p.), 221—222. — *Hem.*

371. Ett förbisedt arbete öfver Collembola. — MFFlF. XXVI, 140—143, 222—223. — *Apter.*

372. Hafvets illuminering. — Minnesbl. utg. af Axel Lille m. fl., H:fors 1900, 8:o, 83—94, 8 f., förf. portr. — *Biol., pop.; pisc, rot., echin., coel., tun., inf.*

373. Forntida gudomligheter. Nyupptäckta under inom insektvärlden. — Ateneum, V, 1900, 290—305, figg. — *Col.; biol., pop.*

374. Nyheter om en gammal bekant [Geotrupes]. — Kal. Sv. Folksk. Vänner, XV, 1900. 114—118. — *Col.; biol., pop.*

*375. Djuren på Högholmen. — Finl. Djursk. 1900, 117–118. — *Mamm.; psych.*

376. Drag ur djurens lif. I. — Skrift. Sv. Folksk. Vänner, XLVI, 1900, 62 p., figg. — *Biol., pop.*

377. Description d'une espèce et d'une variété nouvelles du genre Acanthia Latr. — Bull. Soc. Ent. Fr. 1900, p. 156—157. — *Hem.*

378. Quelques Hémiptères de Maroc. — Ibid., 1900, 186—189. *Hem.*

1901. 379. Drag ur djurens lif. II. — Skrift. Sv. Folsk. Vänner, XLVII, 1901, 106 p. 43, ff.
Drag ur djurens lif. Stockholm 1901, 168 p., ff.
Piirteitä eläinten elämästä. Porvoo 1901. — *Biol.; mamm., ins.*

380. Capsidae rossicae descriptae. — ÖFVS. B. XLIII, 1901, 161–194. — *Hem.*

381. Capsidae novae mediterraneae. III. — ÖFVS. B. XLIII, 195—213. — *Hem.*

382. Thysanoptera tria mediterranea. — ÖFVS. B. XLIII, 214—216. — *Thys.*

383. Capsidae novae mediterraneae. IV. — ÖFVS. B. XLIV, 1902, 51—70. — *Hem.*

384. Miscellanea Hemipterologica. — ÖFVS. XLVI, 141—188. — *Hem.*

*384 a. Synonymiska notiser rörande några finska Hemiptera Heteroptera. — MFFlF. XXVII, 61–62. — *Hem.*

*384 b. Ett anmärkningsvärdt rede för en Bombycid-puppa. — MFFlF. XXVII, 62—63. — *Lep.*

*384 c. Tre för Finland nya Hemiptera-Heteroptera. — MFFlF. XXVII, 63, 143–145. — *Hem.*

*384 d. [Stridulationsmekanismen hos hemiptera.] — MFFlF. XXVII, 63, 64. — *Ref.; Hem.*

*384 e. [Niptus hololeucus i Helsingfors.] — MFFlF. XXVII, 64. — *Col.*

384 f. On the Coleoptera of the Faroë Islands. — Ent. Monthly Mag. (2) XII, 1901, 3—4. — *Col.*

1902. *384 g. Färgvarieteter af capsiden Poeciloscytus unifasciatus Wolff. — MFFlF. XXVIII A, 43; B, 155. — *Hem.*

*385. Phimodera fennica J. Sahlb., dess lefnadssätt och nymf. — MFFlF. XXVIII B, 1902, 45—47, 153—154, 156. — *Hem.*

*386. En ny finsk art af hemiptersläktet Sehirus. — MFFlF. XXVIII B, 47—48, 155—156. — *Hem.*

387. Mehiläiset ja niiden hoito. Kaksi luentoa. — Kansanvalistusseur. Taikalyhtykirj. XI, 1902, 31 p. — *Hym.; pop., oec.*

388. Two new species of Hemiptera-Heteroptera from Spain. — Ent. Monthl. Mag. XXXVIII, 1902, 102—103. — *Hem.*

*389. Mit A. Luther: Bibliotheca Zoologica Fenniae. Herausgegeben von Zoologen Finlands. I. H:fors 1902, 8:o, 144 p. (Sep. ur N:o 477, AFFlF. XXIV, 1909). — *Bibliogr.*

1903. 390. Capsidae ex Abessinia et regionibus confinibus enumeratae novaeque species descriptae. — ÖFVS. XLV, N:o 6, 1903, 18 p., 1 t. — *Hem.*

391. Capsidae Chinenses et Thibetanae hactenus cognitae enumeratae novaeque species descriptae. — ÖFVS. XLV, N:o 16, 1903, 23 p., 1 t. — *Hem.*

391 a. Merkillisiä ruokatovereja. Uusi havainto symbioosin alalla. — LY. 1903, 236—238. — *Ref.; lep., ar.; biol.*

392. Herr Embr. Strands „Norske fund av Hemiptera“ belysta. — Ent. Tidskr. 1903, XXIV, 73–75. — *Hem.*

393. Djurgeografiska skildringar. Efter dr. E. L. Trouessart. Stockholm 1903, 8:o, 158 p., 119 ff., 1 mp.

Piirteitä eläinmaantieteestä. T:ri E. L. Trouessartin mukaan. Suomensi J. E. Aro. Kansanvalistus-seur. Luonnontiet. Kirj. VI, 1903, 159 p., 119 f., 1 m. p. — *Geogr.*
FT. LVI, p. 269.

394. Drag ur djurens lif. Andra Samlingen. Stockholm 1903, 8:o, 102 p., ff.
Piirteitä eläinten elämästä. II. Suomensi Hanna Saikku. Porvoossa 1904, 120 p., ff. — *Biol.; mamm., pisc., ins., verm.*
FT. LVI, p. 268, 269.

395. Muurahaisia. — Kansanvalistus-seur. Taikalyhtykirj. X, 1903, 36 p. — *Hym.; biol. pop.*

396. New Species, etc., of Capsidae captured by Mr. G. C. Champion in Spain in 1901 and 1902. — Ent. Monthl. Mag. (2) XIV, 1903, 119—121. — *Hem.*

396 a. The food of Capsids. — Ent. Monthly Mag. (2) XIV, 1903, 121—123. — *Hem.; biol.*

1904. 397. Capsidae novae rossicae. II. — ÖFVS. XLVI, N:o 4, 1903—04, 17 p. — *Hem.*

398. Ad cognitionem Capsidarum aethiopicarum. I. — ÖFVS. XLVI, N:o 10, 1904, 8 p. — *Hem.*

399. Capsidae palaearcticae novae et minus cognitae descriptae. — ÖFVS. XLVI, N:o 14, 1904, 18 p. — *Hem.*

*400. Uebersicht der paläarktischen Stenodema-Arten. — ÖFVS. XLVI, N:o 15, 1904, 21 p. — *Hem.*

*401. Bemerkungen über einige Phimodera-Arten. — ÖFVS. XLVI, N:o 17, 1904, 15 p. — *Hem.*

402. Capsidae novae mediterraneae. V. Species a dominis J. et U. Sahlberg in itinere a. 1903—1904 collectae. — ÖFVS. XLVII, N:o 4, 1904, 26 p. — *Hem.*

403. Ad cognitionem Capsidarum Australiae. — ÖFVS. XLVII, N:o 5, 1904, 16 p., 1 t. — *Hem.*

*404. Neue Beiträge zur Kenntniss der Copeognathen Finnlands. — AFFlF. XXVI, N:o 9. 1904, 28 p., 3 t. — *Corr.*

*405. Otillförlitligheten af diverse allmogeuppgifter om vissa fiskars förekomst. — MFFlF. XXIX, 1904, 7—8. — *Pisc.*

*406. Lasius alienus Först., funnen i Finland. — MFFlF. XXIX, 1904, 120—121. — *Hym.*

*407. Massuppträdande af insekter. — MFFlF. XXIX, 1904, 197—198. — *Dipt., hym.*

*408. Bruchus pisi uppträdande hos oss ute i det fria. — MFFlF. XXIX, 1904, 198—199. — *Col.*

*409. Samhällen af förvildade bin. — MFFlF. XXX, 1904, 83. — *Hym.*

*410. Ett nytt fynd af Tribolium ferrugineum F. — MFFlF. XXX, 1904, 99. — *Col.*

*411. Ein neues Warmhaus-Thysanopteron. — MFFlF. XXX, 106—109. — *Thys.*

412. Ännu några ord om Herr Embr. Strands „Norske fund av Hemiptera". — Ent. Tidskr. XXV, 1904, 111—114. — *Hem.*

413. Description of a new species of the genus Globiceps from Spain. — Ent. Monthl. Mag. (2) XV, 1904, 51—52. — *Hem.*

414. Capsidae duae e Corea descriptae. — Revue russe d'Ent. 1904, 34—36. (Sep., 3 p.) — *Hem.*

415. Capsidae persicae a D:o N. A. Zarudny collectae enumeratae novaeque species descriptae. — Ann. Mus. Zool. Acad. Scienc. Pétersb. IX, 1904, 5—15. (Sep. 12 p.) — *Hem.*

416. Drag ur djurens lif. Tredje samlingen. Stockholm 1904, 8:o, 134 p., 45 ff.
Piirteitä eläinten elämästä. III. Suomensi K. Hirn. Jyväskylä 1906, 8:o, 160 p., 45 ff. — *Biol., pop.; ins.*

1905. 417. Ad cognitionem Capsidarum aethiopicarum. II. — ÖFVS. XLVII, N:o 10, 1905, 22 p. — *Hem.*

418. Capsidae Stålianae secundum specimina typica redescriptae. I, II. — ÖFVS. XLVII, N:o 12, 1905, 20 p. — *Hem.*

419. Capsidae in Venezuela a D:o D:re Fr. Meinert collectae enumeratae novaeque species descriptae. — ÖFVS. XLVII, N:o 19 (Sep. 20!), 1905, 39 p., 1 t. — *Hem.*

420. Ad cognitionem Capsidarum Australiae. II. — ÖFVS. XLVII, N:o 20 (Sep. 21!), 1905, 9 p. — *Hem.*

421. Ad cognitionem Capsidarum aethiopicarum. III. — ÖFVS. XLVII, N:o 21 (Sep. 22!), 1905, 9 p. — *Hem.*

*421 a. En för det finska naturhistoriska området ny Capsid. — MFFlF. XXXI, 1904, 34—35. — *Hem.*

422. Insekternas själslif, belyst af våra dagars forskningar. — FT. LVIII, 1905, 210—222, 400—418. LIX, 305—329. — *Psych., ins.*

423. Ueber die Verwendung des Gattungsnamen Lopus (Heteroptera, Capsidae). — Wien. Ent. Zeit. XXV, 1906, 216. — *Hem.*

424. Trois Capsides nouveaux pour la faune française. — Bull. Soc. Ent. France 1905, 8—9. — *Hem.*

425. Les espèces du genre Phimodera trouvées en France. — Ibid., 61—64. — *Hem.*

426. Husflugan. En naturhistorisk monografi. — Kalend. utg. af Sv. Folkskol. Vänner 1905, 46—63. — *Dipt.; biol., an.; pop.*

426 a. Urostylis instructivus, a New Species of the Family Urostylidae. — Ent. Monthly Mag. (2) XVI, 1905, 64—65. — *Hem.*

426 b. Descriptions of two new species of Hemiptera-Heteroptera from Spain. — Trans. Ent. Soc. London 1905, 52—54. — *Hem.*

427. Hemipterologische Spekulationen. I. Die Klassifikation der Capsiden. — Festschr. f. Palmén. I. H:fors 1905—07, (Sep. 1905), 58 p., 1 Stammbaumst. — *Hem.*

1906. *428. Monographia generis Heteropterorum Phimodera Germ. — ASSF. XXXIII, 1908, N:o 8, (1906), 51 p., 2 t. — *Hem.*

429. Capsidae in prov. Sz'tschwan Chinae a D:o D:re G. Potanin et M. Beresowski collectae. — Ann. Mus. Zool. Acad. Scienc. Petersb. X, 1906, 1—81. — *Hem.*

430. A new Ethiopian Species of Helopeltis. — Ent. Monthl. Mag. (2) XVII, 1906, 111—112. — *Hem.*

431. Pameridea nov. gen., eine Capside, die in Südafrika die Bestäubung von Roridula gorgonias besorgt. — Zool. Anzeig. XXX, 1906, 723—726. — *Hem.; biol.*

432. Ausgewählte Kapitel aus O. M. Reuter's „Revisio critica Capsinarum" als Beitrag zur Biologie und Morphologie der Capsiden ins Deutsche übertragen von Dr. Embr. Strand, überarbeitet von Dr. Th. Hüeber und Dr. J. Gulde. — Jahresb. Ver. vaterl. Kult. Württ. 1906, 263—311. — *Hem.; biol., anat.*

1907. 433. Hemipterologische Spekulationen. II. Die Gesetzmässigkeit im Abändern der Zeichnung bei Hemipteren (besonders Capsiden) und ihre Bedeutung für die Systematik. — Festschr. f. Palmén II, 1905—07, (Sep. 1905), 29 p., 1 t. — *Hem.*

434. Capsidae novae in insula Jamaica mense Aprilis 1906 a D. E. P. Van Duzee collectae. — ÖFVS. XLIX, N:o 5, 1907, 27 p. — *Hem.*

435. Ad cognitionem Capsidarum aethiopicarum. IV. — Ibid. N:o 7, 1907, 27 p. — *Hem.*

436. Über die westafrikanische Kakao-„Rindenwanze". — Zool. Anzeig. XXXI, N:o 4, 1907, 102—105. — *Hem.*

437. Über die Gattung Valleriola Dist. — Wien. Ent. Zeit. 1907, 211—214. — *Hem.*

*438. Chrysochraon poppiusi Miram, en för finska området ny orthopter. — MFFlF. XXXIII, 1907, 21. — *Orth.*

*439. Tvenne sällsynta skalbaggar, återfunna vid Åbo. — MFFlF. XXXIII, 21—22. — *Col.*

*440. Oceller felslagna hos en lygæid (Aphanus phoeniceus Rossi). — MFFlF. XXXIII, 22, 177—178. — *Hem.*

*441. „Sotare" bland bina. — MFFlF. XXXIII, 23—24, 173—174. — *Hymen.*

*442. Nya anteckningar om finska Neuroptera. — MFFlF. XXXIII, 24—31. — *Neur.*

443. En nordamerikansk hemipter funnen i Norge. — Ent. Tidskr. XXVIII, 1907, p. 81—82. — *Hem.*

444. Note sur Stâlia boops Schioedte. — Bull. Soc. Ent. Fr.ce, 1907, 181—183. — *Hem.*

445. Djurens själ belyst af våra dagars forskning. Stockholm 1907, 8:o 107 p.
FT. LXV, 1908, 231—232.
Die Seele der Tiere im Lichte der Forschung unserer Tage. Übersetzt von Dr Max Buch. — Leipzig, 8:o, T. O. Weigel, 1908, 112 p.
Eläinten sielu aikamme tutkimuksen valaisemana. Suomentanut Y. Tuomikoski. — Jyväskylässä, 1909, 135 p. — *Psych.*

*446. Verzeichniss meiner bisher veröffentlichten zoologischen Publicationen. Meinen geehrten Korrespondenten, wie auch den Herren Vorsteher der zoologischen Museen und Bibliotheken verbindlichst gewidmet. [N:is 1—378 = Separatdruck aus N:o 477] N:is 379—445. — Helsingfors 1907, 29 p. — *Bibliogr.*

447. „Intelligensen" hos insekterna enligt våra dagars forskning (vide n:o 422). — FT. LXIII, 1907, 203—222. (Sep. 20 p.). — *Biol., psych.*
Hyönteisten älystä nykyajan tutkimusten mukaan. — LY. XII, 1908, 81—87, 145—150, 200—204. — *Psych.*

448. Capsidae novae palaearcticae. — Ann. Mus. Zool. S:t P:bourg XII, 1907, 484—499. — *Hem.*

449. Einige von A. Becker und A. Kouschakewitsch benannte Hemiptera-Heteroptera. — Ann. Mus. Zool. S:t P:bourg XII, 541—545. — *Hem.*

450. Eine neue paläarktische Lygaeiden-Gattung von der Unterfamilie Oxycarenina Stål. — Ann. Mus. Zool. S:t P:bourg XII, 1907, 598—600 (Sep.). — *Hem.*

451. Species nova generis Reduviidarum Lisarda Stål. — Ann. Mus. Zool. S:t P:bourg XII, 601, 602. — *Hem.*

452. Eine neotropische Capside als Orchideenschädling in europäischen Warmhäusern. — Zeitschr. f. wiss. Ins.-biol. III (XII), 1907. H. 8, 251—254. — *Hem.*

453. Capsidae in Brasilia collectae in Museo I. R. Vindobonensi asservatae. — Ann. Nat. Hofm. Wien XXII, 1907, 33—80. — *Hem.*

454. Capsidae tres cubanae. Die drei von Guérin in Ramon de la Sagras „Histoire physique, politique et naturelle de l'Ile de Cuba" beschriebenen Capsiden neu beschrieben. — Ann. Nat. Hofm. Wien XXII, 1907, 147—149. — *Hem.*

455. Capsidae mexicanae a Do. Bilimek collectae in museo i. r. Vindobonensi asservatae enumeratae. — Ann. nat. Hofm. Wien XXII, 1907, 150—179. — *Hem.*

456. Capsidae quinque novae in Tombillo (Chile) lectae. — Ann. Nat. Hofm. Wien XXII, 1907, 180—182. — *Hem.*

457. Capsidae quatuor novae regionis Australicae. — Ann. Nat. Hofm. Wien XXII, 1907, 183—186. — *Hem.*

458. Capsidae javanicae novae vel minus cognitae. — Ann. Nat. Hofm. Wien XXII, 1907, 187—189. — *Hem.*

459. Sur quelques variétés prétendues des genres Palomena Muls. et Rey, Nezara Am. et Serv. — Bull. Soc. Ent. France, 1907, N:o 13, 209, 210. — *Hem.*

1908. *460. Om förekomsten af Leptophyes punctatissima Bosc. i Finland. — MFFlF. XXXIV, 1908, 84, 85. — *Orth.*

*461. [*Acridium aegypticum* L. funnen på torget i Helsingfors]. — MFFlF. XXXIV, 194, 263, 335. — *Orth.*

462. Eccritotarsus genetivus Dist. eine Cyllocorarie. — Wien. Ent. Zeit. XXVII, 1908, p. 53—55. — *Hem.*

463. Die hemipterologischen Arbeiten W. L. Distants und speziell die Valleriola-Frage. — Wien. Ent. Zeit. XXVII, 1908, p. 85—90. — *Hem.*

464. Noch eine Velocipeda-Art. Velocipeda biguttulata n. sp. — Wien. Ent. Zeit. XXVII, 1908, 90, 91. — *Hem.*

465. Hemisphaerodella mirabilis n. gen. et sp., eine merkwürdige Capsiden-Gattung aus den Antillen. — Wien. Ent. Zeit. XXVII, 297—298. — *Hem.*

466. Bemerkungen über Nabiden nebst Beschreibungen neuer Arten. — Mém. Soc. ent. Belg. XV, 1908, 87—130 p. — *Hem.*

467. Sur Ischnocoris hemipterus Schill. et I. angustulus Boh. — Bull. Soc. Ent. France, 1908, N:o 8, 128—131. — *Hem.*

468. On the nomenclature of some (British) Hemiptera-Heteroptera. — Ent. Monthl. Mag., 2nd Ser., Vol. XIX, 22–29. — *Hem.*

1909. *469. Charakteristik und Entwickelungsgeschichte der Hemipterenfauna (Heteroptera, Auchenorrhynchia und Psyllidae) der palaearktischen Coniferen. — ASSF. XXXVI. N:o 1, 1909, 129 p. — *Hem.*

470. Bemerkungen über nearktische Capsiden nebst Beschreibung neuer Arten. — ASSF. XXXVI, N:o 2, 1909, 86 + III p. — *Hem.*

471. [et B. Poppius:] Monographia Nabidarum orbis terrestris. Pars prior. Cum tabula colorata. — ASSF. XXXVII, N:o 2, 1909, 62 p. — *Hem.*

472. Capsidae Argentinae. Kritische und neue argentinsche Capsiden. — ÖFVS. LI, A, N:o 13, 1908—09, 20 p. — *Hem.*
ÖFVS. LI, C, Förh. p. 26.

473. Ad cognitionem Reduviidarum palaearcticarum fragmenta. — ÖFVS. LI, A, N:o 16, 30 p. — *Hem.*
ÖFVS. LI, C, Förhandlingar, p. 35.

474. Genera quatuor nova divisionis Capsidarum Restheniaria. — ÖFVS. LI, A, N:o 24, 12 p. — *Hem.*

475. Capsidae tres novae in Brasilia a D:o D:re R. F. Sahlberg collectae. — ÖFVS. LI, A, N:o 25, 6 p. — *Hem.*

476. Anthocoridae novae. — ÖFVS. LI, A, N:o 26, 7 p. — *Hem.*

*477. Mit A. Luther: Bibliotheca Zoologica Fenniae. Herausgegeben von Zoologen Finlands. II. — AFFlF. 24, 1909 (p. 1—144 vide N:o 389) 145—361. — *Bibliogr.*

*478. Mitteilungen über einige finnländische Copeognathen. — MFFlF. XXXV, 1909, 204—210. — *Corr.*

*479. Silmäys hyönteisten elämään. — Oma Maa, $^{13}/_{7}$, IV, Porvoossa 1909, 188—200, 13 f. — *Ins.; biol.*

480. Die Arten der Nabiden-Gattung Gorpis Stål. — Ann. Soc. ent. Belg. LIII, 1909, 423—430. — *Hem.*

481. Quelques mots sur les Phyllomorphes. — Bull. Soc. ent. Fr. 1909, N:o 15, 264—268. — *Hem.*

1910. 482. Neue Beiträge zur Phylogenie und Systematik der Miriden nebst einleitenden Bemerkungen über die Phylogenie der Heteropteren-Familien. Mit einer Stammbaumstafel. — ASSF. XXXVII, N:o 3, 1910, IV + 167 p. — Anhang I: Beschreibung einer mit Flügel-Hamus versehenen Heterotominen-Gattung (Ellenia gretae n. gen., n. sp.). — Ibid., p. 168, 169. — *Hem.*
ÖFVS. LI, C, 1908—09, p. 47. — ÖFVS. LII, C, 1910—11, N:o 4, p. 35, 36.

*483. [Homalomyia-larver i menniskans tarmkanal]. — MFFlF. XXXVII, 1910, 5, 6, 230. — *Dipt.*

484. Mitteilungen über einige Hemipteren des Russischen Reiches. — Horae Soc. Ent. Ross. XXXIX, 1910, 73—88 (Sep. 16 p.). — *Hem.*

485. Diagnoses praecursoriae Miridarum divisionis Restheniaria. — Ann. Mus. Nat. Hung. VIII, 1910, 15—33. — *Hem.*

486. Species quinque novae generis Reduviolus Kirby, Subgeneris Stenonabis Reut. — Ann. Soc. ent. Belg. LIV, 1910, 134—138. — *Hem.*

487. Zur Kenntnis der Miriden-Gattung Eurycyrtus M. — Ann. Soc. Ent. Belg. LIV 1910. 49—55. — *Hem.*

1911. 488. [und B. Poppius:] Zur Kenntnis der Termatophyliden. — ÖFVS. LIV, 1911—12, A, N:o 1, 17 p. — *Hem.*
ÖFVS. LIV, 1911—12, C, Förhandl. p. 10, 11.

489. Om de palearktiska arterna af hemiptersläktet Notostira Fieb. — MFFlF. XXXVII, 1911, 118—129, 223—227. — *Hem.*

490. De palearktiska arterna af vägglus-familjen (Cimicidae). — MFFlF. XXXVII, 1911, 132—140, 227—228. — *Hem.*

*491. De inom Östersjöbäckenet funna Aphelocheirus-arterna. — MFFlF. XXXVII, 1911, 140—143, 228—229. — *Hem.*

*492. Massuppträdande af Coccinella-arter. — MFFlF. XXXVIII, 1911, 5, 6. — *Col.*

*493. Insektlifvet i källare. — MFFlF. XXXVIII, 19, 20. — *Ins., coll.*

*494. Notostira tricostata (Costa). — MFFlF. XXXVIII, 20, 21. — *Hem.*

495. Studien über die paläarktischen Formen der Hemipterengattung Notostira Fieb. — Revue Russe d'Entom., XI, 1911, 319—327 (Sep. 9 p.). — *Hem.*

496. Protocimex siluricus Mob. und meine Auffassung desselben. — Zool. Anz. XXXVIII, N:r $^{14}/_{15}$, 1911, 360—361.
Protocimex siluricus och min uppfattning af densamma. — Ent. Tidskr. 1911, 205—206. — (*Hem.*), *pal.*

497. Ytterligare fynd af Teratocoris herbaticus Uhler i Skandinavien. — Ent. Tidskr. 1911, 206. — *Hem.*

498. and Poppius: Bryocorina nonnulla aethiopica descripta cum tab. col. — Trans. Ent. Soc. London 1911, 408—416, 1 t. — *Hem.*

1912. 499. Bemerkungen über mein neues Heteropterensystem. — ÖFVS. LIV, A, N:o 6, 62 p. — *Hem.*
ÖFVS. LIV, 1911—12, C, Förhandl. p. 4, 5

500. Hemipterologische Miscellen. — ÖFVS. LIV, A, N:o 7, 76 p. — *Hem.*
ÖFVS. LIV, 1911—12, C, Förhandl. p. 5, 6.

501. Zur generischen Teilung der paläarktischen Acanthiaden. — ÖFVS. LIV, N:o 12, 24 p. — *Hem.*
ÖFVS. LIV, 1911—15, C, Förhandl. p. 11.

*502. Några uppgifter för de entomologiska sommarexkursionerna. — MFFlF. XXXVIII, 1912, 94—100, 204—206 (1. Aphelocheirus. — 2, 3. Cimicidae på olika värdsdjur. —4. Polyctenidae). — *Hem., Cimicidae.*

*503. Närings- och äggläggningsinstinkten i artutbredningens tjänst. Ännu ett önskemål för sommarens entomologiska exkursioner. — MFFlF. XXXVIII, 141—149, 206—208. — *Biol.*

*504. Ludeheimon (*Cimicidae*) palearktisista lajeista. — LY. XVI, 1912, 87—92, 163—169. — *Hem.*

1913. 505. Ausführliche Beschreibungen einiger paläarktischen Hemipteren. — ÖFVS. LV, 1912—13, A, N:o 14, 1 t., 111 p. — *Hem.*
ÖFVS. LV, 1912—13, N:o 5, p. 30.

506. Amerikanische Miriden. — ÖFVS. LV, 1912—13, A, N:o 18, 1 t., 64 p. — *Hem.*
ÖFVS. LV, 1912—13, C, N:o 5, p. 30.

507. Insekternas levnadsvanor och instinkter intill gryningen av de sociala instinkterna. Stockholm 1913, 8:o, 455 p. — *Ins., psych.*
Lebensgewohnheiten und Instinkte der Insekten bis zum Erwachen der sozialen Instinkte. Vom Verfasser revidirte Übersetzung nach dem schwedischen Manuskripte besorgt von A. und M. Buch. — Berlin, R. Friedländer & Sohn. 1913; XVI, 448 S., mit Abbildungen.
Hyönteisten elintavat ja vaistot, lukuunottamatta yhteiskunnittain eläviä. — Helsingissä, Kustannusosakeyhtiö Otava (viisi vihkoa). 1 vihko, 1913, 80 p.

508. Vägglusfamiljen (Cimicidae), dess fylogeni, systematik, ekologi och utbredning. — Ent. Tidskr., Stockholm, årg. 34, 1913, 1—21. — *Hem.*

509. Herr A. C. Jensen-Haarups bok om Danmarks Hemiptera-Heteroptera och mitt Miridsystem. — Ent. Medd. IV B, 1913, 381—383. — *Hem.*

510. Bemerkungen zu Oshanins Katalog der paläarktischen Hemipteren. — Ann. Soc. ent. Belg., LVII, 1913, 74 p. — *Hem.*

511. Die Familie der Bett- oder Hauswanzen (Cimicidae), ihre Phylogenie, Systematik, Oekologie und Verbreitung. — Zeitschr. f. wiss. Ins.-biol. IX (XVIII). Berlin, Schöneberg, 1913, p. 251—255, 303—306, 325—329, 360—364. (Sep.). — *Hem.*

512. mit Poppius: Über Cimex valdivianus Phil. — Wien. Ent. Zeit. XXXII (1 Nov. 1913), 237—238. — *Hem.*

513. mit Poppius: Über Sixeonotus luteiceps Reut. und Beschreibung einer neuen Bryocorine. — Ann. Soc. Ent. Belg. LVII, 1913, 278—79. (Sep. 2 p).. — *Hem.*

Dikter.

Karin Månsdotters saga. Med teckningar af C. Larsson. — Helsingfors 1880, 4:o, 83 p.
Dikter. — Helsingfors 1881, 8:o, 172 p.
Nya dikter. — Helsingfors 1898, 8:o, 160 p.
Dikter. Tredje samlingen. — Helsingfors 1906, 8:o, 94 p.
Nattens sånger. Dikter. Fjärde samlingen. — Helsingfors 1911, 8:o, 105 p.
I brytningstid. Tolf dikter. — Helsingfors 1899, 8:o, 55 p.
Vilse. — Helsingfors 1899, 8:o, 55 p.
Finland i dess skalders sång. En samling fosterländska sånger ordnade i tidsföljd. — Helsingfors 1894, 8:o, 317 p.
Ur Finlands sång. — Helsingfors 1890, 424 p. (O. M. Reuter, p. 368—377).
Tillfällighetsdikter i pressen.

Öfriga skrifter.

Finlands natur, folk och kultur. — Borgå 1889, 173 s.
Intressanta reseruter i Finland. — Af Peregrinus. — Helsingfors 1892, 39 p.

La Finlande et les Finlandais. Itinéraire historique et descriptif. — Helsingfors 1889, 207 p. (Publication de la Soc. des Touristes de Finlande. — Vide 255.)

Finland i ord och bild, dess natur, folk och kultur. Med talrika illustrationer. — Stockholm 1901, 8:o, 964 p.

Åland. Vägledning för turister och badgäster som besöka Åland och Mariehamn. — Särtryck ur föreg. arbete, 49 s.

Suomea samoilemassa. Maamme luonto, kansa ja kehitys. Runsaasti kuvitettu. — Helsinki 1904, 976 p.

F. T. LIII, 71, 72.

Ett mycket stort antal artiklar i dagspressen rörande utkommen litteratur äfvensom andra af populär art, delvis i vetenskapliga ämnen.

Förkortningar i ofvanstående förteckning.

AFFlF. = Acta Societatis pro Fauna et Flora fennica.
ASSF. = Acta Societatis Scientiarum Fennicae.
Fisk t. = Fiskeritidning för Finland.
FT. = Finsk Tidskrift.
FHS. = Finska Hushållningssällskapet.
Kal.l. = Suomen Kalastuslehti.
KVAH. = K. Svenska Vetenskaps Akademien s. Handlingar.
MFFlF. = Meddelanden af Soc. pro Fauna et Flora Fennica.
NFFlF. = Notiser ur Soc. pro Fauna et Flora fennica förhandlingar.
Sep. = Separataftryck.
ÖFVS. = Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar.
ÖVAF. = Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps Akademiens Förhandlingar.
Ref. = Referat.

[ ] = notiser utan egen titel.
* betecknar att skriften angår Finlands fauna.
Med *kursiv stil* och i förkortad form (*Hem.*, *geogr.*, *biol.*, *psych.* m. m.) angifves djurgruppen eller ämnet som afhandlas uti skriften i fråga.
Med petit skrift citeras anmälningar (åren 1907—1913 blott undantagsvis).

Öfver professor O. M. Reuter ingå biografiska uppgifter och minnesord uti följande publikationer:

Biografinen Nimikirja. Helsingissä 1883, s. 574—575.
Nordisk Familjebok, XIII 1889, p. 984—985. — (Fredr. Elfving.)
Finlands Universitet 1828—1890 af Robert A. Renvall. Helsingfors 1891, s. 304—308.
Finsk Biografisk Handbok utgifven af Tor Carpelan. Helsingfors 1893, s. 1787—1790.

Luonnon Ystävä XVII. Helsingissä 1913, s. 155—161. Porträtt. — (John Sahlberg.)
The Entomologist's Monthly Magazine. 2nd Series, XXIV, oct. 1913, p. 230—231. Porträtt. (E. Bergroth.)
Revue Russe d'Entomologie, XIII 1913, n:o 34, p. XIX—XXVI. Porträtt. — (B. Oshanin.)
Meddelanden af Soc. pro Fauna et Flora fennica, h. 40; uti Årsberättelsen 1914, s. 212—215. Porträtt. — (J. A. Palmén.)

Aug. of Schulten.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

MINNESTAL

ÖVER

FRIHERREN DOCENTEN, FIL. DR.

AUGUST BENJAMIN AF SCHULTÉN

HÅLLET VID

FINSKA VETENSKAPS-SOCIETETENS ÅRSHÖGTID DEN 29 APRIL 1913

AV

WILHELM RAMSAY.

HELSINGFORS 1916.
FINSKA LITTERATUR-SÄLLSKAPETS TRYCKERI.

Ärade åhörare!

Underrättelsen om August af Schulténs bortgång den 29 sept. förlidet år påminte oss om en medlem av vårt lärda sällskap. vilken vi icke sett i vår krets sedan mera än ett decennium. Vi erinrade oss en redan halvt förgäten universitetslärare, som i tiden med nit och framgång verkat vid vår högskola. Vi tänkte på en vetenskapsman, vars forskaregärning få här hemma kunde bedömma, men om vilkens arbete man hört att de voro högt skattade överallt, där den anorganiska kemien och mineralogien hava sina idkare och vänner.

I dag höves det oss att åter låta våra tankar för en stund dröja vid den bortgångnes liv och verksamhet.

August Benjamin af Schultén föddes i Viborg den 19 dec. 1856. Hans föräldrar voro hovrättspresidenten, sedermera viceordföranden i K. Senatens justitiedepartement, Friherre Otto Reinhold af Schultén och hans maka i första giftet Anna Karolina Törnquist. Redan i Schulténs barndom flyttade familjen till Helsingfors, där han gick i skola och tillbragte vintrarna. Under somrarna åter vistades han på fädernegården, det vackra Prostvik i Nagu.

Själv väl utrustad på förståndets och karaktärens vägnar växte Schultén upp i en krets av högt begåvade bröder, av vilka flere länge skola minnas för sina inlägg i den vetenskapliga och kulturella utvecklingen hos oss. Vetenskapligt påbrå fanns även i släkten. Schulténs farfader var en känd vetenskapsman och professor i matematiska och fysiska ämnen, hans farbroder professor i matematik. Alla dessa omständigheter samt en omsorgsfull uppfostran och den bästa undervisning riktade ynglingens håg mot en lärd bana.

Bliven student år 1873 (från Helsingfors privatlyceum) egnade Schultén sig åt studier inom den fysisk-matematiska sektionen. Kemien blev hans huvudämne. Efter avlagd filosofiekandidatexamen (den 19 maj) 1877 (prom. fil. mag. 21. V. s. å.) fortsatte han sina studier i detsamma och var under läse-

året 1878—1879 t. f. laborator vid den kemiska inrättningen samt höll redan då en föreläsningskurs i grunderna av den anorganiska kemien.

Hösten 1879 begav sig Schultén till Paris för att förkovra sig i sin vetenskap. Han vände sig till Riban och fick arbeta under dennes ledning vid „Laboratoire de la faculté des sciences de la Sorbonne". Här experimenterades vid denna tid ivrigt inom ett område av den anorganiska kemien, som vi för korthets skull vilja kalla mineralsyntes. Redan högt utvecklad av en Daubrée, en S:te Claire Deville, en Hautefeuille och andra, hade denna gren av vetenskapen av Friedel, Fouqué, Bourgeois m. fl. drivits till blomstring.

Det såg ut som om de mineralsyntetiska experimenten å ena sidan skulle kunna giva svaret på flere viktiga geologiska frågor, å andra sidan öppna utsikter till framställning av nya oorganiska föreningar eller alldeles nya grupper av sådana. Förhoppningarna voro ganska stora på ett uppsving för den anorganiska kemien i tävlan med den unga och livskraftiga organiska kemien, som då drog till sig de flesta forskares intresse. Schultén greps av entusiasmen och förblev under hela sitt liv en trogen anhängare av denna riktning och en flitig arbetare i dess tjänst. Men härigenom kom han som forskare att stå utanför den strömning, som under hans bästa år var mäktigast inom hans vetenskap och gav densamma en så kraftig utveckling och många nya impulser. Han blev dock ingalunda helt främmande för den organiska kemien, ty senare finna vi honom bl. a. hålla föreläsningar över densamma.

Resultaten av sina experiment under denna första vistelse i Paris framlade Schultén i sitt licentiatspecimen: „Syntes af analcim" (1881). Här beskrives för första gången framställningen av en zeolit, d. v. s. ett silikat med kristallvatten. Den sålunda erhållna syntetiska produkten visade även samma egendomliga optiska anomalier som det naturliga mineralet. Själva avhandlingen, som redogjorde för dessa rätt märkliga resultat, omfattade endast 32 små glest tryckta sidor och är väl den minsta, som utgivits för vinnande av högsta lärda grad efter införandet av nu gällande disputationsordning vid Helsingfors universitet. Den bedömdes med rätta väl av opponenten, Wiik, och efter avlagd licentiatexamen (27. IV. 1881) blev Schultén utan att hava utgivit några vidare publikationer utnämnd till docent i kemi den 6 dec. 1881. [1])

Läseåret 1881—1882 arbetade Schultén åter i Paris på samma laboratorium som förra gången. Han hade nu jämte andra aspiranter sökt den efter J. J. Chydenius' avgång lediga professuren i kemi. Men han fullföljde icke

[1]) Det må påpekas, att man vid denna tid överhuvud fordrade vida mindre literära prestationer av dem, som föreslogos till docenter, än senare.

sina avsikter genom att utgiva en akademisk avhandling, och i själva verket var blott ett par mindre uppsatser det synliga resultatet av detta arbetsår. Det var nämligen så, att den art av forskning Schultén bedrev var nyckfull med hänsyn till utbytet. Omsorgsfullt planerade och arbetsdryga experiment kunde på grund av oförutsedda orsaker bliva resultatlösa eller i bästa fall lämna andra produkter än de väntade.

Efter ett års vistelse i hemlandet begav sig Schultén åter till utlandet (1883—1884), nu såsom innehavare av universitetets dåförtiden största stipendium, Alexandersstipendiet. Även nu arbetade han större delen av tiden i Paris hos Riban. En månad vistades han dock hos Bunsen i Heidelberg på dennes laboratorium för anorganisk och analytisk kemi.

Sedan förblev Schultén från 1884 till 1901 verksam som lärare vid vårt universitetets kemiska inrättning. Såsom sådan var han en av de bästa vi haft. Han undervisade i främsta rummet anorganisk kemi, men föreläste även organisk kemi, i synnerhet då han under en lång tid hade ledningen och examineringen av de s. k. medikofilarna i sin hand. Mest gav han kurser av elementär art, och det var han, som bl. a. införde, att de studerande genom en grundkurs, förenad med repititioner, förbereddes till laboratoriearbetet. Som föreläsare beundrades Schultén icke mindre för framställningens klarhet än för säkerheten och elegansen vid experimentens utförande, och föredragets väl avvägda innehåll väckte eftertanke hos åhörarna och intresse för den kemiska vetenskapen. — Som laboratoriepedagog ledde Schultén huvudsakligen undervisningen i reaktionsövningar och analys. Härvid genomförde han i laborationsordningen flere reformer, som visat sig ändamålsenliga och ännu i huvudsak bestå. Han lade stor vikt på de studerandes uppfostran till propert arbetssätt, precision och samvetsgrannhet. I sådan avsikt infördes en rigorös kontroll, som för mången laborant kanske kändes besvärlig. Men hos dem, som följt föreskrifterna i Schulténs s. k. kokböcker, d. v. s. hans läroböcker i analys, och upptäckt de i proven förborgade grundämnena eller vid den kvantitativa analysen ernått vägningsresultat inom de tillåtna felgränserna, stärktes tilliten till den egna förmågan att utföra även de finaste bestämningar. För den intresserade studenten var Schultén icke endast den fordrande kontrollanten, utan även den rikt givande läraren, som sparade varken på sin tid eller på vänliga råd ur sin erfarenhet. Och icke allt som han sådde föll på hälleberget. De, som voro mindre intresserade av analysens finesser, ansågo väl Schultén för något pedantisk. För slarvarna och fuskarna var han svår, men även vid den snoppande behandlingen av dessa syndare förnekade sig icke hans artiga sätt. Nu

långt efter dessa tider får man av alla hans elever, även av dem, som fingo del av hans onåd, höra endast erkännande uttalanden om de goda avsikterna och den nyttiga effekten av hans pedagogiska metoder. — Schultén har sammanfattat sina erfarenheter som universitetslärare i en tänkvärd skrift: „Om undervisning i kemi."

Under sina lärareår skötte Schultén en kortare tid professuren i kemi (vårterminen 1884) och tvänne gånger professuren i geologi och mineralogi (v. t. 1886 och v. t. 1893). Han var nämligen också en skicklig kristallograf och kunnig mineralog, och geologien hade i honom en kunskapssökande adept.

Vid sidan av sin trägna undervisning fick Schultén tid till egna vetenskapliga arbeten. Allt jämt utkommo än i C. R. de l'acad. des Sc. i Paris, än i franska mineralogiska eller i franska kemiska sällskapets tidskrifter små koncentrerade redogörelser för hans synteser av mineral och nya oorganiska substanser. — För dessa arbeten hedrades han år 1893 av Franska vetenskapsakademien med „mention honorable" vid utdelningen av „le prix Bordin". [1])

År 1891 hade Schultén blivit ledamot av vårt lärda sällskap. Inom detsamma väckte han år 1898 ett förslag om att Societeten skulle utverka medel för anställande av en kemisk analytiker till forskares tjänst. Förslaget vann icke tillräckligt understöd.

Även utanför de snäva gränserna för sitt specialgebit som forskare och området för sin undervisning sökte Schultén befordra det vetenskapliga livet hos oss. Han ansåg, att „där intresset för naturen fanns, borde det underhållas och stegras, där det icke fanns, väckas genom enständig och förnyad erinran om naturvetenskapernas vinningar". I sådant syfte utgav han jämte fil. mag. Uno Collan under medverkan av inhemska fackmän tidskriften „Naturen". Den var mycket väl redigerad och innehållsrik, men måste upphöra efter två årgångar (1893 och 1894) i brist på understöd från den allmänhet, till vars bästa den utgavs.

Vid arbetet med denna tidskrift hade Schultén mycken hjälp av sin hustru, Hanna av Schultén, född Törngren, som från utländska naturvetenskapliga publikationer översatt ett stort antal artiklar för „Naturen". Gift år 1883 med Aug. av Schultén, avled hon efter långvarig sjuklighet år 1900.

[1]) . . M. A. de Schultén a en général opéré en tubes scellés, au dessous de 250°, même sous la pression ordinaire. Par l'emploi de reactifs variés il a obtenu ainsi l'analcime, la strengite, la zincosite, la molybdenite ainsi que deux sels de Stassfurt, la kaïnite et la tachyhydrite. L'analcime obtenue dans ces recherches offre, avec une rare perfection, les anomalies optiques caractéristiques de cette espèce minerale. Quant à la reproduction de la malachite, elle permet d'intervoir le jour où cette precieuse substance deviendra 'objet d'une fabrication artificielle facile . . . (C. R. CXVII. p. 970),

Det är från lärareåren på 1880- och 1890-talen som docenten Atte Schultén står tydligast för vårt minne. Mest fann man honom i hans rum på universitetets kemiska laboratorium, vandrande mellan flaskor, byretter och glas, som belamrade alla bord och bänkar. I den slitna lädersoffan fick den besökande dela utrymmet med de där uppstaplade böckerna och tidskrifterna. Schultén sög nästan ständigt på en cigarr — Bunsen hade lärt honom, att en kemist, som icke röker, knappast är en riktig kemist. — Hans behagliga anletsdrag med den vackert välvda pannan och det klara, pigga ögonparet bakom pincenezen torde väl sent glömmas, och, i minnet hos alla, som sett honom laborera eller utföra föreläsningexperiment, kvarstår bilden av den fint formade handen, som så lätt och elegant lyfte och vände profrör, kolvar och dekanterglas. — I sitt sätt var Schultén något reserverad och avmätt, i synnerhet mot nya bekantskaper, liksom om han velat pröva dem. Men när detta stadium i relationerna övervunnits genom flitigare umgänge och gemensamma intressen, blev han mera oförbehållsamma och söktes ofta och gärna både för sitt underhållande sällskap och för de oegennyttiga och goda råd han gav vid vetenskapligt arbete och i andra frågor. De jämförelsevis få vänner, som helt vunnit hans tillgivenhet och med vilka han å sin sida helst umgicks, vittna, att han var den mest trofasta kamrat, som funnits. Detta karaktersdrag, trofastheten, visade sig ock i den hängivenhet, med vilken han höll sig till sin i ungdomen valda forskningsriktning. En parallell till detsamma var hans uthållighet i antipatier mot förhållanden och personer, vilka ej vunnit hans gillande. Humoristisk och ironisk som han var, kunde han själv skämta över denna sin nästan originella envishet, men förmådde icke frigöra sig från den, trots de obehagligheter han beredde sig genom densamma.

En lärare med Schulténs förmåga hade bort varaktigt bindas vid vårt universitet genom en e. o. professur, och erbjudandet av en sådan åt honom hade tillika varit ett erkännande åt hans vetenskapliga förtjänster. I själva verket väckte professorn i mineralogi, Wiik, redan år 1889 förslag därom. Det understöddes av professorn i kemi och vann fysisk-matematiska sektionens medhåll. Saken hade således tagit en gynnsam början, men så låg där en stjälpande stötesten i dess väg. Professorn i kemi önskade att e. o. professorns skyldighet att deltaga i den praktiska undervisningen skulle bestämmas sålunda, att han egde „biträda vid laboratoriearbetena enligt närmare överensskommelse med ordinarie professorn". Schultén åter önskade fixera e. o. professorns åligganden så, att han egde „leda en del av den praktiska undervisningen enligt av vederbörande stadfäst plan efter närmare överenskommelse med ordinarie

professorn". Med sin formulering ville han betona, att den e. o. professorn i kemi, i likhet med alla andra universitetslärare i samma ställning, skulle få anordna sin undervisning som han bäst fann och därvid egde följa blott fakultets eller konsistorii, icke annan lärares anvisningar. Då någon sammanjämkning icke kunde fås till stånd, och Schultén stod fast vid sitt villkor, tog professor Wiik sitt förslag tillbaka, och därmed var saken förfallen. Schultén hade genom sin hållning i frågan avsagt sig utsikterna till en vida förmånligare anställning, än den han sedan ännu under mera än ett decennium innehade, men för honom hade det här gällt icke endast att få sitt personliga krav på oberoende tillfredsställt, utan lika mycket att kämpa för en princip. Att fysisk-matematiska sektionen icke delade hans uppfattning, såg han icke utan bitterhet.

När några år senare adjunkturen i kemi blivit inrättad, reflekterade Schultén icke på densamma, för att icke avsäga sig den större frihet som lärare han i egenskap av docent åtnjöt.

Även senare upptogs tanken på Schulténs föreslående till e. o. professor, men han avböjde alla planer i denna riktning under hänvisning till den under tiden (1894) utkomna språkstadgan. Han ansåg sig nämligen icke ega sådana kunskaper i finska som i denna fordras. Försäkringar att han bra skulle bestå ett prov, då han ju med framgång använde finska vid den personliga undervisningen av laboranterna, förändrade icke hans uppfattning. „Han ville icke hava några gracer."

Som ett erkännande av Schulténs förtjänster och för att sätta honom i tillfälle att efter 16 års oavbruten lärareverksamhet egna sig helt åt sina forskningar tilldelades honom ett Rosenbergskt stipendium år 1901. Han ville arbeta på orter där bättre ressurser än här hemma stodo till buds och begav sig åter till Paris.

Där anknötos gamla förbindelser och stiftades nya, och snart var Schultén installerad i Laboratoire d'enseignement pratique de la Sorbonne hos sin förre lärare, den nu gamle Riban, och efter dennes avgång hos efterträdaren Oudard. Han erhöll i egenskap av „savant étranger" ett präktigt rum för sin räkning med nödig utrustning och behöll detsamma i tolv år intill sin död. Här återupptog han sina mineralsyntetiska arbeten med iver, och en riklig vetenskaplig produktivitet utmärker de tre år, under vilka han åtnjöt det nämnda reseunderstödet. Icke mindre än 26 uppsatser flöto under denna tid ur hans penna. Uppenbarligen var det förmånen av att kunna helt egna sig åt forskning samt det upplivande samarbetet och umgänget med de franska kemisterna och mineralogerna, som alstrade denna lust och framgång i arbetet. — Och han ar-

betade icke blott för egen räkning. Vi finna, att han under denna tid bistått flere franska kemister (såsom Colani, Blondel, Allain m. fl.) med kristallografisk identifiering och bestämning av produkterna av deras experiment.

Med vänskapens band knuten vid flere bland de franska kemisterna och vän av det franska språket, som han behärskade som en inföding, trivdes Schultén synnerligen väl i Paris och vande sig in i där rådande förhållanden. När sedan de tre stipendieåren gått till ända och återvändandet till hemlandet förestod, kunde han icke förmå sig att på nytt träda in i en universitetslärares enformiga och tidsödande värv, i synnerhet emedan han, efter vad som passerat, ansåg sig icke kunna få någon förmånligare ställning än docentens och laboratorns. En även nu till honom privat riktad uppmaning att låta föreslå sig till e. o. professor lyssnade han icke till på samma grunder som tidigare, utan anhöll och erhöll avsked från sin docentur (29. XII. 1904).

Det måste beklagas att en person med Schulténs intressen, begåvning och förmåga icke var säkrare fäst vid vårt universitet. Den lucka i lärarnas led, som uppstod genom hans avresa är ännu ej fylld. Sedan 13 år har bland dem saknats en specialforskare och speciallärare på den anorganiska kemiens område.

I augusti 1903 begav sig Schultén på uppdrag av ett franskt konsortium, som spekulerade på kopparmalmförekomsterna vid Sjangeli, jämte en fransk ingeniör till dessa gruvor i de skandinaviska fjällen. Experternas utlåtande var tillstyrkande, men någon uppgörelse kom ej till stånd mellan konsortiet och egarne av fyndigheterna. Ett intresse för gruvexpertis tyckes emellertid väckts hos Schultén, och i juli—augusti 1904 undersökte han för ett huvudsakligen av landsmän bestående konsortium till salu bjudna fyndigheter av bauxit i departementet Var i Sydfrankrike nära staden Brignoles. Man gav ett mycket förmånligt utlåtande om den i fråga varande aluminiummalmen, och detsammas riktighet bestyrktes genom en fyra månaders brytning under hans ledning. På grund härav inköptes fyndigheterna och belades med arbete under Schultén såsom teknisk ledare. Aluminiumhalten höll vad han i sina rapporter lovat (c:a 60 %), och tillgången var riklig, men kiselsyrehalten visade sig ojämn och gick ofta utöver den för god handelsvara tillåtna. Vidare blev företaget dyrare än som beräknats och måste mot slutet av år 1905 inställas på grund av brist på rörelsekapital. Schultén kvarstannade ännu till våren 1906 i Brignoles, där han trivdes synnerligen väl i Provences härliga natur, och hans redan något brutna hälsa tyckes hava förbättrats i det goda klimatet.

Under vistelsen i Brignoles erhöll Schultén åter ett gruvexpertisuppdrag, denna gång för svenska affärsmän, och företog för detta ändamål i sällskap

med en svensk ingeniör i september—oktober 1905 en resa till Tilfila i Algier, där enligt uppgift berg, rika på järnmalm skulle finnas. Den angivna förekomsten utgjordes emellertid blott av magnetitrik sand, tekniskt värdelös.

Efter dessa avvikelser från kemien återkom Schultén till sitt laboratorium i Paris. Hans besparingar från föregående tider voro dels insatta i företaget i Bringnoles, dels efter hand förtärda, och tidtals befann han sig i ekonomiskt betryck. Under sådana omständigheter var självfallet den vetenskapliga arbetsförmågan ej mera så stor som förr. Emellertid kom han under åren 1908—1909 i åtnjutande av „la subvention Commercy", stor 2,400 francs, utdelad av Faculté des Sciences vid Sorbonne åt honom för några närmare angivna mineralsyntetiska och kristallografiska arbeten. Endast en del av dem blev dock utförd. En orsak härtill var, att hans nedsatta synförmåga ej längre tillät honom använda mikroskop. Hans hälsa var redan bruten, och tidtals hade han rätt plågsamma känningar av sitt lidande.

Efter år 1909 arbetade Schultén icke mera regelbundet på sitt laboratorium och besökte detsamma mindre ofta än förut. Varken vänner eller släktingar känna till hans planer vid denna tid, men sannolikt har han ställt sina förhoppningar till en praktisk uppfinning, som skulle medföra pekuniär vinst. Allt sedan sin ankomst till Paris tyckes han vid sidan av det vetenskapliga arbetet sysslat med sökandet efter någon uppfinning som kunde patenteras. Efter vad landsmän, som träffat honom, erfarit angående dessa planer, har en mångfald av lovande utsikter föresvävat honom, och arten hos dessa låta ana en teknisk fantasi, som bjärt avsticker mot den torra nykterheten i hans forskareverksamhet. Hans förväntningar blevo besvikna, men från strandade försök gick han till nya experiment med hopp om bättre lycka.

Under dessa pariserår levde Schultén tillbakadraget i en enkel våning i Quartier latin. De landsmän, som uppsökte honom, funno samma muntra och vänfasta människa som här hemma. Med stort intresse visade han sitt laboratorium, där han — såsom en av visitörerna berättat — på väggen ovanför retorter och deglar förvarade en tavla av Corot, en studie av Henner och andra små läkerheter på måleriets område. Bland allt detta gick han omkring i sina oundvikliga galoscher och den lika oundvikliga cigarrstumpen mellan tänderna. Som artig värd bjöd han den gästande landsmannen till någon liten trevlig restaurang, där tiden snabbt förflöt under intressant och underhållande konversation.

Så levde han stilla och undangömd därborta, tills vi en dag förra hösten

erhöllo den oförmodade underrättelsen, att hans liv hade lyktats. En tid därefter följde vi hans stoft till dess viloplats i fosterjorden.

Det återstår nu att i korthet karakterisera hans forskaregärning.

Schultén intresserade sig för framställning av nya oorganiska föreningar, främst sådana, vilka förekomma som mineral i naturen eller genom isomofi eller sammansättning stå i relation till dem. Impulsen härtill mottog han under sina studieår i Paris och fortsatte sedan på den inslagna vägen. Under docenttiden i Helsingfors utvecklade och förbättrade han allt jämt sina metoder och hann i synnerhet mycket långt i konsten att få svårlösliga mineral, såsom exempelvis baryt, malakit m. fl. att bilda kristaller ur lösningar.

Medan Schultén arbetade i denna riktning hade forskningen angående mineralens bildning trätt i ett alldeles nytt skede. Å ena sidan hade man tack vare tekniska framsteg erhållit hittils okända möjligheter att göra synteser vid mycket höga temperaturer och höga tryck. Å andra sidan hade man i tillämpningar av fasreglerna, jämviktslagarna och andra erfarenheter från den fysikaliska kemiens område funnit förklaringen till flere processer vid mineralens bildning och kunde utgående från dessa lagar arbeta mera målmedvetet än förut och i samma riktning som naturen själv. Även Schultén önskade pröva dessa nya medel, såsom han anförde i sin till ansökan om det Rosenbergska stipendiet bifogade reseplan. Men han gjorde det icke — varför, låter sig ej utröna, — utan bedrev i stället även i Paris undersökningar enligt sina egna metoder, och är väl den som hunnit längst i mineralsynteser på våta vägen vid jämförelsevis låga temperaturer och för det mesta vid vanligt tryck. Icke mindre än 47 olika mineral hava av honom reproducerats och därutöver ett ungefär lika stort antal märkligare oorganiska föreningar framställts.

Hans redogörelser för de talrika synteserna äro alltid mycket koncentrerade och för det mesta affattade enligt samma mall, nämligen: „Om man förfar så eller så, erhålles den eller den substansen. Denna har den eller den sammansättningen, de och de fysikaliska och kristallografiska egenskagerna och är identisk med det eller det mineralet.“ Aldrig en inledande upplysning om att undersökningen företagits för att pröva eller bestyrka någon teori eller hypotes om mineralets sammansättning och bildning. Ej heller någon avslutande konklusion om det gjorda arbetets betydelse för kemien och mineralogien. Schultén menade, att det utan alla inledande fraser var klart, att hans avsikt just varit att framställa det ifrågavarande mineralet eller pavisa den erhållan oorganiska substansens existens och bildningsmöjligheter, och att slutledningarna gåvo sig själva utan överord.

Hans uppsatser giva därför ingen direkt upplysning om den idékrets, ur vilken impulsen till arbetet utgått. Man kunde t. o. m. vid en flyktig blick på hans vetenskapliga produktion få intryck av att den består av en mängd från varandra fristående redogörelser för resultat, nyckfullt tillkomna under ett trevande experimenterande. Men så är långt ifrån fallet. Somliga av de av Schultén framställda mineralen, såsom analcimen, äro visserligen funna vid sökande efter andra, men i dessa fall visste Schultén att kritiskt utnyttja vad slumpen givit. De flesta av hans synteser höra emellertid ej till denna art, utan äro avsiktliga och stå i systematiskt samband med varandra. Så behandlar en grupp av undersökningar, framställningen och egenskaper hos mycket svårlösta oxider och hydroxider. Ett tjugutal av hans uppsatser behandla den kemiska framställningen och egenskaperna hos olika slag av fosfater och arseniater, bland dem ett tiotal, som äro identiska med naturliga mineral. Dessa föreningar hava intresserat honom ända från år 1883, då den första syntesen av sådana offentliggjordes, till hans död. Slutligen ser man, att isynnerhet dubbelsalter och komplexa salter voro föremål för hans undersökningar och frestade honom till efterbildning av flere mineral av denna art. Hit höra publikationerna om apatit, vanadinit och de med de naturliga apatiterna isomorfa barium-, strontium- och cadmiumföreningarna, om kainit och karnallit och motsvarande jodsalter, och de talrika avhandlingarna om synteser av blyets oxiklorider, sulfokarbonater o. s. v., undersökningar, på grund av vilka Lacroix inbjöd Schultén till ett dock endast påbörjat samarbete vid undersökningen av blymineralen från Laurion. Hit höra slutligen hans synteser av boronatrocalcit och darapskit samt framställningen av gaylussit, hanksit och northupit ur gemensam lösning.

Betydelsen av dessa arbeten har genom nya undersökningar över bildningen av komplexa föreningar ur sammansatta system i lösningar vid alla olika temperaturer och i alla olika proprotioner så tillvida redurerats, att flere av de av Schultén gjorda synteserna äro specialfall under de allmänna regler man nu finner för sådana föreningars kristallisations- och existensgebit, men de av honom utförda synteserna ega dock bestående värde för det första emedan de i många fall giva antydningar om de geologiska villkor, under vilka sådana mineral kunna uppkomma, och för det andra emedan Schulténs synteser giva tillförlitliga anvisningarna om metoderna, att erhålla dessa mineral i kemiskt ren form samt exakta identifieringarna av de syntetiska produkterna med de naturliga mineralen. De naturliga mineralen äro nämligen sällan kemiskt rena motsvarigheter till de formler vi uppställa för dem. De innehålla mer eller mindre tillfälliga inblandningar i form av fasta lösningar, isomorfa

föreningar eller i annan form, och först genom att lämna dem åsido kunna vi uppställa den typiska kvantitativa formeln. Ett av de bästa bevisen för det berättigande i ett sådant förfarande blir då tydligen syntesen av en produkt enligt mineralets formel och påvisandet att densamma är till sina kristallografiska och fysikaliska egenskaper identisk med det motsvarande naturliga mineralet. Och har man sådana konstgjorda kemiskt rena mineral, så bliva bestämningarna av deras egenskaper så att säga standardvärden. I dessa omständigheter ligger betydelsen av Schulténs forskargärning.

Med hans namn är icke någon teori eller ny idé förbunden. Men slå vi upp en handbok i mineralkemi, mineralogi eller kemisk kristallografi, möta vi detsamma icke på en eller två, utan på många sidor jämte hans talrika vederhäftiga och för vidare forskning så viktiga och nyttiga uppgifter.

Aug. af Schultén har utgivit följande arbeten i tryck:

1. Syntes av analcim och några dermed sammanhängande undersökningar. Akademisk disputation. Helsingfors 1881.
2. Reproduction artificielle de l'analcime; C. r. 1880.
3. Reproduction artificielle de l'analcime, deuxième note; C. r. och Bull. Soc. Min. 1882.
4. Sur la production artificielle d'un silicate hydraté cristallisé; C. r. och Bull. Soc. Min. 1882.
5. Sur les orthophosphates doubles de baryum et de potassium, de baryum et de sodium; C. r. et Bull. Soc. Chim. 1883.
6. Sur la production de l'orthopohosphate neutre d'aluminium cristallisé; C. r. 1884.
7. Sur la production d'un nouveau phosphate de magnésium cristallisé et de l'arséniate correspondant; C. r. 1885.
8. Reproduction artificielle de la strengite; C. r. 1885.
9. Sur la production de l'hydrate de magnésium cristallisé (brucite artificielle) et de l'hydrate de cadmium cristallisé; C. r. 1885.
10. Sur la production du carbonate double d'argent et de potassium; C. r. 1887.
11. Note sur la reproduction artificielle de la pyrochroïte (hydrate manganeux cristallisé) C. r. och Bull. Soc. Min, 1887.
12. Action du carbonate de calcium sur les chlorure et bromure de cadmium; C. r. 1888.
13. Sur la production des sulfates anhydres cristallisés de cadmium et de zinc (zincosite artificielle); C. r. 1888.
14. Recherches sur les phosphates et les arséniates de cadmium; Bull Soc. Chim. 1889.
15. Sur la production du phosphate neutre de lithium cristallisé et de l'arséniate correspondant; Bull. Soc. Chim. 1889.
16. Reproduction artificielle de la molybdénite; Bull. Soc. Min. 1889.
17. Sur la production des hydrates cobalteux et ferreux cristallisés; C. r. 1889.
18. Essais de production de phosphates et arséniates chlorés de zinc; Bull. Soc. Chim. 1889.
19. Sur la reproduction artificielle de la malachite; C. r. 1890.
20. Synthèse de la kaïnite et de la tachhydrite; C. r. 1890.
21. Reproduction artificielle de la malachite par un nouveau procédé; C. r. 1896.

22. Reproduction artificielle de l'hydrargillite; Bull. Soc. Min. 1896.
23. Sur la reproduction artificielle de la darapskite; Bull. Soc. Min. 1896.
24. Production artificielle du chlorocarbonate de sodium et de magnésium; Bull. Soc. Min. 1896.
25. Reproduction artificielle de la pirssonite. Reproduction artificielle simultanée de la northupite, de la gaylussite et de la pirssonite; C. r. 1896.
26. Synthèse de la hanksite; C. r. 1896.
27. Essais de production composés isomorphes avec la kaïnite et d'un composé isomorphe avec la tachhydrite; Bull. Soc. Chim. 1897.
28. Production des carnallites bromées de potassium et d'ammonium; Bull. Soc. Chim. 1897.
29. Existe-t-il une chlorure ou une bromure double hydraté de sodium et de magnésium? Bull. Soc. Chim. 1897.
30. Sur la production artificielle de la laurionite et de composés isomorphes avec celle-ci; Bull. Soc. Min. 1897.
31. Sur la production artificielle à la température ordinaire de la phosgénite et de la phosgénite bromée; Bull. Soc. Min. 1897.
32. Production artificielle simultanée de la laurionite, de la phosgénite et de la cérussite; Bull. Soc. Min. 1897.
33. Sur la production des carbonates cristallisés de cadmium et de manganèse (diallogite artificielle); Bull. Soc. Min. 1897.
34. Reproduction artificielle de la lautarite; Bull. Soc. Min. 1898.
35. Production artificielle de la périclase par un nouveau procédé; Bull. Soc. Min. 1898.
36. Reproduction artificielle de la lanarkite; Bull. Soc. Min. 1898.
37. Sur la production de sels de bismuth cristallisés. Première partie; Bull. Soc. Chim. 1900.
38. Production des carnallites iodées de potassium et d'ammonium; Bull. Soc. Chim. 1900.
39. Sur la production de vanadites de cadmium; Bull. Soc. Chim. 1900.
40. Synthèse de la boronatrocalcite (ulexite); C. r. 1901.
41. Reproduction artificielle de la monétite; Bull. Soc. Min. 1901.
42. Sur la forme cristalline de l'acide molybdique jaune; Bull. Soc. Min. 1903.
43. Sur l'arséniate double d'ammonium et de calcium; Bull. Soc. Min. 1903.
44. Recherches sur le phosphate dicalcique. Reproduction artificielle de la brushite, Reproduction de la monétite par un nouveau procédé; Bull. Soc. Min. 1903.
45. Recherches sur l'arséniate dicalcique. Reproduction artificielle de la pharmacolite et de la haidingérite; Bull. Soc. Min. 1903.
46. Recherches sur le phosphate et l'arséniate dimagnésien. Reproduction artificielle de la newberyite; Bull. Soc. Min. 1903.
47. Recherches sur le phosphate et l'arséniate trimagnésien. Reproduction artificielle de la bobiersite et de la hoernésite; Bull. Soc. Min. 1903.
48. Reproduction artificielle de l'erythrine, de l'annabergite et de la cabrérite: Bull. Soc. Min. 1903.
49. Reproduction artificielle de la koettigite et de l'adamine; Bull. Soc, Min. 1903.

50. Recherches sur la struvite et la struvite arséniée artificielles. Production simultanée de la struvite et de la newberyite, de la struvite arséniée et de la roesslérite; Bull. Soc. Min. 1903.
51. Sur la roesslérite et la wapplérite. Production simultanée de la roesslérit et de la pharmacolite; Bull. Soc. Min. 1903.
52. Reproduction artificielle par voie humide de la barytine, de la célestine et de l'anglésite; Bull. Soc. Min. 1903.
53. Production des iodates anhydres cristallisés de baryum et de strontium; Bull. Soc. Min. 1903.
54. Reproduction artificielle de la schéelite par voie humide; Bull. Soc. Min. 1903.
55. Production du sulfate mercurieux cristallisé; Bull. Soc. Min. 1903.
56. Sur des cristaux artificiels d'arsenic; Bull. Soc. Min. 1903.
57. Sur la production de sels de bismuth cristallisés. Deuxième partie; Bull. Soc, Chim. 1903.
58. Sur une proprieté particulière à quelques sels hydratés; Bull. Soc. Chim. 1903.
59. Sur un procédé de cristallisation du corps peu solubles; C. r. och Bull. Soc. Chim. 1903.
60. Sur le phosphate double d'ammonium et de calcium; Bull. Soc. Min. 1904.
61. Production artificielle de la hopéite; Bull. Soc. Min. 1904.
62. Production artificielle de haidingérites de baryum et de strontium; Bull. Soc. Min. 1904.
63. Production artificielle de monétites de baryum, de plomb et de strontium et de monétites arséniées de plomb et de strontinm: Bull. Soc. Min. 1904.
64. Production artificielle de la huréaulite et de la huréaulite de cadmium; Bull. Soc. Min. 1904.
65. Production artificielle par voie humide des chromates anhydres cristallisés de baryum, de plomb et de strontium; Bull. Soc. Min. 1904.
66. Sur la fiedlerite; C. r. 1905.
67. Sur l'isomorphisme de la northupite avec la tychite; C. r. 1906.
68. Examen cristallographique de quelques siliciures, carbures et borures obtenus par M. Henri Moissan et ses élèves. C. r. 1911.
69. Examen cristallopraphique de quelques fluorures obtenus par M. H. Moissan et ses élèves. C. r. 1911.
70. Détermination des constants cristallographiques de quelques apatites artificielles. C. r. 1911.

samt tillsammans med A. GRANGER:

71. Sur quelques iodates de cuivre; C. r. och Bull. Soc. Min. 1904.

och tillsammans med A. LACROIX:

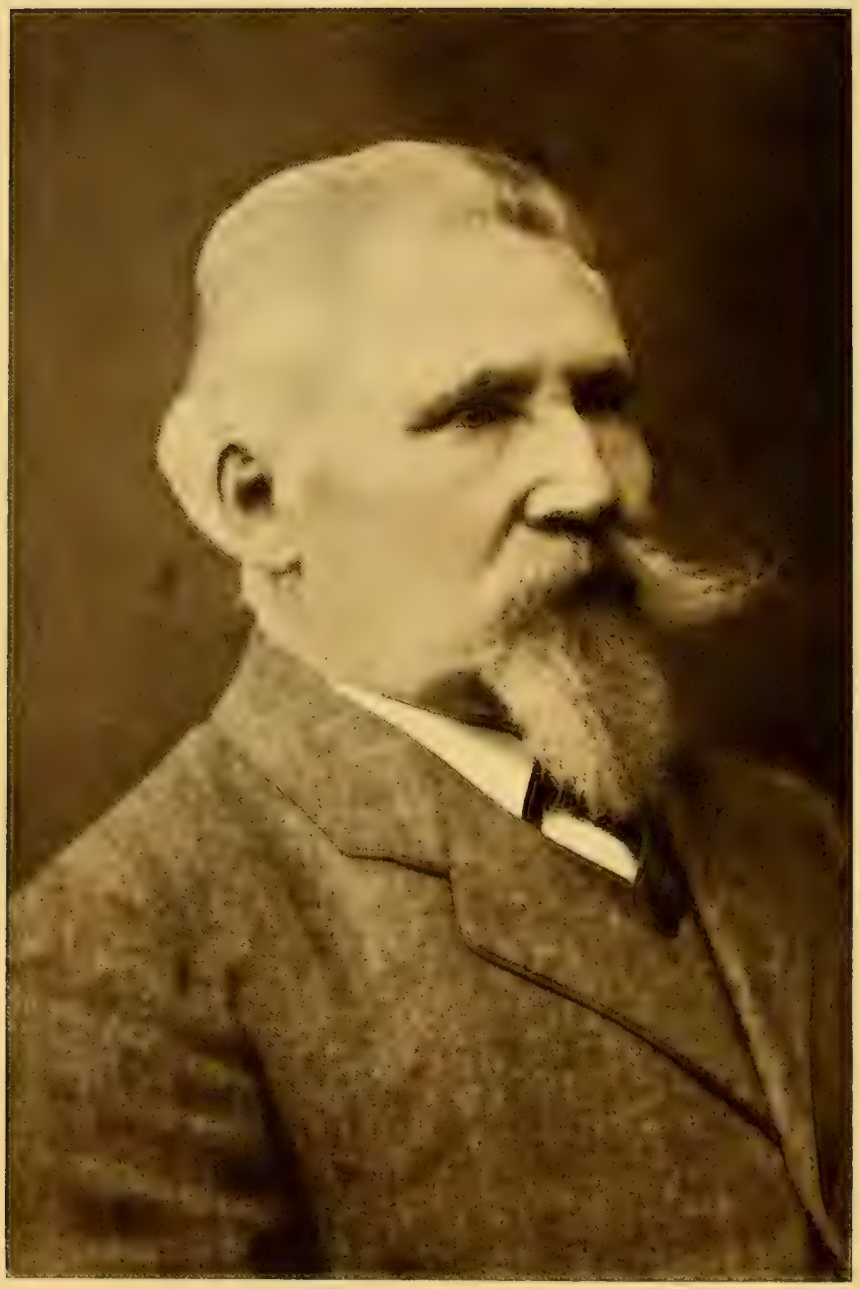
72. Sur une nouvelle espèce minérale, provenant des scories plombeuses athéniennes du Laurion; C. r. 1907.
73. Note sur des minéraux plombifères des scories athéniennes du Laurion; Bull. Soc. Min. 1908.

Vidare har Schultén utgivit:

74. Elementarlärobok i qvalitativ kemisk analys. Helsingfors 1883. Andra upplagan 1886. Tredje upplagan 1892. Fjärde upplagan 1900.
75. Öfningar i qvantitativ kemisk analys. Helsingfors 1886. Andra upplagan 1900.
76. Om undervisning i kemi. Helsingfors 1900.

Förkortningar.

C. r. = Compte rendu des séances de l'académie des sciences de Paris.
Bull. Soc. Min. = Bulletin de la Société minéralogique de France.
Bull. Soc. Chim. = Bulletin de la Société chimique de France.



K. F. Slotte

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

MINNESTAL

ÖFVER

PROFESSOREN

KARL FREDRIK SLOTTE

HALLET VID

FINSKA VETENSKAPSSOCIETETENS ÅRS- OCH HÖGTIDSDAG
DEN 29 APRIL 1915

AF

HJ. TALLQVIST.

HELSINGFORS 1915.
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

Högtärade församling!

Enligt gammal sed skall på Finska Vetenskaps-Societetens årshögtidsdag minnestal hållas öfver dem af Societetens mera bemärkta medlemmar, som under det gångna året för evigt kallats bort från densamma på tillskyndan af de makter, som härrska öfver lif och död. Till dessa medlemmar hörde obetingadt professor Karl Fredrik Slotte, icke blott på grund af de förtroendeuppdrag han erhöll af Societeten, utan ock genom det trägna och intensiva forskningsarbete, hvars frukter han till stor del nedlagt i Societetens skrifter. Allt intill senaste tid var professor Slotte ofta närvarande vid Societetens sammankomster, vanligen utrustad med manuskriptet till en färsk afhandling, som han anmälde till publikation.

Riktigast hade väl varit, att denna minnesruna tecknats af någon äldre medlem af Societeten, som kännt professor Slotte redan från hans yngre dagar, men har jag ej ansett mig kunna undandraga mig det af Societeten gifna hedersuppdraget, och får förty anhålla om en stunds uppmärksamhet af de närvarande.

Karl Fredrik Slotte föddes den 27 oktober 1848 i Nedervetil i Österbotten. Hans förfäder hade tillhört denna trakt, hvars befolkning till härstamning, språk och seder var svensk. Fädernegodset omnämnes redan år 1648 i jordeböckerna och dess namn öfvergick senare, såsom mångenstädes i vårt land varit vanligt, till familjenamn. Farfadern var skeppare och köpman, fadern den allmänt kände odalbonden, häradsdomaren C. J. Slotte, hvilken varit landtdagsman vid alla landtdagar från 1863 till och med 1900 och vid flere af dem varit utsedd till talman i bondeståndet. Modern Anna Elisabeth Varila var hemma från Kaustby socken; hon beskrifves som en präktig och sympatisk personlighet. I motsats till hvad namnet skulle antyda, härstammade också hennes förfäder från en svensk släkt.

Sonen Karl Fredrik var den äldste af tio syskon, och det är ej utan, att man i god mening på honom kunde tillämpa vår store nationalskalds ord: „föddes äldst bland bröder alla, däraf lärde han befalla“. Af bröderna lefva ännu tre, nämligen litteratören Alex. Slotte, bosatt i Helsingfors, och två andra, som trogna släkttraditionerna stannat som jordbrukare å sina hemman i Österbotten. I lifvet finnes vidare en syster, som är gift och bosatt i Kalifornien.

Efter att hafva åtnjutit privat undervisning i sin hembygd sändes den redan nära 13-årige Karl Fredrik Slotte på hösten 1861 till den fyra-klassiga elementarskolan i Gamlakarleby. Skolan hade blifvit invigd den 2 september samma år och Slotte kom på grund af de förkunskaper han redan inhämtat genast upp till andra klassen. Skolans första lärare voro O. A. F. Blomstedt, rektor; Anders Forsnäs, konrektor; trenne kolleger: Frans Aug. Canth, sedermera rektor under åren 1864—1883; Leonard Boehm och Alexander Boehm, samt Niklas Hedvall som lärare i ryska och Rudolf Sjögren i sång. Från Gamlakarleby elementarskola dimitterades Slotte på våren 1864 till Uleåborgs svenska lyceum, hvilket år 1863 hade utvidgats, så att det ledde direkt till Universitetet. Lyceets rektor var J. M. Kalm till den 31 maj 1866, då han efterträddes af V. L. Helander, sedermera prost i Pedersöre. I lyceet var Slotte primus på klasserna och tillhörde från 1864 jämte 15 ynglingar från olika delar af Österbotten skolkonventet. Från Uleåborgstiden bevarade dock Slotte ingalunda endast trefliga minnen. Såsom den främste på klassen fick han ofta sota för mindre samvetsömma kamraters oförsynta upptåg, emedan han icke ville uppge de skyldige. Med sitt nobla sinnelag kunde han ej heller sympatisera med en del kamraters vanor och nöjen och drog därför en suck af lättnad, när tiden för vinnande af studentmössan var inne.

Student blef Slotte den 31 maj år 1867 och inskrefs i Fysisk-matematiska Sektionen, hvars dekanus då för tiden professor Adolf Moberg var, samt i den då ännu illegala Österbottniska afdelningen, som dock redan under det följande året 1868 blef legaliserad. Från tidigt hade Slottes håg stått åt de fysisk-matematiska vetenskaperna, om ock starka intressen samtidigt drogo honom åt annat håll. Hans föräldrar hade, såsom ju på den tiden ännu ofta de äldres ideal bjödo, tänkt sig, att han skulle ägna sig åt prästkallet, men Slottes anlag lågo ej åt det hållet; de syftade mot en vetenskaplig eller möjligen en konstnärlig framtidsverksamhet, utan att det likväl syntes fullt afgjordt, hvilkendera som skulle afgå med den slutliga segern.

Emellertid bedref Slotte i Helsingfors sina universitetsstudier med stort allvar och god framgång. Han åhörde främst föreläsningar i matematik för

professor L. Lindelöf och i fysik för professor Adolf Moberg. Om ock hans framtida verksamhet kom att blifva fysikerns, bibehöll han alltid stort intresse äfven för den rena matematiken. Sålunda berättade han en gång för mig, att han bl. a. ihärdigt hade öfvat sig i utförandet af integrationer, äfven mycket komplicerade sådana; han hade då nyss haft tillfälle att återupplifva denna färdighet i anledning af en afhandling: „Über das elektrische Gleichgewicht eines geladenen ellipsoidischen Leiters und die elektrostatische Kapacität eines Rotationsellipsoides.“ Då en ny afhandling af hans forne matematikprofessor utkom, läste han den alltid med stort intresse. De allra högsta kapitlen af matematiken föredrogos emellertid ej på den tid, då Slotte studerade, så t. ex. funktionsteori, som för resten då ännu ej hade hunnit så långt i sin utveckling, så att Slotte ej fick helt känna fröjden af en utflykt till dessa tankens höga och rena rymder. Men han försökte exempelvis ännu på äldre dagar att något sätta sig in i läran om de elliptiska integralerna och funktionerna. Någon mindre lucka i det för en fysiker erforderliga matematiska vetandet hade ock blifvit outfylld; så minnes jag, att jag en gång utförde några beräkningar enligt minsta kvadratmetoden till en af Slottes afhandlingar, där han själf hade uttänkt åt sig ett enkelt och sinnrikt förfarande att approximativt beräkna de sökta storheterna, ehuru det ej helt och hållet stod på höjden af den matematiska vetenskapen. Denna brist torde dock Slotte själf senare reparerat.

Utom för matemaik och fysik intresserade sig Slotte mest för kemi. I hans filosofiekandidatexamen, som aflades den 31 maj 1872, ingick emellertid utom de nämnda tre ämnena ännu botanik, filosofi och nordisk historia.

Till filosofiemagister promoverades Slotte den 30 maj 1873.

Jämsides med de vetenskapliga studierna odlade Slotte sina konstnärliga intressen. Han inträdde som elev i Universitetets ritsal år 1869, samma år då Universitetets lärare i teckningskonst artisten Adolf von Becker tillträdde sin befattning och gjöt nytt lif i teckningsundervisningen vid Universitetet. För denne tog Slotte timmar i teckning och senare äfven i målning, under en kortare tid äfven för Beckers vikarie A. Liljelund, och torde denna undervisning fortgått till och med år 1873. Under teckningstimmarna arbetade Slotte med lif och lust, men det hände äfven, att lusten plötsligt öfvergaf honom och då afbröt han arbetet, oberoende af att timmen ej var slut. Han vitsordades såsom ägande synnerlig skicklighet och fallenhet för teckning, och såsom bevarade prof visa, utförde han äfven förträffligt det som han härutinnan företog sig. Det var synnerlig karaktär i figurer och ansikten på Slottes teckningar, antingen de

voro utförda efter verkligheten eller såsom ofta efter minnet. Vid Fornminnesföreningens expedition sommaren 1874 till Sydvästra Finland följde Slotte med som tecknare. Därvid afritade han bl. a. skickligt och pietetsfullt den praktfulla predikstolen i Billnäs kyrka med dess talrika figurer i träskulptur, ett af senrenässansens märkligaste minnesmärken i Finland.

Som en följd väl främst af Beckers entusiasmerande inflytande lågo under en god tid planer på en konstnärsbana så i Slottes håg, att han med allvar tänkte på att ägna sig däråt, men tanken på de med en sådan bana förknippade ekonomiska svårigheterna lät dock omsider förståndet segra öfver känslorna, kunde man säga, och han beslöt att öfverge dessa planer och söka grunda sin framtid på säkrare mark. Helt och hållet öfvergaf han dock ej härmed de sköna konsterna; i synnerhet under sommarledigheterna målade han allt framgent taflor, mest akvareller, och fann en mycket stor glädje häri. En af hans första akvareller framställer hans fästmö Fredrika Emilia Finelius, med hvilken han på hösten 1875 hade förlofvat sig. Slottes talang för måleri har gått i arf i familjen, i det en son ägnat sig åt denna konst.

För poesi var Slotte ytterst intresserad; så kunde han t. ex. med stor extas läsa Runebergs Kung Fjalar. Också lät han ibland sin poetiska ådra flöda; några af hans verser torde ingått i „Finsk Tidskrift“.

Den lefnadsbana, för hvilken Slotte närmast förberedde sig, var skollärarens. Efter aflagd kandidatexamen auskulterade han sålunda läseåret 1872—73 undervisningen i matematik, fysik och teckning vid Svenska Normallyceum i Helsingfors. Under läseåren 1873—75 var han timlärare i matematik vid samma läroverk. I april 1875 aflade han praktiskt lärareprof för lektors- och kollegatjänster i matematik och fysik vid läroverk med svenskt undervisningsspråk samt ännu samma år den 31 maj pedagogie-examen vid Universitetet. Detta datum den 31 maj var för öfrigt minnesrikt för Slotte, på den dagen hade han åtta år tidigare blifvit student och för tre år sedan filosofie-kandidat.

Omedelbart efter slutförda examina erhöll också Slotte fast anställning som skollärare, i det han den 3 juni 1875 utnämndes till kollega i matematik och fysik vid fyrklassiga realskolan i Åbo. Han öfverflyttade dock ej genast till Åbo, emedan han den 16 augusti 1875 erhöll ett förordnande af Skolstyrelsen att bestrida vikariatet för enahanda tjänst vid den fyrklassiga realskolan i Helsingfors, i hvilken befattning han kvarstannade här under läseåret 1875—76. Men från hösten 1876 finna vi honom verkande såsom ordinarie kollega i Åbo. Denna period af Slottes lärareverksamhet blef ej alldeles kort; formellt innehade han ännu läseåret 1881—82 kollegatjänsten i Åbo, men faktiskt hade han

redan med utgången af vårterminen 1880 lämnat denna syssla. Under vintern 1880—81 träffa vi honom i Leipzig sysselsatt med vetenskapligt arbete och under läset 1881—82 var Slotte återkommen till Helsingfors och upptagen med lärarevärf af något högre art; dessa båda år voro brytningsår, under hvilka öfvergången från skola till högskola fullbordades; härefter skulle Slottes hela lif löpa lungt vidare i samma fåra.

I Åbo räckte skolarbetet ej till att utfylla den verksamme mannens hela tid; han ägnade sig vid sidan af detsamma äfven åt tidningsmannens kall; så var han under sommaren 1877 redaktör för den politiska och sjöfartsafdelningen i „Åbo Underrättelser“, samt författade i öfrigt då och då uppsatser, ofta af allmänt fysikaliskt innehåll, till särskilda tidningar.

Genom skollärareverksamheten på annan ort än uti hufvudstaden hade ett afbrott inträffat i Slottes arbete på sin egen utbildning, särskildt hvad angår experimentalfysiken, på hvilken Slottes tankar vid denna tid mer och mer begynte koncentrera sig. Skolornas utrustning med fysikaliska apparater var på den tiden ännu mycket klen, och icke ens ännu är den sådan, att den kunde erbjuda läraren tillfälle till nämnvärd egen vetenskaplig forskning; funnes också undantagsvis någon härtill användbar apparat, så saknas lämplig lokal för undersökningarna. Slotte gjorde sig därför fri från sina tjänsteåligganden och reste, efter att hafva erhållit ett statens pedagogiska resestipendium om 3000 mark, till Leipzig, där han under vintersemestern 1880—81 arbetade hos den berömde fysikern prof. G. Wiedemann i Universitetets fysikaliska laboratorium. Till föremål för sina undersökningar hade Slotte valt den inre friktionen hos vissa saltlösningar; detta hans första arbete på området i fråga gaf klaven till en hel serie sammanhängande undersökningar öfver vätskors inre friktion. Samtidigt med arbetet i laboratorium åhörde Slotte vid Universitetet i Leipzig föreläsningar i matematik och fysik och gjorde sig äfven underrättad om undervisningen i dessa ämnen i några af stadens läroverk.

Under tiden hade ett tillfälle yppat sig för Slotte att finna en verksamhet i Helsingfors och där fortsätta sina i utlandet påbegynta fysikaliska undersökningar. Landets enda tekniska läroanstalt, som år 1849 grundats i formen af en Teknisk Realskola, hade efterhand undergått särskilda omvandlingar. År 1872 hade den omorganiserats till en Polyteknisk Skola och däraf uppkom år 1879 det Polytekniska Institutet, hvaraf slutligen år 1908 den Tekniska Högskolan framgick. I anstaltens tidigare stadier hade fysikundervisningen varit mycket styfmoderligt behandlad. Sålunda ålåg uti den Tekniska Realskolan under dess tidigare period en och samma timlärare att meddela undervisning i

de allmänna grunderna i mekanik och fysik, senare, d. v. s. år 1858, anställdes en ordinarie lärare, som emellertid hade att undervisa ej blott i de två ämnena, utan också i maskinlära, mekanisk teknologi m. m. Vid 1872 års reorganisation till Polyteknisk Skola afskildes fysiken från mekaniken och inrättades för den förra en särskild extra läraretjänst i experimentalfysik, för hvilken dock endast fanns ett anslag af åttahundra mark i året. Slutligen upphöjdes fysiken år 1879 till samma rang och värdighet som andra hufvudämnen och fick sig i Polytekniska institutet en s. k. äldre ordinarie lärareplats anvisad. Platsen blef dock icke genast ordinariter besatt, utan förestods från höstterminen 1879 till och med vårterminen 1881 af prof. A. F. SUNDELL, under det följande läseåret 1881—82 af SLOTTE, enligt förordnande af den 22 mars 1881. Detta var för SLOTTE en tid af rastlös verksamhet. Jämsides med det ansträngande undervisningsarbetet, hvilket han ej blott tog på djupaste allvar, utan äfven kombinerade med uppfostran af nykomlingarna på den första eller allmänna årskursen till skick och seder, där så behöfdes, fortsatte han med ifver i institutets anspråkslösa, men användbara fysikaliska laboratorium de i Leipzig påbörjade experimentalundersökningarna öfver vätskors inre friktion, i afsigt att använda arbetet såsom specimen för licentiatgrad. Det gällde ju ock att göra sig definitivt kompetent för den läraretjänst SLOTTE då skötte som tillförordnad. Afhandlingen, som bär titeln „Undersökningar angående den inre friktionen hos vätskor", blef också i god tid färdig och granskades offentligt den 22 februari 1882. Offentlig filosofielicentiatexamen, med fysik och matematik som hufvudämnen, aflade SLOTTE den 11 mars och erhöll filosofiedoktorsgrad den 16 maj samma år.

Den ordinarie läraretjänsten i fysik vid Polytekniska Institutet hade i början af vårterminen 1882 anslagits ledig att ansökas. Som sökande anmälde sig filosofielicentiaten SLOTTE och filosofiedoktorn F. L. ZETTERMAN. Enligt Institutets stadgar kunde Manufakturdirektionen, sedermera Industristyrelsen, under hvilken Institutet sorterade, ålägga sökande att för styrkande af sin förmåga att undervisa hålla två offentliga föredrag, det ena öfver ett af Manufakturdirektionen uppgifvet, sökanden en vecka förut delgifvet ämne, och det andra öfver ett af honom själf valdt ämne. SLOTTE höll den 17 april 1882 ett föredrag öfver det honom delgifna ämnet „Teorin för gasers utströmning". Till äldre lärare i fysik vid Institutet utnämndes han den 30 maj 1882.

SLOTTE hade härmed ställts på den plats, han icke mera skulle lämna, förrän döden för alltid afklippte hans jordiska verksamhet. Sällan torde man med mera fog kunna säga, att en man kommit på sin rätta plats i lifvet. Under icke mindre än 32 år handhade SLOTTE undervisningen i fysik vid landets

högsta tekniska läroanstalt; åt densamma ägnade han hufvudparten af sin mannaålders och sin ålders hösts arbetskraft: han gjorde det med sannt och aldrig svalnande intresse, hängifvet och med stor framgång.

Som lärare förstod Slotte utmärkt att från första ögonblicket ingifva en aktningsbjudande respekt hos sina elever; redan den högresta gestalten och det bestämda ansiktsuttrycket verkade imponerande och intrycket stärktes, då man hörde hans kraftiga röst och märgfulla tal. Snart funno emellertid eleverna, att de i honom hade mycket mera än endast den allvarlige läromästaren. De sågo, att han intresserade sig icke blott för deras intellektuella, utan ock för deras själs utbildning, att han sökte lära ej blott för skolan, utan äfven för lifvet, att de angelägenheter, som lågo ungdomen om hjärtat, också kunde påräkna hans intresse, kort sagdt, att hela hans sträfvan gick ut på elevernas sanna bästa. Med största förtroende lyssnade de därför till hans visa och faderliga förmaningar och råd, äfven då dessa någon gång af förekommen anledning gåfvos i uppbrusningens ögonblick, i skarpa ord och stränga former. Sådant var dock öfvergående, sansen och lugnet återvände hastigt, och de unga sågo, att bakom den ibland sträfva och kantiga ytan dolde sig icke blott en omutligt rättrådig och fast karaktär, utan också en för deras välgång och sanna bästa sig lifligt bekymrande personlighet. Med tiden växte också deras förtroende och tillit till honom stadigt, de lärde sig icke blott att högakta honom såsom lärare, utan också att hålla af honom såsom en uppriktig vän. Ett vackert uttryck funno de ungas känslor för Slotte i de tvänne adresser, som på hans 65 års dag öfverlämnades till honom af Högskolans studentförening och Teknologföreningen.

Uti de fyra årskurser, i hvilka studietiden vid Polytekniska Institutet obligatoriskt var indelad, förekom undervisning i allmän fysik på första årskursen, praktiska öfningsarbeten under en del af andra årskursen samt dessutom inom fackskolorna för maskinbyggnad och ingeniörsväsende på fjärde årskursen mekanisk värmelära, här räknad som ett kapitel tillämpad fysik och högst nödvändig i synnerhet för blifvande maskiningeniörer. Nykomlingarna på första årskursen, för hvilka Slotte tedde sig som den store läro- och tuktomästaren, förlorade honom sålunda för några terminer ur sikte, men en del af dem, de blifvande maskinbyggarna och byggnadsingeniörerna, återknöto under det sista studieåret förbindelsen, sedan de under tiden stadgats i seder, ålder och visdom. Det berättas, att Slotte själf vid återseendet visade tecken på en nästan barnslig glädje.

Sin lärareverksamhet utöfvade Slotte med yttersta samvetsgrannhet. Han

bemödade sig att inom den disponibla tiden lära eleverna allt det väsentliga och för fortsatta fackstudier mest erforderliga inom den vidtomfattande vetenskap, till hvilken fysiken i våra dagar vuxit ut. Den muntliga framställningen, som var genomskådligt klar och koncentrerad, belyste han med väl förberedda och lärorika demonstrationsexperiment. Också med de enskilda elevernas praktiska öfningsarbeten följde han noggrannt. När han såg, att någon hade håg och lust att på egen hand uträtta mera, än hvad som hörde till den obligatoriska kursen, gladde han sig och bistod uppmuntrande med råd och dåd. Tyvärr åstadkommer mångfalden af läroämnen och öfningar i en teknisk högskola, att mera självständigt arbete sällan kan ifrågakomma inom de allmänna facken, utan först på ett jämförelsevis sent stadium inom specialfacken, framför allt vid utförandet af det afslutande diplomarbetet. Lärarens i ett allmänt fack uppgift är därför mindre tacksam än den egentlige fackläraren. Icke dess mindre förstod Slotte att hos de unga inplanta kärlek till arbetet och till sin vetenskap. Själf såg han med en viss stolthet på sin undervisning och dess resultat. Medan vitsorden i Polytekniska Institutet gällde för ett visst begränsadt antal terminer, hvarefter omtentamen borde ske, tillämpade Slotte, som betraktade en dylik anordning som ganska onödig, sin egen maxim: mina vitsord gälla i tid och evighet.

För att underlätta elevernas möjligheter att med framgång genomgå fysikkursen gaf Slotte senare ut sina föredrag i hektograferade häften och slutligen året före sin död äfven i tryck i form af en lärobok med titel: Fysikens grundprinciper, handbok för studerande. Också föreläsningarna i mekanisk värmelära utkommo år 1912 i läroboksform under titeln: Mekaniska värmeteorin och dess viktigaste tillämpningar, I, II. För båda dessa arbetens utgifvande erhöll Slotte bidrag från Tekniska högskolans medel. De kunna sägas beteckna höjdpunkten, men tyvärr också i det närmaste slutpunkten i hans undervisningsverksamhet.

I detta sammanhang förtjäna några ord att nämnas om den fysikaliska institutionen vid läroanstalten och dess utveckling. I 1847 års stat för Tekniska Realskolan var upptaget ett anslag om 400 rubel silfver för de kemiska och fysikaliska laboratorierna samt modeller och samlingar. Något egentligt fysikaliskt laboratorium existerade dock ej under den första tiden, men däremot voro i den Lithonius'ska gården, Alexandersgatan 50, där den tekniska läroanstalten var inrymd i närmare 30 år, 3 rum anslagna till kemiskt laboratorium och funnos i källarvåningen två rum, inredda till verkstäder för metall- och träarbeten, samt en smedja. Verkstäderna indrogos dock vid omorganisa-

tionen år 1848 och anstalten eröfrade småningom större och större partier af det hyreshus, i hvilket den befann sig. Någon anteckning om att ett rum i detta hus skulle disponerats för den fysikaliska instrumentsamlingen har jag dock ej funnit, men troligt är att detta varit fallet, emedan enligt 1858 års förordning till ordinarie lärarens i fysik, mekanik, maskinlära, mekanisk teknologi m. m. mångskiftande skyldigheter också hörde att handleda eleverna vid anställande af fysikaliska experimenter, äfvensom att vårda de till fysikaliska kabinettet hörande instrumenter och skolans modellsamling. Instrumentsamlingen torde dock länge varit mycket obetydlig, men den 17 november 1875 beviljade Kejserliga Senaten ett extra anslag af 5000 mark för anskaffande af fysikaliska instrument. Vid denna tid erhöll Polytekniska Skolan sitt eget hus i kvarteret Tranan vid Sandvikstorget — färdigt och inredt sommaren 1877 — och för fysikens utrymme blef nu något bättre sörjdt. Emedan till en början flere af statens ämbetslokaler äfven voro inrymda i samma för sin tid stort och förtänksamt tilltagna byggnad, blef dock utrymmet för fysiken ej synnerligen stort. Såvidt jag minnes rätt, utgjordes laboratoriet under långa tider af en stor sal och ett stort rum i första våningen åt söder och ett större och ett mindre rum i källarvåningen inunder, till hvilka en spiraltrappa ledde, men hvilka fysiken måste dela med elektrotekniken, i hvilket ämne särskild undervisning vid läroanstalten kom till stånd år 1877. Tillsammans med Slotte uppgjorde undertecknad visserligen ett förslag till särskildt fysikaliskt och elektrotekniskt laboratorium för läroanstalten i en flygeltillbyggnad till Institutets hufvudbyggnad, för hvilken kostnaden beräknades till 151000 mark. Förslaget godkändes af Lärarekollegium och insändes till högre ort den 23 mars 1897, men möttes där af afslag. Däremot vunno våra gemensamma ansträngningar för ett fysikaliskt och elektrotekniskt laboratorium fullt beaktande, då Polytekniska Institutets hufvudbyggnad erfor den stora utvidgningen till nära det dubbla mot förut åren 1902—1903. Dessa laboratorier placerades nu i den nya norra flygeln, som de till en god del upptogo, och utrymmet var så pass rikligt, att senare till och med en till desamma hörande stor instrumentsal kunnat afstås till ritsal, då andra behof åter hunnit växa ut till mera påträngande.

Den 28 februari 1901 beviljades åter ett extra anslag om 2100 mark för inköp af fysikaliska instrument. I 1879 års och likaså i 1886 års stat var upptaget 1000 mark som årsanslag för fysikaliska instrument och laborationer; från och med år 1908 har det fysikaliska laboratoriet och Tekniska högskolan åtnjutit ett årligt anslag om 3000 mark. Den 15 oktober 1896 tillsattes en assistent vid laboratoriet såsom biträde åt ordinarie läraren i fysik, på hvilken

en stor och med elevantalet ständigt växande arbetsbörda hade hvilat. Den 4 december 1900 förordnades en andra assistent för handledande af en del elever vid öfningsarbetena. Från och med år 1908 existerar utom den ordinarie läraretjänsten, sedermera professuren i fysik ännu en annan lärarebefattning i ämnet, nämligen en extra ordinarie lektorsplats. Räknadt från det stora omorganisationsåret 1908 åtnjöt också Slotte ett särskildt extra årsarvode om 800 mark i egenskap af prefekt för det fysikaliska laboratoriet.

Med afseende å såväl lärarebefattningarna i fysik som laboratorium förmärkes sålunda en kontinuerlig utveckling till större och större tidsenlighet, om hvilken ej annat kan anmärkas, än att den begynte något sent. Densammas hufvudfaser falla in dels på tiden omedelbart före Slottes tillträdande af sin tjänst, dels på hela den långa tidrymd han stått på sin post. Initiativet till förbättringarna utgick kanske ej alltid från Slotte, som i synnerhet på äldre dagar hade en viss konservativ läggning, men då en dylik sak engång kommit upp, omfattade han den med full förståelse och sökte med all kraft drifva på den.

I tur och ordning tilldelades de äldre ordinarie lärarene vid Polytekniska Institutet såsom belöning för deras verksamhet och förtjänster personell professorstitel; Slotte erhöll densamma den 3 maj 1897. Vid institutets omorganisation till Teknisk högskola erhöllo emellertid samtliga innehafvare af ordinarie läraretjänst namnet professor, som sålunda knöts vid befattningen på samma sätt som vid universiteten och utlandets tekniska högskolor.

Under många år var Slotte revisor för Polytekniska Institutets donerade fonder; likaså deltog han i en mångfald komitéers inom Institutet arbeten.

Ledighet från sin läraretjänst vid Polytekniska Institutet hade Slotte egentligen blott en gång, en kort tid från 15 november 1884 till höstterminens slut, såsom det uppgifves för sjuklighet. Denna torde stått i samband med att Slotte vid tiden för arbetet på sitt licentiatspecimen hade öfveransträngt sig, särskildt genom att långa tider i en fortsättning arbeta i en lokal i Institutet, som icke var hälsosam, beroende främst på den centraluppvärmnings- och ventilationsanläggning, en af de tidigaste i Helsingfors, hvarmed byggnaden var försedd. Det gick många år, innan Slotte riktigt repade sig från den knäck han därvid erhöll.

Sina utländska studieresor företog Slotte under ferierna. Så besökte han under julferien 1885—86 den elektrotekniska utställningen i S:t Petersburg. Med ett reseunderstöd om 1500 mark från Polytekniska Institutets för lärarenes resor anslagna medel besökte vidare Slotte under slutet af år 1898 och början af

1899 ett större antal fysikaliska och elektrotekniska laboratorier vid universitet och tekniska högskolor i Skandinavien och Tyskland, nämligen i Stockholm, Köpenhamn, Kiel, Hannover, Bonn, Darmstadt, Heidelberg, Karlsruhe, Stuttgart, München och Erlangen. Under denna resa, hvarom Slotte utgifvit en berättelse, studerade han inrättning af, arbetsprogram och metoder vid de fysikaliska laboratorierna samt den praktiska fysikens framsteg, och anknöt eller förnyade bekantskapen med ett flertal af samtidens mera kända professorer i fysik. Slotte öfvertygade sig under denna resa, att programmet för de praktiskt-fysikaliska arbetena vid de olika instituten var i hufvudsak detsamma och till innehåll och form tämligen öfverensstämde med det som följts vid Polytekniska Institutet.

Också sommaren 1906 företog Slotte en mindre studieresa med ett från Polytekniska Institutet erhållet reseunderstöd om 800 mark. Han besökte bl. a. Chemnitz och Dresden för inköp af instrument, bland hvilka var en Toeplers influens-elektricitetsmaskin med 20 par roterande skifvor, och besåg Tekniska högskolans i Dresden fysikaliska institut.

Sin sista utrikesresa företog Slotte sommaren 1910, efter att hafva erhållit ett understöd om 1300 mark för studier och rekreation ur Tekniska högskolans reseanslag för lärarne. Han vistades därunder en tid på Rügen.

Innan särskilda kommunala och statens inspektörer för elektriska anläggningar funnos anställda, anlitades Slotte någon gång för dylika inspektioner. Så besiktigade han i november 1888 den elektriska belysningsanläggningen i Kirurgiska sjukhuset vid Kaserngatan i Helsingfors och i april 1889 på uppdrag af Järnvägsstyrelsen den elektriska belysningsinrättningen vid Hangö järnvägshamn.

Jag kommer numera till prof. Slottes verksamhet i Finska Vetenskaps-societeten. Han invaldes i densamma den 21 november 1898 och blef ledamot i dess Meteorologiska utskott den 17 december 1900 samt fungerade sedan år 1908 som ordförande i detta utskott och i den under Societetens inseende stående Hydrografisk-biologiska kommissionen. Sin största betydelse inom Societeten har emellertid Slotte haft genom de talrika afhandlingar han publicerade i dess skrifter. Endast få forskare hafva så regelbundet levererat sin tribut till Societeten. Ännu kort förrän han träffades af det slaganfall, som sedan hastigt ledde till döden, var Slotte sysselsatt med utarbetandet af en afhandling „Über die Schwingungszahlen der Metallmoleküle und die Absorption des Lichtes in Metallen", hvilken äfven hann blifva så färdig, att den kunde offentliggöras efter Slottes bortgång. Inom Societeten skall saknaden efter prof. Slotte länge göra sig kännbar.

Slottes vetenskapliga forskning, hvilken fortgick lika oafbrutet och intensivt som hans lärareverksamhet, skall jag här söka karakterisera mera i dess hufvuddrag och endast så mycket inlåta mig på detaljer, som är nödvändigt för ernående af en något så när riktig uppfattning af densamma hos en icke fysikaliskt bildad läsare.

Slottes första större arbete var hans licentiatspecimen: „Undersökningar angående den inre friktionen hos vätskor", till hvilket experimenten såsom nämndt utfördes dels i Leipzig, dels i Helsingfors. Då vätskepartiklar röra sig med olika hastighet i närheten af hvarandra, sträfva de snabbare att påskynda de långsammare och de senare att fördröja de förra. Orsaken härtill är den s. k. inre friktionen eller viskositeten i vätskan, på hvilken en s. k. friktionskoefficient är måttet. Denna utgör en af de viktigaste konstanterna, som karakterisera en vätska. Öfver den inre friktionen i vätskor hade på 1840-talet beundransvärdt noggranna undersökningar utförts af Poiseuille, som observerade tiden för vätskors utrinnande genom fina kapillarrör och äfven uppställde teorin för detta fenomen. Slotte använde Poiseuilles metod och utrinningsapparat, som han dock förbättrade och gjorde bekvämare att begagna. Han värkställde därmed ett stort antal friktionsmätningar och framstod redan då genom de gjorda försöken och den teoretiska behandlingen af resultaten som en ytterst omsorgsfull, kritisk och erfaren experimentalfysiker. Med det fysikaliska arbetet var ett betydande rent kemiskt arbete förenadt, som bestod i beredning och rening af salter samt analyser af syror och saltlösningar. Ledande synpunkter vid Slottes undersökningar voro sträfvan att å ena sidan finna ett samband mellan saltlösningars inre friktion och salternas kemiska sammansättning, å den andra att närmare undersöka friktionskoefficientens beroende af temperaturen. Tidigare hade Sprung kommit till viktiga resultat, som kunde sammanfattas i två satser:

1. „Den inre friktionen hos lösningar af de salter, hvilka metallerna K och Na samt radikalen NH_4 bilda med syrorna H_2SO_4, HCl, HNO_3, $HClO_3$, HBr och HJ, följer, vid lika koncentrationsgrad och samma temperatur hos lösningarna, med hänsyn till syrorna den ordning, i hvilken de äro uppräknade, så att friktionen är störst hos sulfaterna, minst hos jodiderna."

2. „Med hänsyn till baserna gäller för de salter, hvilka K, Na och NH_4 bilda med de ofvan uppräknade enbasiska syrorna, att vid lika koncentration och temperatur, lösningar af natriumsalter besitta den största, lösningar af ammoniumsalter den minsta viskositeten." Sulfaterna göra dock ett mindre undantag härifrån, i det kaliumsulfat har något mindre friktion än ammoniumsulfat.

Slotte fann den första Sprung'ska regeln vara den väsentligare; den i ett salt ingående syreradikalen spelar en viktigare roll för lösningarnas inre friktion än basen. Denna regel tydde på att ju mera komplicerad molekylen är hos de salter, som bildas af samma metall med olika syror, desto större är också viskositeten hos saltlösningar af samma koncentration och temperatur. Till bekräftelse af detta sakförhållande undersökte han den inre friktionen hos ett flertal saltlösningar af den tvåbasiska kromsyran H_2CrO_4 och af den trebasiska fosforsyran H_3PO_4. Han fann därvid att kromaterna med afseende å den inre friktionen inordnade sig i den Sprung'ska serien mellan sulfaterna och kloriderna samt att de normala fosfaterna af alla undersökta salter hade den största viskositeten. Men vidare bestämde Slotte också den inre friktionen hos lösningar af syrorna själfva; dessa kunna ju i viss mån också uppfattas som salter, nämligen med väte som bas. Slotte fann, att syrorna också i allmänhet inrangerade sig i den Sprung'ska serien, så att t. ex. svafvelsyra, saltsyra och salpetersyra med afseende å den inre friktionen följde samma ordning som deras salter. Endast kromsyran bildade härvid ett undantag.

Vid dessa och tidigare undersökningar mättes lösningens koncentration genom viktsmängden substans på 100 delar vatten, men Slotte anlade därjämte den moderna synpunkten att mäta den efter normalitet, hvarvid likanormala lösningar på samma mängd af lösningsmedlet innehålla lika många molekyler af saltet. Själfva namnet normalitet förekom dock ej på den tiden; det är en af den nyare fysikaliska kemins skapelser, numera ytterst alldagligt. Resultaten voro i hufvudsak desamma som på det förra sättet.

Medan saltlösningarnas inre friktion bestämdes vid fyra olika temperaturer 10°, 20°, 30° och 40° C, fann sig Slotte på grund af tidigare undersökningars bristfällighet föranlåten att göra en fullständig undersökning öfver vattens inre friktion från 0,2° ända upp till 97° C. Den inre friktionen hos vätskor har den märkeliga egenskapen att förete en mycket stark föränderlighet med temperaturen, ej alls jämförbar med t. ex. täthetens eller kapillaritetskonstantens förändring, utan snarare med de konstanter, som hänföra sig till vätskans mättade ånga. För friktionskoefficientens hos vatten beroende af temperaturen uppställde Slotte en enkel och noggrann formel, hvars tillämplighet äfven på andra vätskor han dessutom ådagalade. Af Slottes formel hafva senare forskare på detta ända till senaste tid mycket bearbetade område haft stor nytta.

Resultaten af undersökningarna öfver vätskors inre friktion publicerades också i ett par uppsatser i Wiedemanns Annalen der Physik, delvis redan före själfva licentiatspecimen. Sitt arbete på detta område fortsatte Slotte också

framdeles och delgaf resultaten åt Vetenskapssocieteten i afhandlingar från åren 1890, 1895 och 1905. Desamma innehålla dels nya noggranna bestämningar af vattnets inre friktion vid olika temperaturer, dylika bestämningar för olivolja och kvicksilfver, den vätska, som af alla har den enklaste sammansättningen, undersökningar af olika formlers användbarhet för framställningen af den inre friktionens hos vätskor beroende af temperaturen, dels teoretiska spekulationer öfver sambandet mellan inre friktion och molekylarkrafter i en vätska, som gå ut på både att härleda en icke empirisk formel för sambandet mellan inre friktion och temperatur och att finna de lagar, enligt hvilka vätskemolekylerna attrahera hvarandra. Slotte kommer här in på ett område, de flytande (och fasta) kropparnas molekylarfysik, på hvilket ett stort antal af hans senare undersökningar röra sig.

Genom Krönigs, Clausius', Maxwells, Boltzmanns m. fl. monumentala arbeten har gasernas molekylarfysik bragts till en hög grad af fullkomning. Genom att utgå från enkla antaganden öfver gasmolekylernas rörelse lyckas man teoretiskt härleda nästan alla kända egenskaper hos gaserna och kan konstatera, att dessa i verkligheten förhålla sig nogrannt såsom denna s. k. kinetiska gasteori ger vid handen. Framgången hos denna vackra teori beror till stor del på att en gas molekyler under vanliga förhållanden befinna sig på så stora afstånd sinsemellan, att de icke utöfva nämnvärda krafter på hvarandra, de stöta endast tidtals tillsammans med hvarandra eller med kärlväggarna och återkastas därvid. Tillämpar man på detta kaos af oordnade rörelser i det så att säga oändligt lilla grundsatserna inom sannolikhetsläran, så finner man välordnade, lagbundna förhållanden inom det ändligas värld, m. a. o. de kända gaslagarna. För fysikerna har det nu länge hägrat som ett ideal att kunna härleda vätskors och fasta kroppars egenskaper ur antaganden öfver rörelserna hos deras molekyler, att ställa upp en kinetisk teori också för vätskor och fasta kroppar. Denna uppgift är emellertid på grund af molekylernas ömsesidiga, icke närmare kända inverkan på hvarandra väsentligen svårare än uppgiften för gaser, och tillsvidare har man i stort sedt icke kommit särdeles långt på detta område. Slotte har emellertid kanske mer än någon annan bearbetat det från olika sidor och funnit en mängd vackra detaljresultat; det stora målet, en slutlig tillfredsställande kinetisk teori för vätskor och fasta kroppar, har aldrig upphört att skimra för hans inre blick; från olika håll har han sökt närma sig det och äfven gjort vackra eröfringar inom det främmande okända landet. Först på sista tiden har detta arbetsområde med allvar upptagits äfven af andra forskare.

I en uppsats „Om den molekylära attraktionen hos mättade ångor" söker Slotte beräkna storleken af den attraherande kraft, som verkar mellan två molekyler af en mättad ånga, ett tillstånd hos en kropp, som nära ansluter sig till det vätskeformiga tillståndet. Han utgår från att jämvikt här skall äga rum mellan molekylarattraktionen och de repulsionskrafter, som visa sig såsom ångans tryck, förutsätter den förra omvändt proportionell mot en viss positiv potens k af afståndet mellan de båda molekylerna och finner för k ett värde något större än talet 3. Detta resultat står i öfverensstämmelse med ett tidigare sådant, som erhållits ur betraktelser öfver vätskors inre friktion. För sju olika kroppar fås från kända experimentella data nära nog lika värden på den i attraktionsformeln ingående konstanten. Man ser häraf, att den molekylära attraktionskraften växer vida snabbare, då afståndet mellan molekylerna minskas, än den mot afståndets kvadrat omvändt proportionella Newton'ska attraktionskraften; redan på ett helt litet afstånd från molekylen, hvilket utgör radie i molekylens verkningssfer, blir molekylarattraktionen omärklig.

Härnäst följa ett antal arbeten, som äro ägnade åt metallernas värmerörelse och värmetryck eller molekylartryck. En kropps värmetillstånd beror på de för oss osynliga rörelserna hos dess molekyler; kroppars värme är i denna bemärkelse en art af mekanisk eller rörelseenergi. Ju lifligare molekylernas rörelse är, desto högre är kroppens temperatur. Tillföres en kropp värme, sträfvar den i allmänhet att utvidga sig och utöfvar därvid ett tryck mot kroppar, som söka hindra denna utvidgning. Vid en gas utgör det den vanliga tensionen eller trycket hos gasen och kan enligt den kinetiska gasteorin lätt beräknas ur gasmolekylernas rörelse. Vid en fast kropp är det af värmevibrationerna härrörande trycket, hvilket benämnts värmetryck eller också molekylartryck, ett utåt från molekylen riktadt tryck, hvilket är i jämvikt med de från molekylarattraktionen härrörande kohesionskrafterna och det på kroppen anbragta yttre trycket. Slotte har i talrika afhandlingar sökt beräkna detta molekylartryck för homogena, isotropa, enkla fasta och flytande kroppar, förnämligast metaller, och bringa det i relation med andra för kropparna gällande fysikaliska konstanter.

Man måste härvid utgå från ett antagande öfver beskaffenheten af rörelsen hos molekylerna i den fasta kroppen. Det är naturligt att förutsätta att dessa utföra små svängningar kring bestämda medelpunkter, som bibehålla fasta lägen i förhållande till hvarandra, så länge kroppens form och volym förblifva oförändrade. Molekylen kan vid en enkel kropp tänkas ersatt med en punkt; det område, inom hvilket punkten rör sig, kallas dess vibrationsrum

och är väsentligt mindre än hela den rymd, som svarar mot en enda molekyl; denna senare betraktar SLOTTE som en liten kub med kanten λ. Vid isotropa, homogena, enkla fasta och flytande kroppar kan vibrationsrummet tänkas utgöra en sfer med en radie r. Öfver arten af molekylens svängningar inom vibrationsrummet kan man göra olika antagandan. De kunna tänkas ske rätlinigt längs en diameter och antingen rörelsen försiggå med konstant hastighet och plötsligt byta om riktning i diameterns ändpunkter, eller kan man med större sannolikhet tänka sig desamma utgöra s. k. enkla harmoniska svängningar; vidare kan man föreställa sig, att molekylen rör sig likformigt uti en cirkel i ett diametralplan till vibrationssferen eller slutligen att den är en harmonisk rörelse i en inom denna sfer liggande ellips. Alla dessa antaganden har SLOTTE efterhand gjort och visat, att de uttryck, som man på grund af dem beräknar för molekylartrycket, hafva samma form och endast skilja sig från hvarandra genom en något olika konstant numerisk faktor. Molekylartrycket hos en fast kropp är i öfrigt proportionellt med molekylens massa, med kvadraten på dess medelhastighet och omvändt proportionellt mot vibrationsrummets radie r. Det förändras endast i ringa mån med temperaturen.

Redan i sitt första arbete öfver värmetrycket i fasta kroppar påvisar SLOTTE, att detta är en storhet af samma storleksordning som kroppens elasticitetsmodul och till och med ungefär lika med denna. Mellan båda dessa kvantiteter samt kompressionskoefficientens föränderlighet med temperaturen erhålles ett samband, men emedan för den sistnämnda ej föreligga experimentella bestämningar, kan formeln i fråga ej verificeras experimentellt. Senare skall här uppvisas, huru SLOTTE likväl på annat indirekt sätt sökt kontrollera formelns riktighet. Utgående från värmetryckets arbete vid en liten temperaturförhöjning uppställes vidare på teoretisk väg den af DULONG och PETIT empiriskt funna lagen, att en enkel fast kropps atomvärme (d. v. s. produkten af dess atomvikt och specifika värme vid konstant tryck) är lika för alla kroppar; och erhållas numeriska värden af atomvärmet, hvilka icke alltför mycket afvika från det af DULONG och PETIT funna värdet.

Ett utsträckande af betraktelserna till fasta kroppar, hvilkas molekyl i motsats till de ofvan behandlade kropparnas icke är enatomig, leder till det anmärkningsvärda resultatet, att värmetillståndet hos dessa skulle bero icke af svängningarna hos en molekyl i dess helhet, utan af svängningarna hos atomerna i molekylen.

Den kinetiska teorin för de fasta kropparna leder till beaktansvärda numeriska resultat beträffande molekylernas hastigheter, dimensioner och sväng-

ningstal. Desamma påträffas i ett flertal af Slottes afhandlingar samt ingå slutligt sammanställda jämte värdena af molekylartrycket i ett arbete af år 1910: Molekular-physikalische Konstanten für einfache feste Körper. Här förekomma dylika data för icke mindre än 26 metaller.

Maximihastigheten i en molekyls svängningsrörelse är proportionell med kvadratroten ur det specifika värmet vid konstant tryck; densamma erhåller värden, som vid 0° C. variera för olika metaller från c:a 150 meter i sekunden vid t. ex. vismut, thallium och osmium till mer än 500 meter i sekunden vid natrium. Tager man Dulong och Petits lag till hjälp, kan man också uttrycka resultatet sålunda, att produkten af hastigheten och kvadratroten ur elementets atomvikt vid enatomiga metaller förblir konstant. Detta bekräftas också af de numeriska värdena. Hastigheten förändrar sig proportionellt med kvadratroten ur den absoluta temperaturen, d. v. s. temperaturen räknad från den absoluta nollpunkten, som ligger vid — 273° enligt Celsiustermometern.

Hvad sedan molekylernas dimensioner beträffar, erhåller man, såsom Slotte i ett par arbeten uppvisat, kantlängden λ hos den kub, som i kroppen är tillordnad en molekyl, lika med kvoten af dubbla yttensionen hos den vätskeformiga kroppen, d. v. s. den smultna metallen, och kohesionstrycket. Då vätska afdunstar, utföres arbete för öfvervinnande af kohesionstrycket. Häraf beräknar man ett enkelt samband mellan det senare och det inre ångbildningsvärmet och kan numera också uttrycka längden λ af kanten hos molekylarkuben med tillhjälp af yttensionen och ångbildningsvärmet. De på detta sätt beräknade värdena af λ öfverenstämma t. ex. vid vattenmolekylen med värden, som af andra forskare erhållits på alldeles annat sätt. De uppgå till några hundramiljondedels millimeter. Med kantlängden λ står enligt en af Slottes formler radien r hos molekylens vibrationsrum i ett enkelt sammanhang. Det visar sig, att r vid de olika metallerna utgör ungefär någon eller några tusendedelar af λ.

Då man numera känner hastigheten i en molekyls värmesvängning och svängningens amplitud r, kan man också beräkna svängningstalet, d. v. s. antalet svängningar, som molekylen utför på en sekund. Man finner, att dessa svängningstal i allmänhet uppgå till några få hundratal biljoner, sålunda öfverenstämma med svängningstalen inom den ultraröda delen af solspektrum, hvilket ju också är ganska förklarligt, emedan spektrums ultraröda del härrör af strålande värme. Vid en del metaller, särskildt platinametallerna samt nickel, kobolt och järn, fås dock svängningstal, som redan tillhöra det synliga ljusspektrum. Det vore dock oberättigadt att häraf sluta, att dessa metaller redan

vid vanlig temperatur borde utstråla svagt ljus. De af SLOTTE betraktade svängningarna hafva dessutom egenskapen att svängningstalet tillväxer, då temperaturen aftager. Först vid rätt låga temperaturer kommer man i allmänhet in inom området för synliga ljussvängningar, men alldeles osannolikt är det ej, såsom SLOTTE äfven anmärker, att de vid mycket låga temperaturer observerade intensiva luminiscensföreteelserna kunde häri finna sin förklaring.

I sin förut nämnda posthuma afhandling återkommer SLOTTE till metallmolekylernas svängningar. Enligt all sannolikhet absorbera metallerna sådana ljussvägningar, hvilkas svängningstal öfverensstämma med deras egna molekylers. SLOTTE gör nu några jämförelser mellan de af honom beräknade svängningstalen hos metallmolekylerna och de mycket sparsamma observationsresultat, som föreligga af HAGEN och RUBENS öfver ljusabsorptionen i silfver, koppar, guld och platina, hvarvid han också finner vissa öfverenstämmelser eller åtminstone tydliga antydningar till sådana. I detta sammanhang uppvisar han också, att metallmolekylernas svängningstal utfalla annorlunda, om man ej får förutsätta, att alla metallmolekyler äro enatomiga, och verkställer omfattande beräkningar af desamma för det fall, att på en gång både enatomiga och tvåatomiga metallmolekyler skulle förefinnas. Utgående från tidigare bestämda värden af produkten af maximihastigheten hos molekylerna och kvadratroten ur elementets atomvikt, hvilken produkt vid enatomiga metaller borde vara konstant, finner SLOTTE, att de fyra ofvan uppräknade metallerna i ordning på 100 atomer skulle innehålla resp. 21, 26, 16 och 15 tvåatomiga molekyler.

Bland metallerna intager kvicksilfver en undantagsställning, emedan det vid vanlig temperatur är flytande. SLOTTE har som en pröfvosten på sin teori för molekylartrycket i en särskild afhandling på tvänne olika sätt beräknat detsamma för kvicksilfver, ur bekanta experimentella data. Det ena värdet erhålles ur yttensionen och längden af kanten i molekylarkuben, för hvilken SLOTTE tidigare uppställt en allmän formel, som endast innehåller ämnets atomvikt, det andra värdet beräknas ur den allmänna formel, till hvilken hans kinetiska teori för de fasta kropparna hade ledt. Han finner sålunda för kvicksilfrets molekylartryck värdena

$$1387 \quad \text{och} \quad 1312 \ \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2},$$

hvilka förete en vacker öfverensstämmelse, så mycket mer, om man beaktar, att de ej hänföra sig till precis samma temperatur. Uti sin kinetiska forskning är SLOTTE ofta på grund af osäkra experimentella data och äfven i någon mån

osäkra grundantaganden tvungen att ge sig till freds med mindre goda öfverensstämmelser än de som erbjuda sig inom längre framskridna delar af den fysiska vetenskapen, men detta kan i betraktande af nyheten af denna forskningsgren knappast undvikas. Utan tvekan torde man kunna säga, att Slotte lagt en bred bas för andra att bygga vidare på.

I ett antal afhandlingar företagas teoretiska beräkningar af metallernas smältningsvärme, d. v. s. den värmemängd, som erfordras för att vid smältningstemperaturen öfverföra en massenhet af metallen från fast till flytande tillstånd, och anställas betraktelser öfver smältprocessen. Utgångspunkt för beräkningen är tanken, att då en fast kropp smälter, så mycket energi i form af värme utifrån tillföres densamma, att en molekyl vid sin rörelse utåt från svängningscentrum, där hastigheten annars är störst, ej mera förlorar hastighet, resp. kinetisk energi, och sålunda dess oscillerande rörelse i själfva verket öfvergår i en fortskridande rörelse, i öfverensstämmelse med att molekylerna i en vätska ej mera hafva bestämda jämviktslägen, utan äro så godt som utan motstånd förskjutbara förbi hvarandra. För smältningsvärmet hos ett antal metaller och hos ett flertal sammansatta kroppar, till hvilka teorin också låter utvidga sig, erhåller Slotte på detta sätt värden, som ungefärligen öfverensstämma med de experimentellt bestämda värdena. Några kroppar såsom det diamagnetiska vismut och de starkt magnetiserbara kropparna järn och nickel bilda dock beaktansvärda undantag från regeln.

Uti den kinetiska teorin för fasta och flytande kroppar kan man lika litet som uti den kinetiska gasteorin direkt verificera grundantagandenas riktighet, utan är tvungen indirekt sluta sig därtill genom betraktelsen af deras konsekvensers förhållande till verkligheten. Svårigheterna äro emellertid här större än vid gaserna; ej blott emedan kropparnas förhållande är mera kompliceradt, utan ock emedan man saknar experimentella, tillräckligt noggranna bestämningar af flere koefficienter, som karakterisera detta förhållande. I Slottes arbeten förekomma talrika beräkningar och diskussioner af dylika koefficienter. Ett mycket stort intresse har han ägnat den koefficient i uttrycket för molekylartrycket, som bestämmer molekylarsvängningarnas karaktär i fasta kroppar, och funnit, att de rätliniga harmoniska svängningarna åt båda sidor från fasta medellägen hafva den största sannolikheten för sig. Särskildt kännbar är bristen på värden af den koefficient, som bestämmer huru en fast kropps kompressibilitet ändrar sig med temperaturen. Slotte har emellertid på teoretisk väg sökt bringa denna i relation till andra koefficienter uti elasticitetsläran, bland hvilka också ingå elasticitetsmodulens och torsionsmodulens tem-

peraturkoefficienter. Öfver dessa har han också utfört omfattande experimentella bestämningar vid olika temperaturer, framställda i den i tre delar utgifna stora afhandlingen: Ueber die Elasticität der Metalle. I år 1910 utförda slutliga bestämningar af kompressionskoefficientens temperaturkoefficient stöder sig Slotte på af Grüneisen verkställda nya direkta bestämningar af den s. k. Poisson'ska konstanten i elasticitetsteorin, hvilken annars beräknas indirekt från de båda elasticitetsmodulerna för dragning och torsion. Han underkastar i dessa afhandlingar sin kinetiska teori ett prof genom att enligt en ur teorin härflytande formel beräkna fem särskilda metallers smälttemperaturer. De teoretiskt erhållna värdena visa en mycket anmärkningsvärd öfverensstämmelse med de direkt bestämda smältpunkterna, undantaget dock platina. Värdena af smältpunktstemperaturen utfalla nämligen:

Vid	silfver	koppar	aluminium	järn	platina
beräknadt:	923° C	1073° C	670° C	1544° C	1303° C
observeradt:	967° C	1082° C	657° C	1573° C	1784° C

Slottes kinetiska teori för de fasta kropparna kan visserligen ej sägas komma fullkomligheten nära, — ibland litar han kanske också något för mycket på sina tal och formler —, men såsom redan framhållits, ligga svårigheterna i sakens egen natur, i det man tvingas att göra mer eller mindre osäkra eller grofva grundantaganden. Denna teori skall emellertid städse kunna betraktas som ett mycket värdefullt bidrag till molekylarfysiken och atomistiken och som det första större steget på detta okända område mot en framtiden förbehållen fullkomligare teori. Den kinetiska teorin för fasta kroppar är ogensägligt Slottes lifsverk inom den fysikaliska forskningen.

Men utom för den kinetiska teorin för materien intresserade sig Slotte i synnerhet för den därmed nära sammanhängande värmeteorin eller termodynamiken, hvilken för öfrigt utgjorde den enda del af fysiken, inom hvilken han på ämbetets vägnar hade att meddela en högre stående undervisning än den mera elementära grundkursen i allmän fysik. Inom den kinetiska teorin påträffas, såsom naturligt är, flerestädes termodynamiska betraktelser, som äro skickligt sammanväfda med den och utan hvilka resultaten ofta ej alls hade kunnat ernås. Bland fristående termodynamiska afhandlingar märkes en, som behandlar inverkan af torsion på en cylindrisk eller prismatisk kropps termodynamiska tillstånd. Genom vridningen erfar kroppen en utomordentligt liten temperatursänkning, som Slotte också försökte bestämma experimentellt; detta lyckades dock ej pa grund af denna verkans litenhet. Också sådana konstan-

ter hos kroppen, som t. ex. dess specifika värme, undergå härvid små förändringar, öfver hvilka intressanta beräkningar anställas.

En annan termodynamisk afhandling sysslar med kvicksilfrets ångbildningsvärme och ångspänning och har till ändamål att på grund af det ur termodynamiken härflytande sambandet mellan ångbilningsvärmet och ångspänningens förändring med temperaturen teoretiskt kontrollera några af andra forskare utförda experimentella bestämningar af kvicksilfrets ångbildningsvärme. Slotte uträknar därjämte en tabell för detsamma som funktion af temperaturen.

I en liten uppsats från år 1907 meddelas ett nytt bevis för termodynamikens andra hufvudsats, som har fördelen att samtidigt leda till en klar och noggrann definition af den absoluta temperaturen, hvarmed såsom nämnts förstås temperaturen räknad från den absoluta nollpunkten, som nära sammanfaller med — 273 grader på Celsiustermometern. I en annan mindre uppsats ingå några termodynamiska spekulationer öfver kropparnas förhållande vid den absoluta nollpunkten. Det kan förtjäna omnämnas, att man på den allra sista tiden lyckats komma den absoluta nollpunkten utomordentligt nära och sålunda verkligen experimentellt taga reda på, huru kropparna förhålla sig invid den. Resultaten, för hvilka man främst har Kamerlingh-Onnes att tacka, den forskare, hvilken det lyckades att betvinga den sista okondenserade gasen, helium, och bringa den i vätskeform, hafva varit ytterst anmärkningsvärda, delvis revolutionerande inom vetenskapen.

Ytterligare märkas några afhandlingar med ämne ur elektricitetsläran, af hvilka den anmärkningsvärdaste torde vara en, i hvilken Slotte uppställer en enkel relation mellan ett dielektriskt ämnes dielektricitetskonstant och dess specifika volym. Produkten af den senare och en viss funktion af den förra visas, med stöd af experimentella data, för en och samma kropp hafva samma värde i det fasta, flytande och gasformiga tillståndet. Denna produkt betecknar den volym, som utfylles af de elektriskt ledande partiklarna inom kroppen, efter det de oledande mellanrummens volym frändragits. En dylik konstitution hos dielektriska kroppar tänkte sig nämligen redan Mosotti och Clausius.

Åren 1885 och 1887 gjorde Slotte fotometriska bestämningar af ljusstyrkan hos en glödlampa för olika värden af den genom lampan gående strömstyrkan och fann för sambandet mellan båda ett ganska enkelt uttryck, hvilket har sitt intresse för elektrotekniken.

Slotte har också offentliggjort särskilda anordningar för fysikaliska demonstrationsexperiment och apparatkonstruktioner, bland hvilka i synnerhet en apparat för bestämning af värmets mekaniska ekvivalent funnit användning.

Bland populära uppsatser af Slotte förtjäna nämnas den i Finsk Tidskrift år 1896 publicerade „Om de elektriska strålningsfenomenen“ och den i samma tidskrifts följande årgång ingående „Atomistiken och dess framtid“.

Särskilda produkter af Slottes insikter och flit föreligga ännu i trenne större fristående verk, nämligen afdelningen om matematiken och fysiken uti „Åbo universitets lärdomshistoria“, af år 1898, och de båda läroböckerna: „Fysikens grundprinciper, handbok för studerande“, Helsingfors 1913, samt „Mekaniska värmeteorin och dess viktigaste tillämpningar, I, II“, Helsingfors 1912. Uppdraget att utarbeta det första arbetet, som utgör en länk i den stått-liga rad af publikationer, till hvilka vårt universitets 250 års jubileum gaf upphof, tilldelades af Svenska Literatursällskapet åt statsrådet A. Moberg, men öfvertogs efter dennes frånfälle af Slotte. Till detta arbete hade redan Moberg samlat mycket material, men torde Slottes andel i arbetet dock vara väsentligt större. Det gällde främst att genomgå en väldig mängd gammal akademisk disputationslitteratur, sådan vår tid oftast har rätt ringa sinne för, och författa referat öfver densamma. Detta har Slotte gjort ytterst samvetsgrannt och synes ej blott pligtskyldigast utfört, utan äfven lifligt intresserat sig för sitt uppdrag. Af boken får man föreställningen, att man uti det gamla lärdomssätet vid Auras stränder väl följde med sin vetenskap, om man också ej själf skapade synnerligt nytt, åtminstone hvad matematiken, fysiken och astronomin beträffar. En förändring inträffade egentligen först mot Åboperiodens slut, då, för att endast nämna par exempel, sådana storheter som Hällström och Argelander beklädde professurer vid universitetet. Slottes stil är i hela boken klar och målande och med stort nöje läser man dess sammanfattande, något korta slutkapitel.

Läroboken „Fysikens grundprinciper“ har den stora förtjänsten att med lagom omfattning eller snarare lämplig koncentration meddela det hufvudsakliga inom fysikens olika delar, så att fortsatta studier med fördel kunna byggas därpå. Vid behandlingen, som är åskådlig och ledig, begagnas elementarmatematiken, men uti stycken med finare stil kommer också differential- och integralkalkyl till användning. Visserligen saknas ett och annat, som redan på detta stadium kunde vara af nytta för en blifvande tekniker, så t. ex. en kort utläggning om dynamomaskiners och motorers verkningssätt, men torde detta bero på den erfarenhet Slotte förvärfvat, om hvad som verkligen kan medhinnas och inläras väl under den disponibla tiden. Man kan ej heller säga, att boken skulle skattat för mycket åt de modernare åskådningarna inom fysiken; så anföres endast på ett ställe namnet elektron, som dock betecknar

ett begrepp, som i den nyare fysiken begynnt spela en dominerande roll. I Slottes läggning låg en viss konservatism; han var väl ej emot det nya, men han ansåg, att man bör fasthålla vid det gamla, som befunnits vara godt, äfven då annat nyare konkurrerade därmed. Delvis gick han kanske också så försänkt i egna forskningstankar på sina specialområden, att han ej intresserade sig tillräckligt för att taga reda på en god del af det nya inom fysiken, som vår tid i starkt crescendo kommit fram med, detta gällande dock mera beträffande nya teorier än experimentella vinningar. I alla fall fyller boken väl sitt ändamål att gifva en grundläggande, mera elementär kurs i fysiken i dess helhet.

Liksom läroboken i allmän fysik har också läroboken i mekanisk värmeteori framgått ur föreläsningar, hållna under en lång följd af år vid Polytekniska Institutet. Man märker på densamma, att Slotte fattat sin uppgift med hängifvenhet och varit synnerligen intresserad af ämnet, som ju för resten ligger inom ett af de forskningsområden han själf odlat. Framställningen är genomskinligt klar och ägnad att entusiasmera en matematiskt anlagd elev för ämnet. Ställvis märkas reminiscenser af mästaren Clausius. I boken behandlas efter en matematiskt-mekanisk inledning första och andra hufvudsatsen i den mekaniska värmeteorin, hvarefter dessa i en senare afdelning tillämpas på mättade ångor i förening med motsvarande vätskor samt på homogena kroppar. Dessa tillämpningar hafva ännu en allmän karaktär; längre gående mera tekniska tillämpningar på maskiner inom tekniken förekomma knappast. I företalet säger Slotte, att han ej kunnat upptaga mångfaldiga andra tillämpningar af vetenskapligt och praktiskt intresse än dem, som han ansett allra viktigast, samt att en fortsättning af arbetet ligger i dess plan. Denna fortsättning, som hade kunnat blifva af alldeles särskildt intresse för den tillämpande teknikern och konstruktören, var det honom ej mera förunnadt att utgifva; icke heller torde den för föreläsningarna i ämnet disponibla tiden lämnat rum för en sådan fortsättning af kursen.

I vår tid tenderar fysiken liksom flertalet andra vetenskaper att på en gång kraftigt utveckla sig åt många håll: en sådan gren af synnerlig vikt för en tekniker är den, som numera benämnts teknisk fysik och som rönt stort beaktande vid några utländska tekniska högskolor. Att hoppas är att den inom en snar framtid skall komma mera till sin rätt äfven hos oss. Den kunde då bli ett kraftigt stöd för de rent tekniska disciplinerna.

Vända vi ännu efter denna karakteristik af Slottes verksamhet blicken tillbaka till honom själf, så finna vi att han var en energisk personlighet med

kraftig vilja, till sin karaktär var rättfram och trofast, till sitt väsen varmhjärtad, till sin natur fredsälskande och försonlig, gaf erkännande åt andra, men förstod att bestämdt stå vid sina åsikter. Kunde han någon gång blifva häftig och till och med förgå sig, gick det dock snart öfver och bjöd han till att godtgöra skadan. Han såg mest tingen från deras ljusa sida, i förtröstan på en allvis försyn, och var villig att hjälpa med råd och dåd, där han så kunde. Sitt svenska modersmål och svenskhetens sak var han varmt tillgifven, men han var långt ifrån en partiman.

Slotte var en pålitlig vän och kamrat; tidigare deltog han rätt mycket i sällskaps- och kamratlifvet, men på senare år drog han sig mera tillbaka och höll sig hufvudsakligast till en trängre krets af gamla vänner, som då och då träffades. Många exempel på Slottes humor omtalas. Så mötte honom en varm dag i början af maj, då våren var sen och hafvet just höll på att afkasta sitt istäcke, en af de yngre kamraterna vid Institutet. Slotte var iklädd päls; på frågan: „skall farbror ej ren lägga bort pälsen“ svarade han: „nej, isen behöfver värme för att smälta och jag vill ej ge af min egen värme“.

Slottes lust och glädje var arbetet och den vetenskapliga forskningen. Denna tilltog i intensitet med åren, men deras tyngd och ansträngningarna begynte dock på senare tider trycka honom, utan att likväl ändra hans sinne. Från arbetet i läroanstalten sökte han hvila i hemmets lugn, i kretsen af sin familj. Hans maka var Fredrika Emilia Finelius, dotter till kapellanen, sedermera prosten i Gamla Karleby landsförsamling Karl August Finelius. Äktenskapet hade ingåtts en sommardag den 15 Augusti 1876, och tvänne söner öfverlefva Slotte.

Vid vårterminens slut fröjdade sig Slotte synnerligt öfver den stundande sommarvistelsen på hans vackert belägna villa Björkviken i Vestra Skärgården nära Helsingfors. Väl följde de vetenskapliga tankarna honom också ända hit, men som motsats till tankearbetet förströdde han sig med att sköta om sin possession, att odla sina konstnärliga intressen, att snickra väderkvarnar, båtar och annat smått åt barnen m. m. På Björkviken drabbades han också af det slaganfall, som den 19 juli 1914 ledde till slutet, hvilket han motsåg med lugn förtröstan.

Förteckning öfver Professorn Karl Fredrik Slottes utgifna skrifter.

Akademisk disputation: Undersökningar angående den inre friktionen hos vätskor, Helsingfors, 1882 [för licentiatgrad).

I *Skrifter utgifna af Svenska Literatursällskapet i Finland:* Matematikens och fysikens studium vid Åbo universitet, Bd XXXVII, 1898. Utgör del 7 af Åbo universitets lärdomshistoria).

Läroböcker: Mekaniska värmeteorin och dess viktigaste tillämpningar, I, II, Helsingfors, 1912. — Fysikens grundprinciper, handbok för studerande, Helsingfors, 1913.

I *Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar*: Om den inre friktionen hos vätskor, XXXII, 1889—1890. — Apparat för bestämning af värmeenhetens mekaniska eqvivalent, XXXIII, 1890—1891. — Om den molekylära attraktionen hos mättade ångor, XXXIV, 1891—1892. — Ueber die Wärmebewegung und den Wärmedruck der Metalle, XXXV, 1892 1893. — Nachtrag zu dem Aufsatze: Ueber die Wärmebewegung und den Wärmedruck der Metalle, XXXVII, 1894—1895. — Ueber die Reibungsconstante und einige andere Constanten der Flüssigkeiten, XXXVII, 1894—1895. — Undersökningar angående molekylarrörelsen, XXXVIII, 1895—1896. — Ett sätt att demonstrera ljusets interferens, XXXVIII, 1895—1896. Ueber die Molecularbewegung fester Körper XLIII, 1900—1901. — Ueber die thermische Ausdehnung und die spezifische Wärme einfacher fester Körper, XLIV, 1901—1902. — Demonstrationsversuche über die Polarisation des Lichtes, XLIV, 1901—1902. — Ueber die Schmelzwärme, XLVII, 1904—1905. — Folgerungen aus einer thermodynamischen Gleichung, XLVII, 1904—1905. Beobachtungen von B. Hahl über die innere Reibung des Quecksilbers, XLVIII, 1905—1906. — Ueber den molecularen Druck der einfachen festen Körper und damit zusammenhänge Fragen, XLVIII, 1905—1906. — Ueber das elektrische Gleichgewicht eines geladenen ellipsoidischen Leiters und die elektrische Kapacität eines Rotationsellipsoides, XLIX, 1906—1907. — Ueber die Änderung des linearen Wärmeausdehnungskoefficienten eines Stabes oder Drahtes durch eine in der Längenrichtung wirkende äussere Kraft, XLIX, 1906—1907. — Über den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und die absolute Temperatur, L, 1907—1908. — Anlässlich eines Aufsatzes von Herrn Grüneisen: „Über die thermische Ausdehnung und die spezifische Wärme der Metalle", LI A, 1908—1909. — Molekulare Grössen, aus der Oberflächenspannung und der inneren Verdampfungswärme berechnet, LI A, 1908—1909. — Über die molekulare Anziehung und das innere Potential, LII A, 1909—1910. — Über den Einfluss der Temperatur auf die Kompressibilität der Metalle, LIII A, 1910—1911. — Über eine Formel von Kohlrausch zur Darstellung des molekularen elektrischen Leitungsvermögens einer Lösung als Funktion des Molekulargehaltes, LV A, 1912—1913.

I *Acta Societatis Scientiarum Fennicae:* Ueber die Elasticität der Metalle, T. XXVI, 1899. — Ueber die Elasticität der Metalle, zweite Mittheilung, T. XXIX, 1900. — Ueber die Elasticität der Metalle, dritte Mitteilung, T. XXXV, 1908. — Thermodynamische Behandlung eines innerhalb der Elasticitätsgrenze tordirten prismatischen oder cylindrischen Körpers, T. XXXV, 1908. — Über den molekularen Druck und die Oberflächenspannung geschmolzener Metalle, T. XXXV, 1908. — Über den molekularen Druck des Quecksilbers, T. XXXVII, 1909. — Molekular-physikalische Konstanten für einfache feste Körper, T. XL, 1910. — Über die innere Bewegung und die Schmelzwärme der Metalle, T. XL, 1911. — Bestimmung des inneren Druckes einfacher fester Körper unter Voraussetzung elliptischer Molekularschwingungen, T. XL, 1911. — Über zwei molekular-physikalische Konstanten, T. XLI, 1912. — Über den Vorgang der Schmelzung, T. XLI, 1912. — Über die Verdampfungswärme und die Dampfspannung des Quecksilbers, T. XLIV, 1913. — Über eine Beziehung zwischen der Dielektrizitätskonstanten und dem spezifischen Volumen dielektrischer Körper, T. XLIV, 1914. — Über die Schwingungszahlen der Metallmoleküle und die Absorption des Lichtes in Metallen, T. XLVI, 1914.

I *Annalen der Physik und Chemie:* Ueber die innere Reibung der Lösungen einiger Chromate, Bd. 14, 1881. — Ueber die Wheatstone'sche Brücke, Bd. 15, 1882. — Ueber die innere Reibung einiger Lösungen und die Reibungsconstante des Wassers bei verschiedenen Temperaturen, Bd. 20, 1883.

I *Polytekniska Institutets festskrift*: Zur kinetischen Theorie der festen Körper, Helsingfors, 1899.

I *Centralblatt für Elektrotechnik:* Über eine Beziehung zwischen der Helligkeit einer Glühlampe und der entsprechenden Stromstärke, 1888.

I *Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht:* Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes, 1902.

I *Tekniska föreningens i Finland förhandlingar:* Om sambandet mellan ljusstyrkan hos en glödlampa och den genom lampan gående strömmens styrka, 1887.

I *Tidskrift, utgifven af pedagogiska föreningen i Finland:* Ett sätt att frambringa de elektriska ljusfenomenen i förtunnad luft, 1878. — Några elektriska ljusfenomen, 1878. — Några rön vid begagnandet af luftpumpen, 1879. — Lösning af en matematisk uppgift, 1879. — Reseberättelse, 1881. — Lagarna för en rätlinigt oscillerande punkt, 1882. — Demonstration af Mariotte's lag, 1892. — En enkel vattensönderdelningsapparat, 1890.

I *Finsk Tidskrift:* Om de elektriska strålningsfenomenen, Bd. 40, 1896. — Atomistiken och dess framtid, Bd. 43, 1897.

I *Fyrklassiga skolans i Åbo program* för 1877—1879: Om materiens inre.

I *Åbo Underrättelser:* Redigerat politiska och sjöfartsafdelningen sommaren 1877.

Härtill särskilda uppsatser i tidningspressen.

Gustaf Mattson.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

MINNEESTAL

ÖVER

LEKTORN DOKTOR

GUSTAF OTTO MATTSSON

HÅLLET Å FINSKA VETENSKAPSSOCIETETENS ÅRSHÖGTID
DEN 29 APRIL 1915

AV

EDV. HJELT.

HELSINGFORS 1915.
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

Liksom de unga fylla luckorna i de äldres led, då de avgå från livets skådeplats, så tillkommer det vanligen ock de yngre att teckna de äldres minne. Uppgiften ter sig för dem enkel och naturlig, som en gärd av vördnad för ett liv, som fyllt sitt mått, som ett uttryck av erkännande för en verksamhet, som bidragit till att skapa och bereda den mark, varpå man själv arbetar. Och därtill kommer, att ett verksamt liv, som nått eller närmat sig gränsen för den mänskliga arbetsdagen, till en viss grad är en faktor, som redan tillhör det förflutna, där har sin givna plats, vars linjer äro någorlunda klara och vars verk kunna mera omedelbart värdesättas. Huru annorlunda står man icke inför uppgiften att teckna minnet av en person, vars liv slocknat, då det varit som bäst, ännu fyllt av rika förhoppningar och löften, då arbetsdagens gärning plötsligt avbrutits, långt innan det börjat dala mot aftonen. Om minnestecknaren därtill tillhör en äldre generation, blir uppdraget så mycket svårare. Man har icke lätt att finna det rätta perspektivet och man går till uppgiften med känslan att den naturenligen borde vara lagd i yngre händer, känslan att det ju egentligen var han, den yngre, som skulle teckna vårt liv, värdesätta vårt arbete, icke vi hans.

Det var icke länge — endast några år — Gustaf Mattsson såsom ledamot tillhörde den lärda krets, som nu hedrar hans minne, och det direkta arbete han utförde inom den vetenskapliga forskningen var icke mycket omfattande. Men det är ju icke blott det att lägga undersökning till undersökning, avhandling till avhandling, som vittnar om den vetenskapliga hågen och ger de vetenskapliga strävandena en fruktbringande betydelse. Gustaf Mattssons verksamhet i vetenskapligt avseende måste mätas med en annan måttstock än den vanliga. Hela hans personlighet och hans korta livsgärning var alltför egenartad, alltför subtil, för att kunna tecknas enligt vanliga akademiska mönster.

Gustaf Mattssons närmaste kontakt med vetenskapen låg på kemins område. Denna kunskapsgren hade varit huvudföremålet för hans första studier, och hans vidare

vetenskapliga utbildning såväl i hemlandet som utlandet. Det såg ut som skulle denna vetenskap bliva hans huvudintresse, och han utförde egna undersökningar, vittnande om stora förutsättningar och avgjord håg för forskarens kall. Han hade tillika förvärvat sig en mångsidig och omfattande allmän bildning och ett icke vanligt mått av kunskap på naturvetenskapens olika områden. Han hade säkert kunnat bliva en idealprofessor. Dock under allt detta drogs han — redan under studietiden — av en stark inre böjelse även åt ett annat håll, åt journalistiken och därmed sammanhängande skriftställarverksamhetsområden. Denna kraft vann slutligen övertaget. Vetenskapsmannen, kemisten, blev sålunda journalist, en utveckling som icke hör till de vanliga. Men det var säkert ingen omväg MATTSSON gick. En sådan föregående allvarlig vetenskaplig utbildning och självständig verksamhet på ett exakt forskningsområde som hans är, om naturlig begåvning och det rätta temperamentet äro förhanden, säkert en förberedelse för publicistkallet, vida mera värd än den traditionella, med blygsamma humanistiska studier eller ett läppjande på vetandets olika områden. Ett skarpt öga, ett klart tänkande och ett ödmjukt sinne inför livets stora frågor och gåtor kan danas i en sådan skola, där naturen härför är mottaglig. Därom bar MATTSSONS publicistiska gärning nogsamt vittne, på samma gång hans stora kunskapsförråd på områden, där den publicistiska okunnigheten vanligen är som störst, kom till synes. Man erinras, vid tanke på honom, osökt om amatörfilosofen och kemisten AUG. FR. SOLDANS yttrande, att kemin är ett oförliknelig medel att vinna det rätta elementära greppet på tillvarelsen i allmänhet och att allmänt metodiskt skola sig. Och det märkligaste är, att tidningsmannen förblev i oavbruten kontakt med sin vetenskap, även sedan han icke mera fann tid och ro till ett mera omfattande eget forskningsarbete. Mellan laboratoriet och redaktionsbyrån gick hans dagliga väg nästan till det sista, och de kemiska journalerna hamnade icke olästa på hyllan.

Att MATTSSON valde kemin till sitt egentliga studiefält, var säkert ingen tillfällighet. Den låg för hans kynne. Den erbjöd vad han behövde, icke blott fakta och teorier, icke blott matematiskt precisionstänkande, utan även ett rikt fält för den, endast av kännedomen om företeelsernas lagbundenheter begränsade, skapande fantasin inom atomernas och molekylernas underbara, men för de flesta fördolda värld. Han kallade den själv „förvandlingarnas och evighetens vetenskap“. OSTWALD delar de store naturforskarene i klassiker och romantiker. Det är påfallande att av kemins främsta idkare, närmast inom den syntetiska kemin, de flesta tillhöra romantikernas grupp. Och vad voro alkemisterna i förgångna tider annat än stora vetenskapliga drömmare! Arten är ännu densamma, ehuru metoder och mål fått en mindre svävande, en exaktare innebörd. Och vad som gäller de store inom vetenskapen, gäller ock väsentligen de mindre, de som endast draga några strån till stacken. Även MATTSSON var romantiker i denna

vetenskapliga mening. När man känner detta, förstår man ock att det icke låg någon klyfta mellan hans vetenskapliga intressen, hans verksamhet som forskare och den han utvecklade såsom publicist och skriftställare.

Gustaf Otto Mattsson tillhörde en sjömanssläkt från Åbo. De, som för trettio, fyratio år sedan plägade från Finland resa till Tyskland över Lübeck, minnas väl kaptenerna på Porthan och Pehr Brahe, hans farfader och fader. Den senare, Gustaf Edvard Mattsson, som ännu är i livet, blev sedermera föreståndare för navigationsskolan i Åbo. I början av 1870 talet hade han gift sig med Amelie Brunström från Newcastle, vars fader var av svensk och moder av irländsk börd. Han förde vid denna tid fartyg på långturer, barkskeppet „Hoppet“ från Åbo, och bröllopsresan gick runt Afrika till Indien. Efter hemkomsten till Europa föddes vår Gustaf Mattsson den 7 oktober 1873 i Bremerhaven. Modern, endast nittonårig, en rikt begåvad, känslovarm kvinna och strålande vacker, sjuknade kort därpå och dog, då hennes Guss var endast fem månader gammal. „Hoppet“ hade under tiden gjort en tur till Nord-Amerika och återvänt till England. Det var ombord å detta fartyg med det löftesrika namnet hon slutade sin korta, vackra livssaga. Mycket hade den så tidigt moderlöse gossen i arv av henne, på vars gravsten å en irländsk kyrkogård (Queenstown) läses inskriften: „Rosenkindens fägring tätlade med hjärtats skönhet“. Gossen stannade i tre år hos sina morföräldrar i England och flyttade sedan till Lübeck, där fadren vid denna tid hade sin egentliga boplats, och der Guss, under en fasters moderliga vård, tillbragte fyra år av sin barndom. Då och då fick han följa med sin fader eller farfader på en tur till norden, till fädernestaden Abo, och med havet blev han sålunda tidigt förtrogen och fästad vid det. Det gav näring åt hans drömmar och längtan då liksom vid äldre år. „En ensam mans färd över havet är en skön färd“ skrev han trettio år senare. Från Lübeck hade han sina första barndomsintryck och gärna besökte han senare i livet denna minnesrika stad. Han var sju år gammal, då flyttningen till Åbo egde rum.

Guss var ett livligt, vaket och begåvat barn med djupa forskande ögon — ett arv av modern — skrev, säges det, vers vid fem års ålder och debuterade som tidningsman tio år gammal i en av honom utgiven tidning „Stjärnan“ — handskriven naturligtvis — vilken helt och hållet, med artiklar, krönikor och charader, redigerades av honom själv och vilken upplevde tre årgångar. I nästsista numret underrättade „huvudredaktören“ de ärade prenumeranterna, att tidningen måste upphöra med årets utgång, bl. a. emedan „vinsten varit särdeles liten i förhållande till utgifterna“, en publicistisk erfarenhet, som han även senare i livet fick pröva. Men trots tidig mog-

nad och allvarlig håg var han helt visst icke „lillgammal“, utan egde det äkta gosselynnet med lust för upptåg och äventyr, såsom man kan finna ur hans antydningar om upplevelserna under barndomsåren och hans ofta markerade förstående intresse för pojkpsykologins egendomligheter. Och ett „gossejärta“ i VIKTOR RYDBERGS mening — ärligt och gott — bevarade han livet igenom.

Vid nio års ålder inskrevs han i Åbo lyceums första klass. Hans snabba uppfattningsförmåga och mångsidiga begåvning gjorde sig även här gällande. Han var alltid den första eller andra på klassen. Konkurrensen om primusskapet stod mellan honom och hans goda vän, den tidigt bortgångna ELIAS ROOS. På de högre klasserna i konventet var MATTSSON en av de tongivande och dess tidning „Råttan“, då hektograferad i circa 100 exemplar, hade under dessa år sin glansperiod, då den i hög grad präglades av hans temperament, intressen och stilistiska förmåga. Upphöjda gymnasistidealer, dock utan stora fraser, levnadsfriskhet och gott skämtlynne funno uttryck i det han här bjöd sina konventskamrater. I hans dimissionsbetyg bröts den långa raden av „berömliga“ icke av något annat vitsord. Som student inskrevs han vid universitetet våren 1891.

Såsom ung student skrev MATTSSON till en vän ungefär sålunda:. „Jag vet att jag har en hel hop pund att förvalta, men jag vet icke huru jag rätt skall placera dem“. Yttrandet vittnar om en stor ansvarskänsla i avseende å sig själv redan i unga år. Och huru ovanligt såsom uttryck för en ung högt begåvad students reflexion och känsla ljuda icke följande önskeord: „Jag ville byta ut diverse gåvor på t. ex. följande sätt: „gott huvud“ mot „gott järta“, „gott utseende“ mot „anspråkslöshet“ o. s. v. Först då kunde jag börja räkna på livets lycka“.

Emellertid tyckes MATTSSON i valet av studiebana icke hava tvekat, om han också senare icke var fullt nöjd med det första steg han tog. Han inträdde omedelbart i polytekniska institutet, i dess kemiska fackskola, vars fyra års kurs han med framgång absolverade. År 1895 utdimitterades han såsom kemistingeniör med diplom. Under somrarna 1894 och 1895 tjänstgjorde han såsom biträdande geolog vid de geologiska undersökningarna i Tavastland och norra Savolax. En uppsats i Industristyrelsens Meddelanden „Skärningarna vid Keuru—Jyväskylä järnvägslinje“, grundande sig på egna geologiska iakttagelser, bär vittne om det vetenskapliga intresse han egnade även detta mera tillfälliga arbetsgebit. Dessa sommararbeten och studier kommo honom till nytta, då han sommaren 1897 såsom ciceron och tidningskorrespondent deltog i den geologiska exkursion, som då i sammanhang med den internationella geologkongressen i Petrograd företogs i Finland.

Den tekniska utbildning MATTSSON erhållit kom framdeles ofta till synes i hans forskning och skriftställarverksamhet, men utövande tekniker blev han aldrig. Hans

håg låg åt det vetenskapliga hållet, om ock vetenskapens tillämpningar i det praktiska livet alltid voro egnade att fängsla hans intresse. Redan omedelbart efter afslutad kurs vid institutet anställdes han där såsom assistent och fick sålunda fast fot vid denna läroinrättning, vilken han sedan hela sitt liv tillhörde, om ock hans verksamhet grenade ut sig åt olika håll. Han fortsatte emellertid sina kemiska och fysikaliska studier och avlade 1898 filosofiekandidatexamen vid universitetet samt promoverades till filosofiemagister vid promotionen 1900, varvid han innehade andra hedersrummet. Han betraktade det senare såsom ett misstag, att han icke omedelbart egnat sig åt universitetsstudier utan gått den polytekniska vägen.

Det är naturligt att en person med Mattssons läggning icke kunde stå främmande för kamratkretsen och dess strävanden. Han deltog tvärtom ivrigt i polytekniska föreningens verksamhet och kamratliv, i vilket han säkert ingjöt mycket gott ur sin rika personlighet, sin ideella optimism och sina mångsidiga intressen. Han var och förblev även senare en högt uppburen medlem i denna ungdomskrets. Året 1893—94 var han föreningens bibliotekarie, året 1894—95 dess ordförande. Sedermera, efter återinskrivning vid universitetet, kom han i närmare kontakt med student- och avdelningslivet och intog även här snart en ledande plats. I två repriser (1899—1901) var han studentkårens viceordförande och i fyra år, från år 1899, var han vestfinska avdelningens t. f. kurator ända till dess andra delning. I detta förtroendevärv ställdes Mattssons personlighet och åskådningssätt på ett hårt prov. Hans ställning som kurator var nämligen till en början allt annat än avundsvärd. Av avdelningens finska majoritet mottogs han med en demonstrativ köld, emedan hans val, vilket egde rum vid ett möte med nästan tumultuarisk prägel, genomdrivits mot denna majoritets önskan och av densamma betraktades såsom en statskuppsartad överrumpling, iscensatt av den svenska minoriteten. På svenskt håll var han visserligen högt uppskattad som kamrat, men icke allmänt erkänd såsom ledare, enär de häftiga avdelningsdebatterna mer voro egnade att framhäva talare av ett hetsigare temperament än hans. Och dock lyckades det honom genomföra sin uppgift på ett sätt, som skaffade honom uppriktig aktning och sympati bland samtliga partifraktioner. Det var, såsom en av hans avdelningskamrater framhållit, huvudsakligen två omständigheter, som gjorde, att Mattsson lyckades i sin svåra och ömtåliga uppgift. Den ena var hans ovanligt vinnande personlighet, som i kamratlikt umgänge icke kunde förfela sin verkan på vare sig vän eller motståndare, den andra hans uppriktiga strävan att förebygga alla onödiga dissonanser och hans stränga opartiskhet, vilken framträdde så mycket mer som den hörde till sällsyntheterna. Mattsson led av sakernas tillstånd och han önskade bildandet av en centergrupp inom avdelningen, vilken, rekryterad från vartdera partiet, skulle motarbeta benägenheten att av varje diskussionsämne göra en språkpolitisk partifråga. Så långt kom han icke, men

det lyckades honom att väsentligt mildra uttrycken av puerilt partisinne mellan representanterna för de båda språkgrupperna. Och så inträffade slutligen det märkliga, att vid ett nytt kuratorsval i den genom delning uppkomna första tvåspråkiga Åbo avdelningen MATTSSON varmast understöddes av den finskspråkiga minoriteten. Tio år senare utsåg Åbo avdelning honom till sin hedersledamot.

Det var ju en även politiskt mycket brydsam och ungdomens känslor upprörande tid, under vilken MATTSSON handhade kuratelet. Såsom jag, vilken då innehade rektoratet vid universitetet, med tacksamhet erinrar mig, lyckades han genom sin personlighet och sin klokhet inom sin krets verka för upprätthållandet av lugn och ordning. Huru ungdomen värderade honom på grund av hans personlighet, karaktär och varma känsla för dess strävanden, därom vittnade nogsamt dess hyllning vid hans sista färd. I dimmig december slogo studenterna i vita mössor vakt kring den döde, som varit en student som få.

År 1899 utnämndes MATTSSON till biträdande lärare i kemi vid polyt. institutet, alltså till innehavare av den tjänst, som sedermera (1908), då institutet ombildades till teknisk högskola, blev förändrad till ett lektorat, och vilken MATTSSON ända till sin död innehade. Men tillika ombetroddes han i särskilda repriser med handhavandet av andra lärarebefattningar vid institutet, så läraretjänsten i allmän kemi samt den i kemisk teknologi, extra lärarebefattningen i elektrokemi och assistentbefattningen i fysik, alltså en synnerligen mångsidig verksamhet, vittnande om huru bred bas han lagt för sina vetenskapliga studier. Medan han under terminerna var strängt upptagen av sin lärareverksamhet och andra värv, använde han ferierna till sin vidare utbildning och egna vetenskapliga arbeten. Allt sedan 1897 var han under en följd av år nästan varje sommar för detta ändamål i utlandet. Han studerade sålunda fysikalisk kemi och elektrokemisk analys i Göttingen hos NERNST och KÜSTER (1897), organisk kemi och gasanalys i Zürich hos BAMBERGER och LUNGE (1898, 1899, 1903) och idkade även en tid studier vid tekniska högskolan i Karlsruhe (HABER, 1902) och i München (HOFMANN, 1906). Särskilt Zürich uppsökte han gärna och utnyttjade de olikartade utbildningsmöjligheterna där, på samma gång han trivdes gott bland det schweiziska folket och i alpnaturen. Här utförde han också en del av de experimentella undersökningar, vilka lågo till grund för hans specimen för doktorsgrad „Pyrenets konstitution och genesis. Synteser och syntetiska försök“, som utgavs hösten 1905, och till vilka det första uppslaget givits av hans lärare professor KOMPPA. I början av följande år avlade han licentiatexamen.

Genom sitt förtjänstfulla specimen och övriga vetenskapliga meriter hade han förvärvat sig nödig kompetens för docentur och utnämndes till docent i kemi i maj 1906. Hans förmåga och arbetskraft togs också snart i anspråk för universitetsundervisningen,

icke blott enbart såsom docent utan såsom t. f. adjunkt under tvänne läseår och i denna egenskap under ett läseår såsom t. f. professor i kemi. Samtidigt skötte han sin undervisning vid tekniska högskolan och hade sålunda att fylla ett arbetsmått, som varit mer än nog för en man med starkare helsa än hans. Om laboratoriiundervisningen vid universitetet i någon mån blev lidande under detta provisoriska arrangement, så kan han icke med skäl klandras härför. För själva undervisningen, för eleverna och deras arbeten hyste han mycket intresse, men administrationen av den stora inrättningen med dess mycken tid i anspråk tagande detaljer var honom något emot. Hans undervisningsverksamhet vid universitetet fortgick, om ock med avbrott på grund av sjukdom, under fem läseår. Ämnena för hans föreläsningskurser voro mera växlande än vid den kemiska undervisningen vanligen är fallet. Utom grundkurser i oorganisk och organisk kemi, föreläste han över fysikalisk kemi, syntetiska metoder i organiska kemin, kemisk statik och kinetik, radiumforskningen och alkemins historia.

Jag har själv aldrig varit i tillfälle att åhöra någon akademisk föreläsning av Mattsson, men hans elever torde varit ense om, att han såsom färeläsare var idealisk. Han egde som känt en utomordentlig lätthet att uttrycka sig även i tal på ett vårdat språk och synnerligen klart. Därtill kom hans fenomenala minne, vilket gjorde att han utan koncept eller anteckningar kunde i sina föreläsningar meddela icke blott sakliga detaljer utan även sifferuppgifter och till och med hela serier av sådana. Vid föreläsningarna för ett fåtaligt auditorium, såsom i en del kurser vid polyteknikum, inflätade han gärna i framställningen liffulla skildringar av intryck från studier vid utländska laboratorier och kongresser eller intressanta detaljer och anekdoter. Varöver han än föreläste, yttrar en av hans åhörare, karaktäriserades framställningen alltid av en övertygande klarhet, medryckande liffullhet och en sällsynt språklig elegans. De lyckligt funna orden och ordvändningarna bidrogo att fästa de omtalade företeelserna i minnet hos åhörarena. Trots sin eminenta föreläsningsförmåga ansåg Mattsson detta undervisningssätt inom kemin vara opraktiskt och ganska resultatlöst. Och han tillerkände icke heller sina egna föreläsningar någon större betydelse för eleverna. Men dessa voro nog här av en annan mening. De åhördes gärna också av äldre, redan längre komna studerande.

En andra lärostol i kemi hade inrättats vid universitetet år 1908 och man närde, åtminstone i närmast intresserade kretsar, den önskan och förhoppning, att Mattsson skulle bliva dess innehavare. Han hade också ansökt professuren. Hans gedigna studier, framstående lärarförmåga och höga begåvning hade utan tvivel tillfört vår professorskår en kraft, vilken varit till betydande vinning för vår högskola. Konsistorium önskade också i detta avseende jämna vägen för honom, möjliggöra för honom att ostört av andra värv kunna egna sig at vetenskapliga arbeten och tilldelade honom våren 1909

ett Rosenbergskt stipendium att åtnjutas under tre år. En vittsyftande arbetsplan, hänförande sig till nya sidor av elektrokemisk forskning, hade han för sig uppställt såsom program, vilket han ville realisera under arbete främst hos ARRHENIUS vid Nobelinstitutet i Stockholm. Emellertid avsade sig MATTSSON stipendiet, och hvad detta innebar stod klart för alla. Det var ett avgörande som betydde ett avsked, icke från vetenskapen överhuvud, men väl från tanken på möjligheten att helt egna sig däråt, att göra den vetenskapliga forskarens och lärarens kall till sin främsta livsuppgift. Vad som innerst förmådde honom därtill, visste han kanske endast själv, men motiverna låga säkert icke blott i yttre levnadsomständigheter utan även i ett inre krav, som han med sin ärliga, plikttrogna natur icke kunde tillbakavisa. Han hade låtit undersöka sitt helsotillstånd och erhållit rådet att för den närmare framtiden icke arbeta mer än han nödvändigt måste. „Att arbeta endast med halv maskin under åtnjutande av stipendiet, varken kan eller vill jag", skrev han. Men knappast var tanken på sjukdomen det enda verkande motivet. Det synes som om han, med kännedom om sina månggrenade intressen, hyst tvivel om att helt, med all nödig koncentration, kunna egna sig åt universitetslärarens och vetenskapsmannens kall, ett tvivel som av sjukdomskänslan ytterligare stärktes. Samtidigt meddelade han också, att han icke komme att fullfölja sin ansökan om professuren, ehuru han hade några arbeten dels färdiga, dels under händer, vilka kunnat göra honom kompetent till denna, om han ock själv ansåg sin kompetens mycket knapp. „När jag nu slår karriärfrågan ur tankarna", skrev han, „så tror jag också, att jag tar mitt vetenskapliga arbete på ett annat sätt och gläder mig på förhand åt att få utföra det uteslutande av intresse och precis och inom det område jag har lust för".

Det var under perioden 1905—1910 MATTSSONS produktiva vetenskapliga verksamhet var som livligast. Därförinnan hade han i Tekniska föreningens handlingar (1904) offentliggjort en längre uppsats „Teknisk gasanalys", tydligen föranledd av hans hos LUNGE i Zürich året förut bedrivna studier. Den klara orienterande sammanställning över gasanalysens viktigare metoder han här lämnar grundar sig delvis på egna erfarenheter och experiment. Han ville genom denna uppsats väcka våra teknikers uppmärksamhet på ett hos oss ganska förbisett vetenskapligt hjälpmedel vid talrika fabrikatoriska processer. Våra industriella inrättningar sakna, säger han, „den ständigt flödande källa av impulser och initiativ, sådana fabrikslaboratoriet och dess vetenskapligt bildade personal i sin fortgående verksamhet erbjuder". Vid tekniska och hygieniska kongressen i Köpenhamn 1903 redogjorde MATTSSON i ett sammanfattande föredrag över svavelhalten i lysgas för sina på detta område i Zürich utförda arbeten.

Hans doktorsspecimen är redan i annat sammanhang omnämnd. De egna undersökningar han här meddelar hade det i stenkolstjäran förekommande högt kondenserade kolvätet pyrens syntetiska uppbyggande till mål. För hans mångfrestande idékombina-

tionslust är betecknande, att han härvid inslog icke mindre än tretton olika vägar, av vilka tre förde till målet, alla av pyrogen art. Han lyckades genom dessa synteser ådagalägga, att pyrenet kan uppbyggas såväl ur naftalin som ur difenyl, vilkas kärnor sålunda inga i detta kolväte, varigenom dess konstitution, angående vilken en viss osäkerhet rått, kan anses bevisad. Arbetet vittnar icke blott om hans kombinationsförmaga utan även om stor experimentell skicklighet. „Han är på god väg att utbilda sig till specialist på den pyrogena syntesens område och det vore skada, om han icke fortsatte på denna bana" yttrade bedömaren, professor Aschan, i anledning av denna undersökning. I avseende å pyrenets genes ur stenkol genom torrdestillation uttalar Mattsson i anslutning till Heusslers destruktionsteori den tanken, att det icke är en syntetisk produkt utan en primär sönderdelningsprodukt av de i stenkol sannolikt ingående mångkärniga komplexerna. Denna lockande uppfattning var nog icke riktig, såsom man kan sluta ur senare undersökningar av R. Meyer rörande acetylenkondensationen. I nära anslutning till detta arbete står hans pyrogena syntes av fluoren ur o-ditolyl. Härvid avspjälkes anmärkningsvärt nog en metylgrupp, vilket Mattsson sinnrikt försöker förklara genom en sterisk kollision mellan metylgrupperna, beroende på en trögghet i bindningen mellan de båda benzolresterna, i följd varav cisläget icke fritt övergår i transläge. „Man skall", säger han, „måhända i en framtid lyckas överkomma fall av geometrisk isomeri inom den ganska ytligt studerade difenylserien", en förutsägelse, som genom några engelska forskares iakttagelse av isomera dinitrobenzidiner nyligen synes gått i fullbordan.

Från denna tid härrör också en undersökning över den såsom bifraktion vid fabriksmässig tillverkning av eter ur finskt ramaterial erhållna s. k. vinoljan. Genom upprepade långvariga destillationer lyckades han ur denna avskilja icke blott tidigare i den tyska vinoljan av Hartwig uppvisade utan även för densamma nya substanser.

Under åren 1909—1910 inlämnade han till offentliggörande i Vetenskapssocietetens skrifter icke mindre än sex undersökningar, delvis från olika områden, från analysens, från den kemiska och elektriska syntesens och från den fysikaliska kemins gebit. Han meddelade om en av honom uttänkt och utarbetad kolorimetrisk metod för bestämning av kväveperoxyd i gasblandningar, grundande sig på dess inverkan på jodkaliumlösningar. Huruvida den funnit vidare användning, är mig icke bekant. En annan undersökning avsåg arten av kvicksilvers inverkan på organiska haloidföreningar och fann han denna i överensstämmelse med kvicksilvrets natur och ställning i det periodiska systemet förlöpa dels såsom vid natriums inverkan under halogeneliminering, dels såsom zinks under avspjälkning av halogenväte, alltså dels i enlighet med den Wurz-Fittigska, dels enligt den Zinckeska reaktionen. En undersökning av metalliskt kalciums inverkan på haloidföreningar ådagalade, att processen, såsom på grund av metallens två-

värdhet syntes sannolikt, försiggår uteslutande i sistnämnda riktning. Kalcium kan således icke ersätta natrium men väl zink vid dessa reaktioner.

För elektrokemin hade MATTSSON uppenbarligen en viss förkärlek såsom ock framgår ur hans reseplan i fråga om Rosenbergska stipendiet. Där fanns mycket nytt land att upptäcka och många överraskande iakttagelser kunde göras, vilket lockade honom. Bland de nämnda avhandlingarna ingingo också tvänne, hänförande sig till elektrosyntes. Sedan 20 år hade man sig genom BROWNS och WALKERS arbeten bekant, att vid elektrolys av tvåbasiska organiska syrors etersyrade salter erhållas högre molekylära tvåbasiska syror, i det de frigjorda syreionerna under kolsyreutveckling förena sig med varandra. Den högsta erhållna syran var den ur sebacinsyra vunna, 18 kolatomer innehållande normala syran. MATTSSON ville undersöka, om syntesen här hade en verklig gräns, eller om man kunde stiga ännu högre i serien och sålunda komma till mycket högmolekylära syror. Han modifierade förfaringssättet så, att vida bättre utbyten erhöllos, men det visade sig i själva verket att reaktionen icke gick längre. De redan stora ionkomplexerna förenade sig icke vidare. Ur den nämnda 18 kolatomer innehållande syrans, dekahexandikarbonsyrans, esterkaliumsalt erhölls icke den väntade syran med 34 kolatomer, utan endast en omsättning av utgångsprodukten i neutral ester och neutralt salt egde rum. Han tillämpade metoden i en annan undersökning på de tvåbasiska syrornas halvamider och det visade sig, att den här är lätt genomförbar och att den i en del fall kunde ega företräde framför den ovannämnda. Ur suberaminsyra med 8 kolatomer erhöll han sålunda dodekandikarbonsyra med 14 kolatomer.

En rent fysikalisk-kemisk undersökning var den över binära blandningars kritiska lösningstemperatur. MATTSSON ville här ingå på frågan om det föga utredda sammanhanget mellan kritisk lösningspunkt och kemisk konstitution hos de i företeelsen deltagande ämnena. Han valde härtill å ena sidan de klor- och bromsubstituerade nitrobenzolerna, å den andra det indifferenta kolvätet oktan och kunde ur försöken draga vissa allmänna slutsatser. Den kritiska lösningstemperaturen visade sig vara en utpräglat konstitutiv egenskap, men syntes dock hava även ett addidivt element. Hans avsikt att vidare utföra dessa intresseväckande undersökningar fullföljdes icke.

Alla dessa undersökningar hade han utfört under de närmast föregående åren, dels å tekniska högskolans, dels å universitetets laboratorium, men avhandlingarna äro redigerade och daterade Davos-Schatzalp hösten 1910, där han sökte bot för sin redan då starkt angripna helsa. Det är anmärkningsvärt, att han, som eljes så lätt tog till pennan, hade, som han säger, „en svår psykisk obeslutsamhet“ att publicera „färdiga“ undersökningar. Han hade alltid den känslan, att där ännu var något att göra till, och uppskjöt med deras offentliggörande. Flere av honom utförda experimentella arbeten förblevo opublicerade. Så t. ex. hans hos HOFMANN i München (1906) gjorda försök,

huruvida erbium-metallen var enhetlig eller icke. Undersökningen var väsentligen av spektrometrisk art.

År 1911 invaldes Mattsson till ledamot av Finska Vetenskapssocieteten, ett erkännande, varpå han satte värde. Mycket hann han icke mera giva i gengäld härför. Endast två undersökningar anmäldes efter denna tid av honom till införande. Den ena var en studie över enbarksoljans sammansättning, vilken produkt visade sig vara av individuell natur. Han avskiljde därur, utom förut bekanta terpener, en ny seskviterpen, junipen, och en seskviterpenalkohol, juniperol. Hans avsikt att fortsätta undersökningen blev icke realiserad. Den andra åter var hämtad från elektrokemin och gällde de katodiska reaktionerna vid elektrolys av salter i flytande svaveldioxid, alltså i ett icke dissociation verkande lösningsmedel. Undersökningen, som är av icke ringa intresse, hänförde sig till salter av alkalimetallerna, ammonium och magnesium. Någon metall avskiljer sig härvid icke utan dels svavel ur lösningsmedlet dels saltartade komplexer av sekundär natur. De ur natrium erhållna utmärkte sig genom självantändlighet, t. o. m. i indifferenta atmosfärer, vilken stundom kunde uppträda med explosionslik våldsamhet. Sannolikt beror företeelsen på uppkomsten ur ett fintfördelat, ytterst labilt natriumhyposulfit.

Detta vore en kort resumé av innehållet i de c:a tio avhandlingar, till största delen offentliggjorda i Vetenskapssocietetens skrifter, i vilka Mattsson redogjorde för sina experimentella undersökningar. En del av dem voro mycket arbetsdryga oeh krävde experimentell skicklighet och vana. Påfallande är, att de röra sig på mycket olika områden, och de låta komma tillsynes ett visst sökande efter ett för forskaren lämpligt och tillfredsställande arbetsfält. Att detta, om han fått leva och mera ostört egna sig åt egna undersökningar, hade blivit elektrokemin, därom kan icke något tvivel råda. Några mallarbeten utförde han icke, utan sökte han alltid efter något verkligt nytt och intresseväckande och han leddes vid arbetet alltid av något sporrande eller lyftande moment, av lust att skapa, icke att efterhärma. Det låg skapande fantasi över hans arbeten, även om de till sin omfattning voro starkt begränsade. Man spårar även i hans avhandlingar en strävan att giva språket i dem icke blott en vårdad form utan även en större omväxling och saftighet än vanligen är fallet i dylika publikationer inom de exakta vetenskaperna. Meningarna om den bästa vetenskapliga stilens art kunna vara delade, och mången ger den torra men klara stilen företräde framför den, som försöker tillfredsställa välljudets fordringar, men säkert är att försyndelserna mot ett vårdat språk på dessa gebit, icke minst hos oss, äro nog allmänna. Mattssons ståndpunkt i denna fråga framgår ur följande uttalande i ett brev år 1903: „Jag kan icke låta bli att vittna om den njutning i språkligt formellt avseende denna senaste avhandling berett en, som törhända har det dåliga namnet om sig att vara språkpedant åtminstone beträf-

fande andra. Det kan nu icke hjälpas, att också naturvetenskapsmannen genom en utvecklad språkkonst är i tillfälle att göra sin forskning nytta och jag måste bekänna, att, när jag äntligen engång får mitt licentiatarbete bragt till den avslutning mångahanda andra sysslor tyvärr om och om fördröjt, frestelsen kommer att kännas stor att sammanställa resultaten på svenska och icke på tyska — blott för att försöka åter engång få till stånd en experimentell uppsats på god svenska. De i Sverige utkomna specimina synas mig ofta nog så ovårdat affattade". Avhandlingen publicerades i själva verket på svenska, hans övriga ovan nämnda meddelanden däremot på tyska.

MATTSSONS kemiskt-vetenskapliga och kemiskt tekniska intressen fingo naturligtvis även uttryck i hans verksamhet inom Finska kemistsamfundet. Vid dess möten höll han ofta på sitt liffulla sätt föredrag eller gjorde meddelanden angående sina egna undersökningar eller intresseväckande framsteg inom kemin och dess tillämpningar. En del av dessa ingå in extenso i samfundets „Meddelanden". Åren 1898—1899 var han samfundets sekreterare, året 1909 dess ordförande.

Vetenskapens popularisering var en uppgift som låg MATTSSON nära om hjärtat. Över okunnigheten på det naturvetenskapliga gebitet hos den bildade allmänheten klagade han ofta. Han var långt ifrån en fiende till den humanistiska bildningen — han var på hithörande områden mer beläst än mången humanist — men den var honom ensam för sig för trång och abstrakt och måste kompletteras med kunskaper och uppfattning, hämtade ur naturens värld och den exakta forkningens verkstäder. Att uppgiften var svår, det insåg han till fullo. Med tanke närmast på sin egen vetenskap skrev han: „Att skriva kemi för en merendels humanistikt bildad läsarekrets, är ännu i våra dagar svårare än att skriva humanoria för en kemist". Men MATTSSON kunde, om någon, popularisera naturvetenskap, tack vare icke blott sina mångsidiga kunskaper och deras översiktlighet utan även sin lätt flytande stil och framförallt sin förmåga att begripligt framställa en sak utan någon lärt och tungt verkande apparat. Han utvecklade i detta skriftställeri en alldeles egenartad stil, lätt och underhållande, utan att det exakta och väsentliga i saken därigenom förytligades. Den enkla folkliga stilen låg icke för honom. Så ansåg han själv och däri hade han väl rätt. Han skrev för den litterärt bildade allmänheten. „Jag har", yttrade han en gång, „behov av kulturord med utländsk klang i ganska stor mängd, annars kan jag icke skriva så som jag finner det bäst motsvara mina tankar". Något större populärt verk skrev han icke — han önskade det gärna, men fann aldrig tid därtill. Men i sina „Naturvetenskapliga och tekniska översikter" i Finsk tidskrift, i mindre bitar i Argus och i dagspressen lät han sin penna flitigt arbeta i syfte att inför en större allmänhet bringa naturvetenskapens aktuella problem och resultat. Såsom ett utmärkt prov på detta hans skriftställeri ville jag framhålla hans artikel i Finsk tidskrift „Om de ädla gasernas kemi", en exposé över

William Ramsays forskning. I sin minnesruna över Mattsson yttrar Albert Engström: „Med all säkerhet ha vi i vårt land ingen — om jag undantager den döde Bengt Lidforss — som så som Mattsson har förstått att popularisera vetenskapen — att göra oss, som icke ha tid, till begripare av mänsklighetens nyaste erövringar". Jo, tillägger han „möjligen Arrhenius". Lidforss — för att icke nämna Arrhenius — stod ju på ett annat, ett längre hunnet vetenskapligt plan än Mattsson och har såsom skriftställare på detta område lämnat djupare spår efter sig än denne. Men Mattssons stil och framställningsförmåga, förmåga att skriva naturvetenskapliga saker begripligt för den i dessa ting olärde, kan gott täfla med hans, ehuru den till sin art var något annorlunda. Hos Lidforss skymtar ofta tendensen, socialpolitikerns eller den satiriska polemikerns, fram, medan Mattsson skrev mera omedelbart och gärna kryddade sin framställning med godmodigt skämt. Och det låg solglitter över vad Mattsson skrev, även då det gällde allvarliga naturvetenskapliga spörsmål.

Mattssons håg för publicistisk verksamhet framträdde redan tidigt och mycket utpräglat. I någon mån var väl läggningen härför ett arv av hans fader, som hade en lättflytande penna och, sedan han bosatt sig i Åbo, var en flitig medarbetare i dagspressen på orten. Mera uppmärksammad blev Mattssons publicistiska talang genom de redan nämnda resebrev han skrev till Nya Pressen från geologexkursionen i Finland sommaren 1897, och efter denna tid blev hans penna oftare synlig i detta blad, tills detsamma indrogs år 1900. Åren 1902—1906 var han regelbunden kronikör i Helsingfors Posten och blev härunder i tillfälle att utveckla den fond av kvickhet och skämtlynne, som låg i hans natur, samt forma sin stils egenart. Det var ock här hans sedan så populär blivna signatur „Ung Hans" först framträdde.

Under de följande åren var det — frånsett en kortare tids medarbetareskap i Nya Pressen — främst tidskriften „Argus", som lade beslag på Mattssons publicistiska intresse. Den hade startats av honom och likasinnade vänner år 1907. Betecknande för honom, hans art och strävanden är tidskriftens anmälan. Vi följa, säger han här, blott en riktlinje: Kulturlinjen, och vår lösen är: Ögonen upp! Och belysande för hans ståndpunkt är följande: „Såsom rikssvenska epigoner ha vi föga att uträtta, såsom svenskatalande finnar, med modersmålets rykt för ögonen, befolka vi ett eget land på odlingens världskarta". Mer än någon annan sörjde Mattsson för tidskriftens innehåll, dess mångsidighet och aktualitet. Allvar och skämt, vetenskapliga översikter och kåserier i dagens frågor flöto omväxlande ur hans penna, vilken delvis dolde sig under signaturen „Panoptes". „Har", yttrade en av tidskriftens redaktörer, „Argus gjort någon märkbar kulturinsats, så är förtjänsten främst Mattssons".

Så mycken tid och intresse han än nedlade på denna verksamhet var den dock i stort sett en bisysselsättning. Så mycket mera förvåning väckte det, då Mattsson hösten

1911 övertog huvudredaktörskapet i den då grundade, närmast genom hans bemödanden tillkomna dagliga tidningen „Dagens Tidning“. Den böjelse för publicistisk verksamhet, som bodde innerst hos honom, tog nu fullt ut sin rätt. Med spänstighet och energi kastade han sig in i den nya verksamheten, som tillfredsställde hans temperament, hans månggrenade intressen och stilistiska talang. „Jag har alltid trivts på redaktionsbyråerna, på dem är det ständigt en så lugngivande oro“ förklarade han. Denna lugngivande oro fick han nu i rikt mått till livs, men man har skäl antaga, att doserna voro vida större än hans svaga helsa kunde fördraga. Han hade icke blott ledningen av det hela, även i tekniskt avseende, om hand. Han skrev största delen av de ledande artiklarna, varje vecka en utrikespolitisk översikt och varje dag såsom hors d'œuvre under rubriken „I dag“ sina mest i skämtsam form hållna betraktelser över världens händelser i smått och stort — ett rekord i sin art. I tanke att kunna förbättra tidningens ekonomi tog han senare även direkt del i dess skötsel. Men företaget gick icke efter önskan. Talrika vänner hade hans blad förvärvat sig, men det var främst de ekonomiska svårigheterna som icke kunde övervinnas. I någon mån medverkade härtill tidningens, från svensk partipolitisk synpunkt sett, något oklara hållning. Efter två och ett halvt år måste tidningen upphöra genom att sammanslås med Nya Pressen, vilken nu uppträdde såsom „Dagens Press“, och i vars redaktion MATTSSON inträdde. Men med hans publicistiska skötebarns upphörande, på vars framtid han så varmt trott, hade också något brustit inom honom själv. Det var en kraftansträngning, som icke fört till det föresatta målet. Han yttrade härom själv i ett brev: „Dagens Tidning i dess helhet var ett frö — bristfälligt och svagt, men något i alla fall — och den hade gott kunnat fortleva, ifall helst några av de många inflytelserika herrar, som i huvudstaden hade tillfredsställelse av den, skulle räckt ut ett finger förrän det var för sent. Detta skedde icke, bladet dog och lever i sådan form helt säkert icke mera upp. Det beklagades mycket, men ingen hade „kommit sig till“ att inskrida“. Han kände sig något bitter över denna kyla och brist på yttring av solidaritet och tillägger: „Den hets jag under dessa år varit utsatt för har gjort min själ en smula hårdbarkad och min kärlek till mänskligheten mycket smalspårig“.

Men denna hans publicistiska verksamhet var dock icke förspilld möda, detta närmast tillföljd av den anda, som alltigenom präglade densamma. I tidnings-tekniskt avseende gav MATTSSON många nya uppslag och införde förbättringar, vilka kommit tidningspressen i vårt land till godo. Men även i fråga om innehåll och ton ville han giva läsaren något annat, än man i vår tidningspress varit van vid. I vår dagspress rådde, ansåg han „en synnerligt grund uppfattning om det djupare kulturlivets betydelse“. Han strävade som tidningsman att motarbeta den ytlighet, ovederhäftighet och slentrian, som så lätt trycker sin prägel på yrkesjournalistens arbete. Han drömde om

att engång få se vår tidningspress som en fullgod exponent för vårt folks andliga liv, som en folkuppfostrare, motsvarande alla de höga anspråk, som måste ställas på en sådan. Intelligensen borde mer än hittills ställa sig i det offentliga ordets tjänst och han kände sina egna förpliktelser i detta avseende. En oklanderlig språkbehandling, en lätt spirituell stil, en vetenskaplig vederhäftighet och först som sist djup ansvarskänsla voro de egenskaper, som enligt Mattssons tanke fordrades av en god journalist. Hos honom själv voro också dessa egenskaper i mindre vanlig grad utvecklade och förenade med grundliga och ovanligt mångsidiga kunskaper samt en nära nog obegränsad receptionsförmåga.

I sin tidnings ledande artiklar strävade Mattsson till en större mångsidighet, ett mera personligt grepp på uppgiften och en mera underhållande och intresseväckande form, än man ofta möter i tidningarna. Men vid själva „ledaren", sådana vi äro vana att möta den före den övriga texten i våra tidningar, lade Mattsson icke överhövan stor vikt, och den saknades icke sällan. Ur notiser, rubriker och dylikt ville han även utmönstra allt banalt, otympligt och om andlig lättja eller slöhet vittnande i form och uttryck. Kort, klart och koncist borde nyhetsmaterialet meddelas allmänheten. All sensationslystnad och brist på ansvarskänsla även i notisväg var enligt hans mening ovärdigt en tidningspress.

Våra inre partipolitiska strider och våra sociala tvister intresserade honom jämförelsevis föga — de voro honom på visst sätt för små. Men allt positivt kulturarbete, från vilket håll det än utgick, såväl det yttre civilisatoriska som det andligt kulturella, både ville och förstod han, även som tidningsman, att uppskatta och för allt mänskligt, alla humanitära strävanden, hade han djup medkänsla. Då hans penna sysslade med sådana frågor, blev den varma tonen i hans stil omedelbar och medryckande. All trånghet, vare sig det gällde politiska synpunkter, klassintressen, religion, religionsfientlighet eller annat, var honom starkt emot. Mot självförhävelsen och dumheten i samhället förde han det mjukare löjets eller den spetsigare satirens vapen. Han undvek — och detta hör till det vackraste i Mattssons journalistiska program — de personliga angreppen och de försåtliga insinuationerna, vilka ju tyvärr varit även hos oss en vanlig av tidningsmoralen godkänd publicistik krydda, ävensom rätthaveriet och oärligheten i polemiska uttalanden. Allt sådant förlade Mattsson till samma plan som annan låghet eller oärlighet, vilken ju kan med mer eller mindre talang dokumenteras. Om han någongång var skarp mot enskild person, så var det icke denna utan saken han riktade sig sig emot. Tog han härvid fel, låg det nog icke i viljan. Själv var han mycket känslig för angrepp och kritik, där de syntes honom lättvindiga eller orättvisa, medan han villigt erkände verkliga misstag och fel. En hårdhudad tidningsman blev han aldrig.

Det var överhuvud en större frigjordhet från de små synpunkterna, ett höjande till

ett högre plan vid bedömande av företeelserna inom samhälls- och människolivet, han ville att skulle vinna insteg inom pressen, som ju skulle icke blott återspegla utan även leda och uppfostra. I vilken mån MATTSSON lyckats i denna strävan, kan väl i detta nu icke bedömas, men utan inflytande och betydelse har den för visso icke varit. Han ställde kanske — varm idealist som han var — målet för högt, för att detsamma skulle kunnat förverkligas i fråga om dagspressen med dess arbetsmetoder, möjligheter och resurser åtminstone i vårt land. Inom tidningsmannavärlden, så högt man än där skattade MATTSSON, var man icke fri från intrycket, att han intog positionen av en publicistikens mentor, men man betvivlade icke hans rena avsikter eller bestred hans överlägsenhet. Vårt lands äldsta tidningsman har om honom yttrat, att „han blev den svenska pressens i Finland mest mångsidiga och mest lysande representant på grund av sitt medfödda geni och sin rika begåvning“, men han tillägger, att han icke blivit det han blev utan en djup fond av arbete.

Lätt flöt språket ur hans penna, lätt formade sig tankarna i ord. Det var, såsom han själv sagt, en njutning för honom att arbeta med språket, att tvinga fram det riktiga uttrycket. Det var hos honom den vetenskapligt skolade och tänkande mannens exakthet och konstnärens sinne för det sköna i uttrycket i lycklig förening. Men det var icke det plastiskt sköna i stilen han strävade efter, utan mera välljudet och färgharmonin. Han var genommusikalisk och såsom språkkonstnär var han främst musiker och målare. Den skämtsamma, lekande stilen, kåseriet, humorn och ordvitsen, var väl hans starkaste sida, men även allvarstonerna lågo honom nära. Under den skämtsamma formen eller det filosoferande kåseriet gömde sig oftast djupt allvar och under de lätta melodierna hördes ofta vemodets toner ljuda. Huru vackert och kraftigt kunde han icke teckna en stor mans livsgärning, med vilken fin känsla och smak kunde han icke måla förgångna tiders kultur och konst och huru mästerligt kunde han icke skildra naturen, giva uttryck åt dess stämning, då hans lyssnade till havets musik, till bärgens röster, till pinieskogarnas sagosorl eller stjärnehimmelens gnistrande legioners oändlighetsspråk. I dylika skildringar, vilka ofta förekommo i hans resebref, förnimmer man icke blott den skarpa iakttagaren utan även en lyssnande, fint uppfattande själ, en djup religiositet i panteistisk mening. Människokrypets litenhet i universum och människoandens evighetsvärde stodo icke för honom såsom oförenliga motsatser. „Han talade om allt“, yttrar ALB. ENGSTRÖM, „om filosofi, seismologi, dynamik, matematik och andra dystra hemligheter. Han skrev om djupet i människornas själar och försökte översätta Guds språk till svenska“. Men det är naturligt att bland det myckna han skrev och gav sina läsare stundom även fanns sådant, som icke var av fullhaltigt värde. Även den rikaste kan ju understundom känna sig tom, även den mest givande åder kan någongång sina, men tidningsmannen får icke kasta bort pen-

nan, även om han ville det. Och den som har skämtets och vitsandets gåva i blodet, kan i svagare stunder frestas att begagna den även på ett mindre lyckligt sätt. Det får man icke heller här glömma.

Mattssons kynne och stil såsom humorist hade sin alldeles individuella prägel. Själv kände han sig i detta avseende befryndad med tysken Viktor Aubertin och österrikaren Karl Kraus, båda journalister och medarbetare i stora världsblad. I den förra såg han till och med en sin läromästare. Även erinrar hans kåserande stil mycket om tysken Otto Julius Bierbaums. Då man läser dennes „Reisegeschichten“ kommer man ovillkorligen att tänka på Mattssons resebrev. Det är samma egenartade sammanflätning av god humor och allvar. Mattssons gemyt var rent germanskt. Bland humoristerna i den svenska litteraturen är det måhända Henrik Bernhard Palmaer, i förra hälften av senaste århundrade, med vilkens hans kvickhet och stil, till art och genialitet, visar mest släktskap. Rätt egendomligt är, att även Palmaer var kemist och därtill med hög begåvning. Men han var en person med ringa energi och uthållighet. Det var om honom Berzelius säges hava yttrat, att han var „den största syndaren i Svea rike“, varmed han ville antyda, att ingen svensk man gjort ett så sparsamt bruk av så rika naturgåvor som Palmaer. Mattsson förvaltade sina pund annorlunda. Hans sorg var snarare, att icke kunna göra dem tillräckligt fruktbringande.

Huru kvantitativt betydande Mattssons publicistiska skriftställeri var, kommer till synes i hans „Valda skrifter“, vilkas utgivande nyligen begynt. Det urval ur hans resebrev, populärt-vetenskapliga uppsatser, „I dag“-kåserier m. m., som i verket kommer att ingå, beräknas fylla 60 häften med inalles 120 tryckark.

I en levnadsteckning över Gustaf Mattsson bör icke glömmas erinra om att, ehuru han icke kände sig dragen till den egentliga politiska eller den socialpolitiska verksamheten, han dock, på grund av sina mångsidiga intressen också åt det praktiska hållet, sina kunskaper och sin framstående personlighet ombetroddes med allmänna uppdrag av hithörande art. Vid landtdagen 1905—1906 var han medlem av borgarestånd-det såsom representant för Kaskö stad. Hans speciella mission från valkretsen var att verka för en från stadens synpunkt sett lycklig lösning av den sydösterbottniska järnvägsfrågan. Tack vare Mattssons skickliga argumentering och slagfärdighet i debatten Kristinestad—Kaskö fick frågan en för den stad han representerade lycklig lösning. Vår enkammare skulle säkert haft gagn av en person med Mattssons läggning och förutsättningar, men, grundad som den tyvärr är på partival, finns där icke rum för „vildar“. Partiramen var honom för trång. I anledning av en anhållan om medarbetareskap i en ny svensk folktidning yttrade han år 1906 i ett brev: „Jag har icke kommit från min rabulistiska ståndpunkt gentemot en del svensksinnade, den del som inom det nya folkpartiet är tongivande. — — I positiv politik är jag fortfarande ett en-

fant terrible och vill icke såsom politisk vilde komma ont åstad beträffande ett företag, som borde få åtnjuta alla svensktalandes sympati".

Under en följd av år tillhörde han stadsfullmäktige i Helsingfors och var, i följd av sina kunskaper, sin intelligens och sina kvicka inläggg i debatten, särskilt i tekniska och humanitära frågor, en uppburen medlem av stadens höga råd.

MATTSSONS läggning och personlighet torde någorlunda tydligt framträda i den skildring som här givits av hans strävanden och verksamhet. Och dock behöver denna förfullständigas. Jag citerade ovan ett yttrande av honom om den „lugngivande oro", vari han trivdes gott. Det var ett uttryck för hans lust att få deltaga i ett intensivt, sjudande arbete, som spände alla nerver och krafter. Och alla, som sett honom i kamratkretsen eller sällskapslivet, fingo intrycket, att det hos honom sprudlade av livsglad, utåtriktad intellektuell aktivitet, som stod i rapport med hans omgivning. Men icke desto mindre kände han sig såsom en ensam man. Redan i sin ungdom skrev han dikter till ensamhetens och den stilla, tysta nattens lov. Och då han i senare år gav uttryck åt ensamhetens behag, så kan man ju gott förstå detta behov att emellanåt komma bort från arbets- och människovimlet, ett behov, som han delade med alla djupare anlagda naturer. Men det var icke blott detta. Han kände sig även ensam bland människorna. Han fann beröringen med dem ytlig och kall, vilket kan synas sällsamt hos en person med hans läggning, hos en person, så uppskattad och beundrad som han var det. Men det var icke därpå det för honom kom an. Han längtade efter en inre personlig kontakt med människorna, efter större omedelbarhet och frigörelse från den yttre konventionella och än mer den inre bundenheten. „Jag känner icke", skrev han under sitt sista levnadsår, „något behov av pris och ros och kan stundom hysa tacksamhet för raka motsatsen, om den kommer öppen och ärlig. Men väl fryser jag ofta av den tysta kylan omkring mig, av denna underliga temperamentslöshet hos hela vårt folk, av denna märkvärdiga rädsla för personlig och mänsklig kontakt, som kommer så många frön i vår fattiga jord att förtvina". Och under vistelsen på ett sanatorium känner han, hurusom han har absolut ingen andlig valuta av umgänget med sina olyckskamrater, bland vilka dock funnos sådana, som voro högt bildade samt levat och sett mycket. „Jag blott förflackas", säger han, „genom att i tal och tankegång placera mig på deras plan". Och han grubblar över, varför han överhuvud i livet icke fått vara i sådant sällskap, som vore för honom den *givande* parten. „Alltid är det — förstå mig rätt" — yttrar han, „jag som konsumeras. Detta beror nu visst icke till någon väsentligare del på mina små talanger, utan det är en olycklig missplacering av mitt jag. Följden är, att jag aldrig växer genom annat, än det oroliga och svaga inre liv jag för". Och han tillägger ytterligare: „I mitt mest bildade umgänge — Argus kretsen — har jag

att göra med dels ensidiga, dels så underligt slutna och framförallt *kalla* varelser, att min typ icke går ihop med deras. Kort sagt, jag är en *mycket* ensam man. Vore jag helst självkär i den mån, att jag vore mig själv nog. Men det är jag absolut icke". Giva icke dessa självbekännelser en djupare färgton åt hela hans personlighet, än den bild därav, som uppenbarar sig i hans yttre verksamhet och förhållande till människor?

I det föregående har antytts om den sjukdom, som sedan bröt Mattrsons krafter i jämförelsevis unga år. Redan då han var omkring 30 år visade sig misstänkliga symptom, men det var först under en utrikesresa 1906, i München och Brüssel, de togo en bestämdare form och vid hemkomsten konstaterades en begynnande tuberkulos. Han sökte närmast bot å Nummela sanatorium, dock under en tyvärr alltför kort tid, och sommaren 1907 företog han sin bekanta resa till de kanariska öarna, „de lyckliga öarna", vilken sommarfärd han på ett livfullt, oöverträffligt sätt skildrade i tidningskorrespondenser, vilka sedan utkommo i bokform. Våren 1910 inträdde en tydlig försämring i hans helsotillstånd och han begav sig då till Schatzalp-Davos, där han dock icke gav sig ro att stanna längre än till julen. Sanatorielivet och ett pedantiskt vårdande av den egna helsan gick icke ihop med hans livliga temperament och verksamhetsbegär eller behov av nya intryck. „Mattsson kan icke bliva frisk, han kan icke sköta sin helsa" skrev en finsk läkare som besökte honom i Davos. Med stort jämnmod — ett drag av vacker manlighet — bar han sin sjukdom. Han talade icke mycket därom och beklagade sig icke. Åt sentimentalitet och pjunk med sig själv gav han icke rum. Men väl försökte han hålla modet uppe genom arbete och genom att visa ett möjligast glättigt sinne. Svårt nog var det ibland. Då i början av år 1912 hans strupe var starkt angripen och han av sin läkare var förbjuden att tala, skrev han i ett privat brev: „Hela denna historia gör en folkskygg och misantropisk och det är en förskräcklig komedi att samtidigt skriva glada saker i Dagens Tidning".

Det enorma arbete han tog på sig genom huvudredaktörskapet för Dagens Tidning utan att därför helt lämna sina andra sysselsättningar var naturligtvis för mycket för hans redan starkt angripna helsa, och då denna tidning, för vilken han offrat så mycket arbete och intresse, måste upphöra, kände han det ganska slut med krafterna, men han minskade icke mycket på arbetsbördan. En längre tids vila i sydligare luftstreck, en vila, vilken tillika skulle bereda honom tillfälle till nya intryck, kunde möjligen ännu förlänga hans livstråd. Och så företog han senaste vår, med understöd av en av de många vänner hans penna förskaffat honom, den långresa runt Afrika, som vi ju alla av hans reseskildringar känna, en resa som ofta hägrat för hans själ, i vilken hans ungdomliga moders drömmar, då hon under sin korta varma levnadsvår färdats samma väg, tagit gestalt. Själv skriver han härom i ett enskilt brev: „Jag har en speciell

anledning att glädjas åt denna resa, i det att mina föräldrar såsom nygifta i tiden rundade Kap, på barken „Hoppet“ från Åbo, först på resa till Bombay och sedan retur, medan åter min farfar, som var en väldig seglare i herranom, såsom den första finska kapten seglade upp i Röda havet ända till Suez (1860). Tidigare hade han med Åbobriggen „Toivo“ anno 1846 gjort kustfart på västsidan av Afrika. Det är alltså en smula släkttradition att skrapa kanterna på den kontinenten, och om jag gör det som simpel passagerare, är det ju ändå en liten gärd åt fädrens minne. Min farfar och far voro båda prima karlar och jag är så här unter uns stoltare över dem än det skulle offentligen passa sig“.

Huru njöt han icke av denna färd, som förde honom långt bort från vardagslivets grå och dess slitande plikter. Ensamheten i umgänget med naturen var för honom en vederkvickelse av renaste art. „Att resa allena i tre månader med oceanen kring sig och korta strandhugg vid öknar, korallrev och Guds välsignelses kuster“, skrev han, „är nästan ett gift i täta doser. Sedan blir det ännu svårare att komma till rätta med samhället och nästan“. Finge man dömma av hans egna skildringar från färden, var författaren ingalunda en dödsdömd sjukling utan en resenär, strålande av levnadslust med öppet öga för natur och människor. Alldeles så var det nog icke, om ock färden utan tvivel hade blivit för honom välgörande, om den ostört fått fortgå. Men resan fick ett oväntat och för dess syften mycket ogynnsamt slut. „Turen om hörnet“ var gjord och han befann sig i Daressalam, en liten ort på Afrikas ostkust i tyskt kolonialland, då världskriget bröt ut. Resan måste här avbrytas. Fartyget måste upplåtas till militära ändamål och redan några dagar senare fick orten en påhälsning av engelska krigsfartyg och skarpa skott från deras kanoner. Det lyckligaste hade väl varit, om han stannat här, men avskuren från varje möjlighet av förbindelse med hemlandet — ovisst för huru lång tid — ville han försöka komma till Norden. Det lyckades honom att jämte ett par av sina reskamrater — en engelsk professor och hans fru — fly till Zanzibar och därifrån till Durban, där de funno en båt på väg till England. Färden till Liverpool, vilken räckte tre veckor, var på grund av förhållandena ombord för en person i hans helsotillstånd mycket ogynnsam. Å den överfyllda båten måste han dela en liten hytt med en arbetare, vilken, såsom han säger „aldrig klädde av sig, aldrig tvättade sig och rökte om nätterna. Det fanns ingen möjlighet att få byta. Ej heller fick man sova på däck“. Och han tillägger: „Hela denna resa under det ständiga trycket att vara utan pengar var naturligtvis för mycket för mitt skrabbiga jag. Intet att undra över, om jag sedan kroknade“. Avmagrad och svag återvände han till hemlandet. Han begynte emellertid åter med tidningsarbetet och redigerade sin resebok. Men han hann icke själv slutföra detta arbete, innan han måste ut på den långa resa, från vilken ingen återvänder, måste göra den stora turen om det hörn, där evighetens

perspektiv öppna sig. Nästan bokstavligen med pennan och korrekturet i hand somnade han stilla bort den 26 november — den finska studentkårens årsdag — endast 41 år gammal. Han efterleves av maka Sigrid, född Blumenthal, med vilken han trädde i äktenskap 1899, och en dotter.

Den 1 december invegs hans stoft till den eviga vilan. Den enastående sorgehögtidligheten vittnade icke blott om beundran utan om den tillgivenhet, kärlek den bortgångne förvärvat sig inom vida kretsar av vårt land. Det var icke en av våra stormän, som gått ur tiden, en vars namn sammanknutits med vårt lands politiska eller nationella utveckling, icke en av de store inom vetenskapen eller litteraturen, och dock en, som var huvudet högre än de flesta, en ung ädling i andens värld, vars rika personlighet vunnit hjärtan. Det var icke ceremoni och parad, icke yttre vördnad för ett stort livsarbete som förde samman de skaror, vilka samlades kring Gustaf Mattssons bår, det var äkta känslor av tacksamhet för vad han varit och givit, av sorg över att han gått bort.

Från Vetenskapssocietetens synpunkt måste man ju beklaga att, så kort Mattssons liv än blev, han icke kunde mera helt egna sig åt det produktiva vetenskapliga arbetet. Av hans ovanliga begåvning, hans idérikedom, klara tanke och skarpa blick hade man kunnat vänta mycket mera både originellt och gott på detta område, än han blev i tillfälle att giva. Och själv gav han stundom även uttryck åt en i denna riktning visande känsla. Men han kunde icke motstå ett inre krav, då han drevs in i den publicistiska verksamhetens grottekvarn. Hans livsgärning blev härigenom splittrad, men kanske endast skenbart. Det är ingalunda sagt, att den därigenom blev mindre värdefull. Ty vad han gjorde, blev väl gjort. Och vilken objektiv grund har man för att ställa den ena intellektuella verksamheten högre än den andra? Vi vetenskapsmän hava en viss benägenhet härför, men vår synvinkel är utan tvivel subjektiv. Från högre synpunkt sett var Mattssons livsgärning nog så helgjuten, synnerligast, som bakom allt hans verk stod en, icke blott rik och varm, utan genomarbetad, harmonisk personlighet.

Av Gustaf Mattsson utgivna skrifter:

Vetenskapliga avhandlingar:

Beskrivning över skärningarna vid Keuru—Jyväskylä järnväg. (Industristyrelsens Meddelanden. 1896.)

Pyrenets konstitution och genesis. Synteser och syntetiska försök. Akademisk avhandling. (Specimen för licentiatgrad.) H:fors 1905.

En ny syntes av fluoren jämte ett egendomligt fall av sterisk kollision. (Övers. Vet. Soc. förh. 48, N:o 9.) 1906.

Undersökning av högre bifraktioner, erhållna vid tillverkning av eter ur råsprit. (Ibid. 48, N:o 11.) 1906.

Eine neue Methode zur Bestimmung des Stickstoffperoxydes. (Ibid. 51, A. N:o 3.) 1909.

Ueber die halogenabspaltende Wirkung des Quecksilbers. (Ibid. 52, A. N:o 9.) 1910.

Ueber die Einwirkung metallischen Calziums auf organische Haloide. (Ibid 53, A. N:o 7.) 1910.

Die obere Grenze der Brown-Walkerschen Elektrosynthese und ein verbessertes Verfahren zu Ausführung derselben. (Ibid. 53, A. N:o 5.) 1910,

Die Elektrolyse von Salzen der Halbamide einiger zweibasischer Säuren. (Ibid. 53, A. N:o 6.) 1911.

Die kritische Lösungstemperatur binärer Gemische. I. (Acta Soc. scient. fenn. 40, N:o 6.) 1910.

Die Bestandteile des Wacholderrindenöls. Erste Mitteilung. (Bidrag Finl. nat. o. folk. 72, N:o 1.) 1913.

Tekniska uppsatser:

Finlands kemiska industri. (Tekn. fören. förhandl. 1903.)

Svavelhalten i lysgas. (Beretn. tekn. o. hygieniska kongressen i Köpenhamn. 1903.)

Teknisk gasanalys. Studie och sammanställning. (Tekn. fören. förh. 1904.)

Elektroanalys. (Kemistsamf. medd. 7.) 1899.

Elektrokemins resultat på det organiska gebitet. (Ibid. 8.) 1900.

Kemistkongressen i Wien 1898. (Teknikern.)

Det nya konsumtionsvattnet i Helsingfors. (Merkator.)

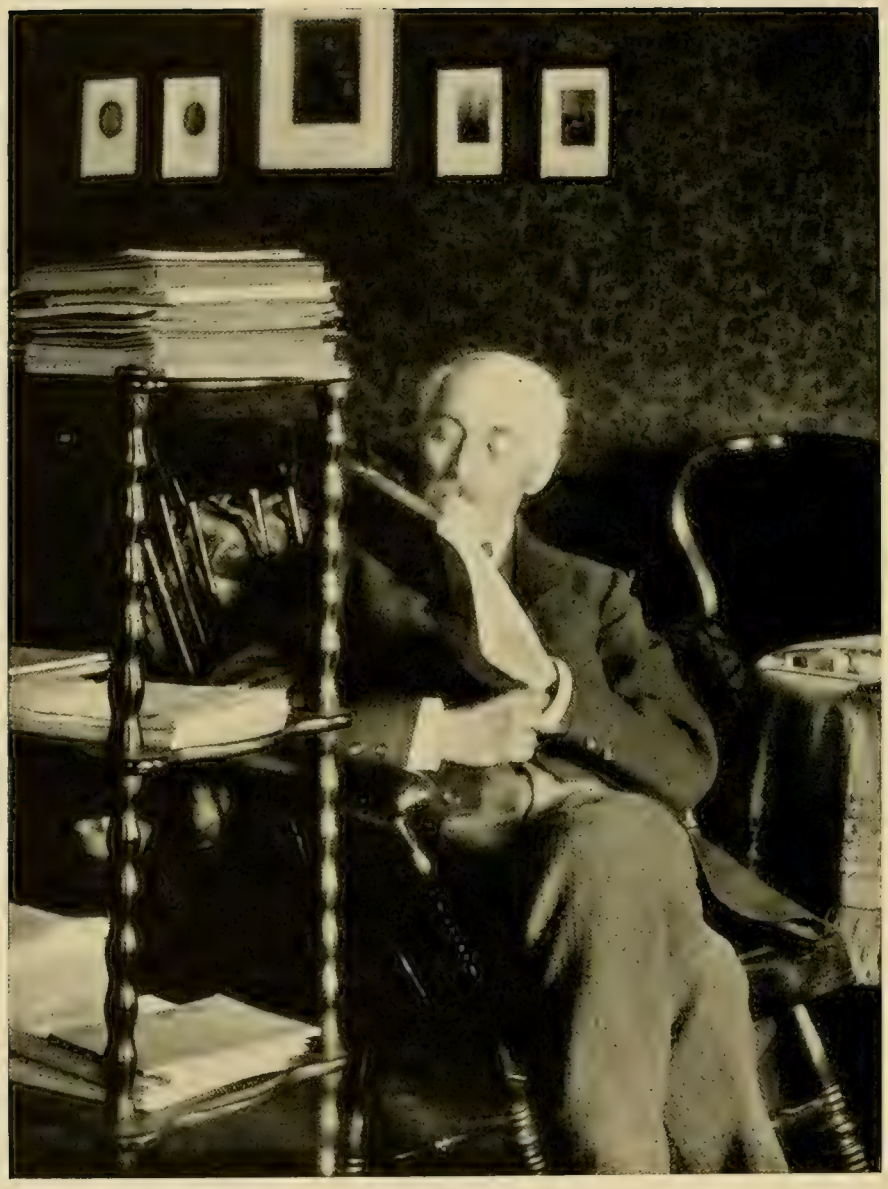
Populärvetenskapliga uppsatser:

Ett nytt angrepp på Laplaces kosmogoni. (Finsk tidskrift. 1900.) (Ingår även i tidskr. Kringsjaa, Kristiania.)
De ädla gasernas kemi. (Finsk tidskrift. 1907.)
Atomer och korpuskler. (Åbo afdeln. album.) 1910.
Naturvetenskaplig och teknisk översikt. I—X. (Finsk tidskrift. 1898—1902.)

Reseskildringar i bokform:

En sommarfärd till de lyckliga öarna. H:fors, Helios förlag. 1907. 197 ss.
En herre for till Zanzibar. Borgå, Holger Schildts förlag. 1914. 210 ss. 2 uppl. 1915.

Posthumt har begynnt utgivas: „Valda skrifter av Gustaf Mattson". Holger Schildts förlag, Borgå. Upplagan beräknas omfatta 60 häften à tvänne tryckark varje.



Konrad Källsten

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

Lefnadsteckning

öfver

Professor emeritus, statsrådet

Konrad Gabriel Hällstén,

föredragen vid

**Finska Vetenskaps-Societetens års- och högtidsdag
den 29 april 1914**

af

E. E. Sundvik.

Helsingfors 1916,
Finska Litteratursällskapets tryckeri.

Efter det jag af Finska Vetenskaps-Societeten erhållit i uppdrag att lämna en minnesteckning öfver dess aflidne ledamot, professorn Konrad Gabriel Hällstén, hafva svårigheterna härvid icke undgått mig. Svårigheten ligger icke blott däri, att den aflidne icke efterlämnat några biografiska anteckningar, bref etc., som kunde belysa hans privata lif, utan ock däri, att han icke efterlämnat nära anhöriga, som kunde lämna nödiga upplysningar härutinnan. Det blir mig sålunda blott öfrigt, att, litande på eget minne som den aflidnes mångåriga kollega och vän, söka i detta afseende uppfylla, hvad pietet och vänskap fordra. Det blir äfven klart, att denna biografi icke kan blifva synnerligen uttömmande.

— —

Familjeförhållanden.

Konrad Gabriel Hällstén härstammade, liksom så många andra bemärkta personligheter i vårt land, från österbottniska prästsläkter, och det såväl å fäderne som möderne. Hans fader, Berndt Gustaf Hällstén, var född 1792 och son till dåvarande sockneadjunkten i Ikalis, Karl Fredrik Hällstén och Kristina Lovisa Fonselius. — Hans mor, Susanna Sofia Stenbäck, var född 1797 och blef 1819 gift med Berndt Gustaf Hällstén. — Sonen Konrad Gabriel föddes efter makarnas öfverflyttning till Paldamo den 18 Augusti 1835. Vid 3 års ålder följde han med familjen vid dess öfverflyttning till Kelviå, å hvilken ort han sedermera tillbrakte hela sin barndomstid. I den stora familjen funnos slutligen icke färre än 9 syskon, 5 söner och 4 döttrar. Familjens ekonomiska förhållanden torde icke hafva varit synnerligen goda. Härtill kom, att flertalet af syskonen vid uppväxten visade abnorma, sjukliga anlag i högre eller lägre grad. Äfven i andra hänseenden var förhållandet i familjen icke det lyckligaste. Modern har dock erhållit vitsord som en synnerligen fin och allmänt omtyckt kvinna, som icke skydde några svårigheter, då det gällde familjens väl. Förhållandena i hemmet torde icke hafva varit utan inflytande vid utvecklingen af sonen Konrads så sensibla naturel. Sparsamhet och ringa an-

språk på lifvet, därjämte understöd från brodren Berndt, förhjälpte honom fram under studietiden vid skolan och universitetet. Han blef student 1856.

Privatlif etc. under ferierna.

Sin barndoms- och första ungdomstid tillbrakte Hällstén, som redan blifvit nämndt, i Kelviå, en ort med föga storartad natur liksom andra österbottniska kustsocknar. Dock blef han en vän af den oförfalskade finska naturen som få. Äfven sedermera, då han redan kunde anses hafva fast hem i Helsingfors, stod hans längtan till landsorten. Vid sommarens början lämnade han Helsingfors så tidigt, det blott var honom möjligt, för att, så sent som möjligt innan terminens början återvända till sin lärareverksamhet vid universitetet. I början af 80-talet blefvo vi feriegrannar i Ruovesi, där han bodde å Mulli hemman några år. Sedan han emellertid förskaffat sig egen villa å Tonttila hemman i Sääksmäki, men icke där funnit den sökta trefnaden, byggde han sig en ny villa i Kangasala socken vid stranden af Längelmävesi herrliga sjö. Här tillbrakte han numera sina ferier ända till sin död. Han kunde ock här lefva efter sitt lynne temligen ostörd af grannar och framför allt obemärkt, — och erkännas måste, att platsen var i många hänseenden idealisk. Förhållandena kunna väl nu vara i mångt och mycket förändrade, men en episod från slutet af 80-talet visar bäst folkets å orten redbara och förtroende värda karaktär.

En dag i juni fann Hällstén vid ankomsten till sin kära villa, till icke ringa öfverraskning för honom själf och till icke ringa förskräckelse för systern, att en af dörrarna till lokalen var olåst, dock tillsluten. Att ett inbrott blifvit begånget under vintern syntes vara klart. Vid närmare undersökning befanns dock allt i orubbadt skick, t. o. m. dyrbarare saker, som lågo så godt som framme, voro på sin plats. Slutligen erinrade sig Hällstén, att han, då de i september voro färdiga att lämna villan, ännu måste återvända för att medtaga någon glömd sak, och då sannolikt glömt tillåsa dörren. — Grannarna hade ock om vintern observerat spår leda till villan, och just till samma trappa. Antagligen hade personen i fråga blott kastat en blick genom fönstret, — af nyfikenhet, ej af plundringsbegär.

Ett under liknande förhållanden gjordt besök å en obebodd villa torde nuförtiden icke aflöpa så lyckligt för ägaren.

Hällséns villa var vackert belägen på strandsluttningen. Till densamma

hörde flera helt små holmar, eller stodo de åtminstone till parcellägarens disposition, holmar, delvis bildade af väldiga rullstenar, brant stupande i det djupa, kristallklara vattnet.

Den som ville studera Hällsténs natur, sådan den visade sig i hvardagslifvet, hade under sommarferierna det bästa tillfälle därtill. Ständigt sysselsatt, sågs han än upptagen af rödjnings- och planteringsarbeten i sin trädgård, än ute i båt på småfiske med mete och krok, för hvilken sport han visade ett intresse, värdt ett lyckligare resultat; än sågs han med bössan under armen och åtföljd af sin „Tuttu“ ströfva genom skog och mark. Den öfvernärda och bortklemade stöfvaren var kanske största orsaken till det ytterst ringa jaktbytet. Dock. — Hällsténs pretentioner voro ock synnerligen obetydliga. Rörelsen i det fria var hufvudsak. Han sökte påtagligen af sin sommarsemester samvetsgrant uttaga det högst möjliga af nöje och rekreation.

Ett sådant nöje erbjöd sig för honom i plantering och vård af ädlare prydnadsväxter, fruktträd och buskar. Det skulle synas föga antagligt att dessa kunde gifva synnerlig afkastning vid en latitud af nära 62°. Dock försäkrade Hällstén, att han nått fullt tillfredsställande resultat. Hans förkärlek för sin villa var af många omständigheter lätt förklarlig. Hvarje lyckligare händelse, äfven om den för en utomstående kunde synas vara af mindre betydelse, blef för Hällstén källa till stor förnöjelse. Han gaf sig ingen ro, förrän han visat och demonstrerat fenomenet för bekanta, som han kunde nå. Så hade han vid rödjningsarbeten hopsamlat en mängd större och mindre stenar vid stranden ute i vattnet, för att med tiden där anlägga en brygga. Här hade en massa kräftor sökt och funnit en fristad; och Hällstén sände genast efter upptäckten häraf bud till mig, som bodde många kilometer därifrån. Hans glädjeyttringar voro rent af obeskrifliga. — Hällstén hade den lyckliga egenskapen att kunna glädja sig åt litet såsom ett barn och visa en förnöjsamhet, som man vid hans ålder sällan finner.

Under detta sitt friluftslif kom Hällstén naturligtvis ofta i beröring med traktens allmoge. Och här kom hans folkliga natur att visa sig på ett vackert sätt. Han kände snart alla sina grannar, liksom de kände „professorn“. Ett möte på vägen kunde gifva upphof åt timslånga samtal om familjen, om åkerbruket och dess utsikter o. s. v. Hällsténs artiga, vinnande sätt med all dess anspråkslöshet måste ju utöfva sin verkan på den enkla befolkningen, förskaffa honom sympati och aktning. Om han däremot inomhus emottog besök af allmogemännen, torde vara osäkert. Här gjorde sig gällande en annan persons vilja, som i mångt och mycket skiljde sig från hans. —

Öfverhufvud idkade Hällstén blott föga umgänge med traktens bildade grannar. Sina skyldighetsvisiter aflade han dock samvetsgrant, alltid korrekt och fin i umgänget, som han var. Hans enda omgifning på landet liksom i staden var systern, som ombesörjde hushållet, och en tjensteflicka.

Karriär. — Läroämnen m. m.

År 1866 blef Hällstén medicine- och kirurgie doktor samt docent i fysiologi 1869. År 1871 blef han förordnad att förestå professionen i de vid denna tid förenade, så viktiga ämnena anatomi och fysiologi. Till anatomin hörde äfven histologin eller, som den vid denna tid oftast kallades, den mikroskopiska anatomin. Detta förordnande fortfor intill år 1874, då han blef ordinarie professor i dessa vetenskaper — Anatomin ägde dock sin souschef i den ordinarie prosektorn, vid denna tid docenten, d:r Georg Asp. Prosektorn och professorn voro af ganska olika natur. Också fick man det intrycket, att de icke i allt drogo jämt. Förhållandena vid anatomiska inrättningen voro vid denna tid icke synnerligen tidsenliga; och det blef först en senare tid förbehållet att härutinnan åstadkomma de reformer, som i så hög grad förändrat anatomiska institutet, anatomisalen framför allt, gjort den till en inrättning, som kan besökas af äfven laici utan äckel. Den anatomiska sidan besöktes af sådana skäl icke gärna af Hällstén. Undervisningen där ankom uteslutande å prosektorn. I stället hade han sig anförtrodda undervisningsskyldigheterna i fysiologi och histologi. Blott genom de privata tentamina hade han någon beröring med anatomin, såframt han icke helt enkelt åtnöjde sig med prosektorns betyg.

Histologin.

Hvad histologin vidkom, sörjde han för undervisningen i densamma enligt tidens begrepp på bästa sätt. Han hade att komplettera och fullkomna sin företrädares i ämnet, E. J. Bonsdorffs, både arbetsmetoder och arbetsplan. För detta ändamål utgaf han i tryck „Handledning vid histologiska öfningar“ i flere upplagor, alla utmärkta af samma korta och torra skrifsätt, som gjorde dem mindre tilldragande; men oaktadt detta voro de värdefulla och framför all sakliga. Histologin gick under Hällséns tid en stor utveckling till mötes som undervisningsämne för de blifvande läkarene; men sedan dess har denna vetenskap i alla dess delar gjort enorma framsteg, hvarom den tidens läkare ej ens kunnat göra sig en föreställning. —

Vid denna tid voro förbindelserna med de stora kulturlanden icke så utvecklade som nu. Äfven den vetenskapliga litteraturen var föga riklig och icke så lätt tillgänglig. Resor i studiesyfte voro därför i vissa afseenden af större betydelse än nu, så mycket mera, som äfven i och för studierna nödiga instrument och medel i allmänhet saknades i vårt land. Äfven nu tvinga sådana omständigheter ju ofta den redan försigkomna yngre vetenskapsmannen att uppsöka kontinentens stora centra. *Fysiologiska studieresor.*

Sedan Hällstén först genom universitetsmedel under åren 1866—68 blifvit satt i tillfälle att besöka Berlin, Wien och Paris, erhöll han 1869 Alexandersstipendiet, vid denna tid en stor utmärkelse, så mycket mera, som det var det största resestipendium, som universitetet då kunde utdela. Han vistades under denna resa i Heidelberg, hvarest Helmholtz var professor i fysiologi.

Under 60-talet, men ock något decennium tidigare hade genom en rad af glänsande förmågor fysiken och fysiologin erhållit en väckelse, som blott kan jämföras med kemins. — Brücke hade studerat och klargjort ögats anatomi och funktionella förhållanden, därjämte kontrast- och komplimentärfenomenen i optiken (1866). — Du Bois-Reymond, professor i fysiologi i Berlin, den kände Müllers efterträdare, var den andre heroen. Hans undersökningar angående de märkvärdiga elektriska fenomenen hos de s. k. elektriska fiskarna, men ock de elektriska fenomenen, som yttra sig i muskler och nerver, väckte stort uppseende. Helmholtz i Heidelberg, sedan 1871 i Berlin, uppfann ögonspegeln, klargjorde frågan om ackomodationen vid seendet och färgförnimmelserna, likaså ljud- och tonfenomenens beroende af vibrationer i medier och deras samverkan. — Slutligen må nämnas Ludwig, 1865 professor i Leipzig. Han är känd såsom uppfinnare af den nu i alla grenar af naturvetenskapen så ovärderliga, grafiska självregistrerings- och tidbestämnings-metoden. Han uppvisade likaså den antagonistiska samverkan, som ger sig tillkänna exempelvis i spottkörtlarnas innervation vid sekretionen. —

Dessa exempel må vara nog. Det allmänt hyllade vitalistiska åskådningssättet inom fysiologin fick småningom åtminstone delvis gifva vika för det fysiska, ehuru man här, såsom oftast i dylika fall, till en början väl mycket sköt öfver målet.

Sedan Hällstén sålunda blifvit i tillfälle att personligen formera bekantskap med den fysiska och fysiologiska vetenskapens i utlandet höga ståndpunkt, var det naturligt, att han, då han 1871 blef förordnad att föreståå, och ännu mera 1874, då han tillträdde professionen i denna vetenskap, så vidt möjligt skulle tillämpa de vunna erfarenheterna. Apparater och hjalpmedel i

allmänhet för fysiologins studium, förut här icke kända, än mindre sedda, började användas vid fysiologiska inrättningen, — och en del af dessa torde väl vara i bruk den dag som är å densamma. Helt visst tog fysiologins studium ett godt steg framåt på Hällsténs tid. — Som naturligt var, blefvo Du Bois-Reymonds och Helmholtz' upptäckter främst behandlade vid Hällsténs undervisning.

Hällsténs nya instrument kommo äfven andra vetenskaper till godo. Det var sålunda genom det fysiologiska institutet som den uppspirande fonetiken gjorde sitt inträde vid universitetet. Det var här, som, bland andra, den nuvarande innehafvaren af professionen i denna vetenskap de sista åren af 80-talet hördes arbeta på det Helmholtz'ska resonatoriet, hvars djupa, utdragna och irriterande toner icke just väckte sympati för fonetiken hos dem, som, arbetande å andra institutioner i samma hus, nödtvunget blefvo åhörare af öfningarna. —

Professionen i anatomi och fysiologi delades år 1882. Härvid valde Hällsten för sin del fysiologin och histologin. Efter ernådd emeritiålder afgick han från sin lärareplats 1899. Han afled i Helsingfors den 10 maj 1913.

Den första anatomieprofessorn blef vid delning af den fysiologiska professionen prosektorn Georg Asp. — Numera äro anatomin och histologin förenade; men en extraordinarie professor har den direkta ledningen af den senare sig anförtrodd.

Matematiskt anlagd till naturen.

Af naturen begåfvad med anlag för matematiken, som Hälletén var, var det ej att undra, om han i sina publikationer gärna sökte matematiska bevis för sin mening. Äfven i sina föreläsningar använde han gärna matematiska utläggningar, stundom t. o. m. i högre grad, än nödigt var. Hans viktigaste arbeten gälla: „Studium om kraftförvandling i vitala processer“ (1869); „Om protoplasmarörelser och funktionstillståndet i nervsystemet“ (1874); „Om dioptriska förmågan i centrerade system etc.“ (1872); flera serier af „Analys af muskelkurvor“; „Materiaux pour servir à la connaissance des peuples fennois“ (1881—1894). En fullständigare förteckning följer nedan.

Hällsténs käraste sysselsättning var dock de ända till det sista fortsatta försöken att erhålla möjligast noggrann inblick i muskelns kontraktionsförhållanden under funktionen. Härför konstruerade han en vidlyftig apparat. Muskelkurvorna analyserades äfven här matematiskt efter det talrika mätningar

gjorts på dem, sedan de grafiskt upptecknats af den af honom inventerade apparaten, hvars främsta del var den kurvan uppritande, roterande skifvan. —

Politiskt åskådningssätt; förhållande till språkfrågan.

Hällsténs lif störtes icke af de stora politiska och sociala spörsmål, som under senare delen af hans lif så starkt upprörde samhället. — Icke dock så, som skulle han icke hyst medkänsla vid de slag, som så djupt träffade vårt land. Han var i detta fall nog en god fosterlandsvän. — I upplysning af de lager af befolkningen, som utgöra landets märg och kärna, såg han det bästa skydd för nationen i sin helhet. Ett uttryck af denna sin åskådning gaf han tillkänna genom sin stora donation till Kangasala kommun.

Ehuru Hällstén icke heller var någon synnerligt aktiv medlem af de stora partier, som söndra vårt lands befolkning i språkfrågan, så var han dock nog intresserad af densamma. Han föreföll i samtal med bekanta af annan åskådning nog så moderat, i öfverensstämmelse med sin fina natur, men var dock innerst varmt tillgifven det finska partiet, kanske närmast det gammalfinska. Hans finkänslighet tillät honom dock aldrig att söka göra propaganda, men gärna umgicks han med en del yngre medlemmar af partiet, väl mest fordna elever. Hos dessa var Hällstén högeligen uppburen. Hans deltagande i stiftandet af medicinska sällskapet „Duodecim“ och „Suomalainen Tiedeakatemia“ samt hans storartade donation för denna senare var därför helt naturligt. —

Naturel.

Hvar och en, som första gången kom i beröring med Konrad Hällstén, kunde icke annat än blifva charmerad af hans vinnande personlighet. Hos honom var det artiga umgängessättet, belefvenheten helt naturliga yttringar. Det är derför lätt begripligt, att alla, som vid hans tillträde till professionen i anatomi och fysiologi blefvo i tillfälle att lära känna honom som lärare och kamrat, i honom bevara minnet af en sällsynt sympatisk personlighet, hvars minne icke förbleknat efter hans tillbakaträdande från professionen. — En egendomlighet hos honom var, att hans äfven mot den obekanta så förekommande sätt icke så lätt öfvergick till förtrolighet. Dagens „on dit“ åhörde han gerna, men sällan gingo de från honom öfver till tredje hand.

Tillbakadragen i sitt lif kunde Hällstén dock icke egentligen kallas en enstöring. Med tilltagande ålder allt mera ensam blefven och sällan besökt,

samt i en ny, mera främmande omgifning, isynnerhet sedan äfven hans mångåriga hushållsföreståndarinna, systern Betty, hemfallit under familjens olycköde, blef hans lif dock alltmera enslingens. — Oaktadt sina personliga egenskaper kunde han stundom fatta misstro äfven till en person, med hvilken han varit nära lierad. — Och Hällstén var då icke lätt att blidka, äfven om han stundom måste hafva insett sitt misstag. — Med allt detta, vanliga anomalier i den menskliga naturen, var han dock en synnerligen attraktiv personlighet.

I sitt enskilda lif iakttog Hällstén stor sparsamhet. Såsom ogift och för egen del ställande ringa fordringar på lifvet, var det honom möjligt att samla en icke ringa förmögenhet. Denna har han på ett ädelt sätt låtit komma äfven vetenskapliga inrättningar till godo, — universitetet och Suomalainen Tiedeakatemia.

Vetenskapliga verksamhet.

Jag har i det föregående sökt framhålla Hällstén såsom en god och inom sitt läroområde nitisk och intresserad lärare, hans förtjänster om histologin och fysiologin samt hans älsklingstema vid undervisningen: Du Bois-Reymonds och Helmholtz' discipliner, sålunda främst nerv- och muskelfysiologi samt de ögat rörande fysiologiskt-fysikaliska fenomenen. Jag har nämnt hans af intresse för ämnet utgifna „Handledning vid histologiska öfningar“ och vill tillägga hans „Lärobok i oftalmometri“, samt specimen för doktorsgrad „Om refraktion och ackomodation i ametropiska och emmetropiska ögon“, äfvensom „Om dioptiska förmågan i centrerade system“.

Hans 1869 utgifna docentspecimen: „Studier om kraftförvandling i vitala processer“ bedömes af professor Tigerstedt [1]) med uttrycket: „en mycket väl skrifven framställning, i hvilken dock inga experimentala undersökningar meddelas till belysning af den här behandlade frågan“; och om hans professorsspecimen (1873): „Om protoplasmarörelser och funktionstillståndet i nervsystemet“: att han, utan att dock egentligen meddela några nya rön, söker visa, att nervens tillstånd af verksamhet består i vågrörelser, och i sammanhang härmed, att läran om de specifika sinnesenergierna icke är hållbar.

Jag anför här in extenso prof. Tigerstedts i öfrigt *uttalade omdöme om prof. Hällsténs vetenskapliga verksamhet.*

---

[1]) Sedan jag skrifvit och till tryck inlämnat denna lefnadsteckning af Hällstén, har jag, sent nog, erfarit, att prof. Tigerstedt inför Finska Läkaresällsk. hållit ett minnestal öfver denne, Läkaresällskapets ledamot. Jag har af prof. Tigerstedt erhållit tillstånd att referera hans omdöme om Hällséns vetenskapliga verksamhet. — Min redan skrifna lefnadsteckning anser jag mig icke hafva skäl att ändra i något hänseende. Jag är prof. Tigerstedt tack skyldig för hans tillmötesgående där, hvarest jag icke äger kompetens att yttra mig.

„I afseende å Hällstens vetenskapliga verksamhet har jag redan omtalat den del af densamma, som hänför sig till tiden före hans utnämning till professor.

Hans fortsatta forskning anslöt sig till stor del nära till den tankeriktning, som i dessa tidigare arbeten fått sitt uttryck

Sålunda offentliggjorde han (1875) en undersökning om retbarheten å olika ställen af samma sensibla nerv; därpå följde (1880) ett meddelande om de retbarhetsförändringar, som under inverkan af en konstant elektrisk ström uppträda hos sensibla nerver, samt (1881) en väsentligen polemisk artikel om mekanisk retning af nerver. En omfattande undersökning om sensibla nerver och ryggmärgens reflexapparater offentliggjordes i en serie afhandlingar 1885—1887. I nära samband med denna står ett meddelande om ryggmärgens permeabilitet för elektrotonus. (1890).

Inom den allmänna muskelfysiologiens område undersökte Hällsten verkningarna af direkt retning af tvärstrimmiga muskler med konstant ström (1886, 1887) samt lämnade bidrag till kännedomen om muskelns kontraktionskraft (1890). Äfven verkställde han en minutiös analys af muskelkurvor, som uppteckнats under olika omständigheter (1897—1900).

Fortsättningen af sistnämnda arbete sysselsatte Hällstén äfven sedan han lämnat sin professur, och han ägnade sig häråt med samma arbetsglädje som under tidigare år, ända till dess att tilltagande kroppslig svaghet hindrade honom att besöka laboratoriet.

Inom den fysiologiska optiken utgaf Hällstén en afhandling om den dioptriska förmågan i centrerade system (1879) och en undersökning om symtotiska punkter (1891).

Hällstens arbeten inom andra områden af fysiologien äro blott få till antalet; de utgöras af ett helt kort meddelande om amylnitrit (1875) samt af en undersökning om inverkan af magnesiumsulfat på kroppens olika förrättningar.

Genom Gustaf Retzius' undersökning i finsk antropologi väcktes äfven i vårt land intresset för forskningar åt detta håll, och 1876 framlade Otto Donner inom Vetenskapssocieteten en plan för sådana. Ett resultat häraf föreligger i de långa serier af mätningar af skallar tillhörande olika finska folkslag, som utfördes af Hällstén och af honom publicerades åren 1881—1894. År 1882 lämnade han i Suomi en sammanställning af de på detta område dittills vunna erfarenhetsrönen.

Tillsammans med Cloratt utgaf Hällstén en beskrifning öfver de i univer-

sitetets anatomiska museum förvarade missbildningar af människo- och djurfoster (1890).

Slutligen offentliggjorde Hällstén två afhandlingar i matematik och teoretisk fysik, nämligen om adiabatiska linier (1875) samt not till Eulers koordinattransformation (1878).

Framställningssättet i Hällséns vetenskapliga arbeten är koncist, klart och redigt, och vissa af dem kunna i detta afseende betecknas som mönstergilla.

Samma egenskaper utmärka ock de mera populära afhandlingar, han under årens lopp utgaf. Hit höra hans artiklar om färgsinnet, människorösten och Listers förband (i Valvoja 1881—1883), hans i ett akademiskt program lämnade framställning af den cellulära teorin och dess utveckling under senaste tid (1887), samt hans föredrag vid Vetenskapssocietetens årshögtider 1887 och 1888.

I synnerhet det senare af dessa, med hvilket Societetens 50-års fest afslutades är af intresse, emedan Hällstén här lämnar en redogörelse för sin uppfattning af det mekaniska åskådningssättet för förklaringen af förändringarna inom de lefvande varelserna.

Han söker här visa, att det mekaniska åskådningssättet ej får uppfattas såsom allmängiltigt i samma utsträckning som tillförene, emedan en viktig grupp af fenomen tills vidare icke däri funnit sin förklaring, samt att det icke är omöjligt, att den biologiska forskningen ännu skall se sig föranlåten i viss mån återupptaga det förra vitalistiska åskådningssättet för förklaringen af just de biologiska fenomen, som mera än andra äro karakteristiska för den lefvande materien, de som försiggå i väfnadselementen vid deras tillstånd af verksamhet.

Genom dessa resultat förändras, tillägger Hällstén, visserligen icke den forskningsmetod som hittills blifvit följd inom de biologiska vetenskaperna, men uppfattningen om de biologiska fenomenen blifver en annan; den måste tills vidare blifva mer reserverad, till dess säkrare kännedom erhålles om de aktiva processerna i väfnadselementen. Det är självfallet, att härmed äfven de slutledningar man gjort, under förutsättning att det mekaniska åskådningssättet är allena berättigadt för förklaring af förändringarna inom de lefvande varelserna, härmed förlorat i betydelse och allmängiltighet.

Efter det Hällstén 1899 såsom emeritus erhållit afsked från sin professur, ägnade han sin ålderdom likasom hela sin föregående lefnad åt studier, därvid han allt fortfarande vände sin forskande ande åt vetenskapens djupa frågor, sålunda på ett det värdigaste sätt njutande af de vises hvila.

Särskildt intresserade han sig för den fysikaliska kemien, hvars framsteg han med största uppmärksamhet följde; den sista vetenskapliga afhandling, som han af trycket utgaf, en anmärkning rörande Clapeyron-Clausiuska ekvationen för det latenta värmet (1902), hänför sig till denna.

Såsom grundläggare af fysiologins och den mikroskopiska anatomiens studium vid vårt universitet skall Hällsten alltid intaga en framskjuten plats i den finska medicinens historia."

Curriculum vitae.

1835.	*Född i Paldamo* den 18 aug. af kapellanen Berndt Gustaf Hällstén och Susanna Sofia Stenbäck.
1856.	*Student* i Helsingfors.
1860.	Fys.-matem. *Magister.*
1862.	*Med. Kandidat.*
1866.	*Med. Licentiat; Med. och Kirurg. Doktor* samma år.
1866—68.	*Resor utrikes* och vistelse i Berlin, Wien, Paris.
1869—70.	Erhöll *Alexander-stipendiet;* vistelse i Heidelberg.
1868—69, 1870—71.	*Assistent å Farmaceutiska Laboratoriet.*
1869.	*Docent* i Fysiologie.
1874.	*Specieminerade* för profession i Anatomi och Fysiologi. Professor samma år.
1882.	*Professionen delas.* Hällstén opterar för Fysiologin och Mikroskopiska Anatomin.
1882—84.	*Inspektor för Österbottniska Afdelningen.*
1885.	*Ledamot* af Finska Vetenskaps-Societeten.
1885.	*Dekanus* för Medicinska Fakulteten.
1899.	Tager *Afsked* från Professuren.
1913.	*Afled* i Helsingfors den 10 Maj.

1885.	*Ridd.* af Annae-Ordens III kl.
1889.	*d:o* af Stanislai-Ordens II kl.
	Erhöll efter afskedstagandet *titel af Statsråd.*

Utgifna skrifter.

1. 1866. *Om refraktionen och ackomodationen i ametropiska och emmetropiska ögon.* (Specim. för doktorsgrad.)
2. 1867. *Om förhållandet mellan hjärtats kraft och värmet i organismen.* (Notisbl.)
3. 1868. *Elektroterapeuten Benedikt i Wien.* (Notisbl.)
4. 1869. *Studier om kraftförvandling i vitala processer.* (Docentspecimen.)
5. 1871. *Försök med amylnitrit på djur.* (F. Läk. S. Handl.)
6. 1872. *Lärobok i Oftalmometri.*
7. 1873. *Om protoplasma-rörelser och funktionstillståndet i nervsystemet.* (Spec. för professur.)
8. 1875—87. *Studier i väfnadselementens fysiologi.*

   I. *Irritabiliteten af samma nerv på olika ställen.* F. L. H. XVII — 1875; på tyska: Arch. f. Anat. u. Phys. 1876; Nord. med. Arch. VIII. — 1876.

   II. *Elektrotonus i sensibla nerver.* Nord. med. Arch. XII, 1880; på tyska: Arch. f. Anat. u. Phys. 1880.

   III. *Till kännedom om mekanisk retning af nerver.* Nord. med. Arch. 1881; på tyska: Zur Kenntniss der mekanischen Reizung der Nerven, Arch. f. Anat. u. Phys. 1881.

   IV. *Till kännedom om sensibla nerver och ryggmärgens reflexcentra.* Nord. med. Arch. XVIII, 1885 och XVIII, 1886. — Öfvers. af F. Vetensk. Soc. Förh. XXVIII, 1886, XXIX, 1887.
9. 1877 och 95. *Handledning vid histologiska öfningar.*
10. 1878. *Not till Edlers koordinat-transformation.* (F. Vet. Soc. Förh. XX, 1878.)
11. 1880. *Om dioptriska förmågan i centrerade system med särskildt afseende på ögats dioptriska förmåga.* (F. Vet. Soc. Öfvers. XXII, 1880.)
12. 1881—94. *Materiaux pour servir à la Connaissance des Crânes des peuples fennois* (flere medd. i F. Vet. Soc. Bidrag 1881—94.)
13. 1881. *Tutkimuksia viime ajoilta väriaistin kehittymisestä.* (Valvoja).
14. 1882. *Ihmisäänestä.* (Valvoja, 1882.)
15. 1883. *Listerin antiseptinen parannuskeino.* (Valvoja III, 1883.)
16. 1887—88. *Direkt retning af tvärstrimmad muskulatur förmedelst konstant ström.* (F. Vet. Soc. Förh. XXIX och XXX.)
17. 1886. *Kompressorium för mikroskopiskt ändamål.* (F. Vet. Soc. Öfvers. — På tyska: Zeitschr. f. Biologie XXII.)
18. 1887. *Zeitbestimmungen mittelst der Differenz der Epochen zweier harmonischen Bewegungen.* H:fors 1887.
19. 1887. *Om förnimmelserna och deras betydelse för den psykiska verksamheten.* (Föredrag, F. Vet. Soc. Öfvers. 1887).

20. 1888. *Det mekaniska åskådningssättet för förklaring af förändringarna inom de lefvande organismerna.* (F. Vet. Soc. Öfvers. 1887—88. På finska i Valvoja, 1888.)
21. 1889—90. *Till kännedom om musklers kontraktionskraft.* (F. Vet. Soc. Öfvers.)
22. 1891. *Medulla oblongatasta ulottimien lihaksiin johtuvat innervationit.* (Duodecim 1891.)
23. 1892. *Verkningar af magnesiumsulfat på motoriska ledningsbanor.* (F. Vet. Soc. Acta..
24. 1897. *Analys af muskelkurvor* (F. Vet. Soc. Acta XXIV.)

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 1.

HISTOLOGISCHE STUDIEN

ÜBER

DIE MUSKELENTWICKLUNG

VON

VANESSA URTICAE L.

VON

ERIK NORDENSKIÖLD

MIT EINER TAFEL

HELSINGFORS 1914
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 2.

ÜBER DIE SCHWINGUNGSZAHLEN DER METALLMOLEKÜLE UND DIE ABSORPTION DES LICHTES IN METALLEN

VON

K. F. SLOTTE

HELSINGFORS 1914,
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 3.

NOTE SUR LE PROBLÈME ISOPÉRIMÉTRIQUE

PAR

J. W. LINDEBERG

HELSINGFORS 1915.
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ DE LITTÉRATURE FINNOISE.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI N:o 4.

SUR UN PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'ANALYSE

ET SES APPLICATIONS A

LA THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

PAR

ERNST LINDELÖF

(PRÉSENTÉ LE 17 MAI 1915)

HELSINGFORS 1915
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ DE LITTÉRATURE FINNOISE

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM XLVI. N:o 5.

OM

KVARTSENS TERMISKA DILATATION

AF

KARL F. LINDMAN.

HELSINGFORS 1916,
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 6.

OM

TURMALINENS TERMISKA DILATATION

AV

KARL F. LINDMAN.

HELSINGFORS 1916,
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 7.

Zur Theorie der Lobatscheffskij'schen Geometrie

von

Severin Johansson.

Helsingfors 1917.
Druckerei der Finnischen Litteraturgesellschaft.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI. N:o 8.

ÜBER DIE TRACTRIX UND DIE PSEUDOSPHÄRE IN DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE

VON

SEVERIN JOHANSSON.

HELSINGFORS 1918,
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

MINNESTAL

ÖFVER

PROFESSOR EMERITUS ARKIATER

OTTO E. A. HJELT

HÅLLET PÅ

FINSKA VETENSKAPS-SOCIETETENS ÅRS- OCH HÖGTIDSDAG

DEN 29 APRIL 1914

AF

E. A. HOMÉN

HELSINGFORS 1914
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI

ODO MORANNAL REUTER

SOM ZOOLOGISK FORSKARE

MINNESORD

UPPLÄSTA VID

FINSKA VETENSKAPS-SOCIETETENS

ÅRS- OCH HÖGTIDSDAG DEN 25 MAJ 1914

AF

J. A. PALMÉN

HELSINGFORS 1915
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

MINNESTAL

ÖVER

FRIHERREN DOCENTEN, FIL. DR.

AUGUST BENJAMIN AF SCHULTÉN

HÅLLET VID

FINSKA VETENSKAPS-SOCIETETENS ÅRSHÖGTID DEN 29 APRIL 1913

AV

WILHELM RAMSAY.

HELSINGFORS 1916.
FINSKA LITTERATUR-SÄLLSKAPETS TRYCKERI.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

MINNESTAL

ÖFVER

PROFESSOREN

KARL FREDRIK SLOTTE

HÅLLET VID

FINSKA VETENSKAPSSOCIETETENS ÅRS- OCH HÖGTIDSDAG
DEN 29 APRIL 1915

AF

HJ. TALLQVIST.

HELSINGFORS 1915,
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

MINNEESTAL

ÖVER

LEKTORN DOKTOR

GUSTAF OTTO MATTSSON

HÅLLET Å FINSKA VETENSKAPSSOCIETETENS ÅRSHÖGTID
DEN 29 APRIL 1915

AV

EDV. HJELT.

HELSINGFORS 1915.
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. XLVI.

Lefnadsteckning

öfver

Professor emeritus, statsrådet

Konrad Gabriel Hällstén,

föredragen vid

**Finska Vetenskaps-Societetens års- och högtidsdag
den 29 april 1914**

af

E. E. Sundvik.

Helsingfors 1916.
Finska Litteratursällskapets tryckeri.

MBL WHOI Library - Serials
5 WHSE 04189